3º ESO

CUADERNILLO DE TRABAJO

Nombre:______________________________ Curso:______

MATEMÁTICAS

Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz

Profesor:

………………………………………………………………………………………….

Materiales utilizados:

Ejercicios y problemas diseñados por Daniel Hernández (IES Melchor de Macanaz)

Material Creative Commons "Matemáticas 3º de ESO" (www.apuntesmareaverde.org.es)

Algunos problemas de http://selectividad.intergranada.com

UNIDADES DEL CURSO:

UNIDAD 1. FUNCIONES.					
PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 2. PROBABILIDAD.					
PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 3. ESTADÍSTICA.					
PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 4. NÚMEROS REALES.					
PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 5. PROBLEMAS ARITMÉTICOS.					
PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 6. SUCESIONES.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 7. LENGUAJE ALGEBRAICO. ECUACIONES.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 8. SISTEMAS.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 9. GEOMETRÍA PLANA Y EN EL ESPACIO.

PARTICIPACIÓN		CUADERNO TRABAJOS		Comentario:	Nota Unidad
INFORMÁTICA		EXAMEN			

UNIDAD 1. Funciones.

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
C2. Localización y sistemas de representación	- Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
D3. Variable	- Variable: comprensión del concepto en sus diferentes naturalezas.
D5. Relaciones y funciones	- Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan. - Relaciones lineales y cuadráticas. - Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.

Resumen del tema:

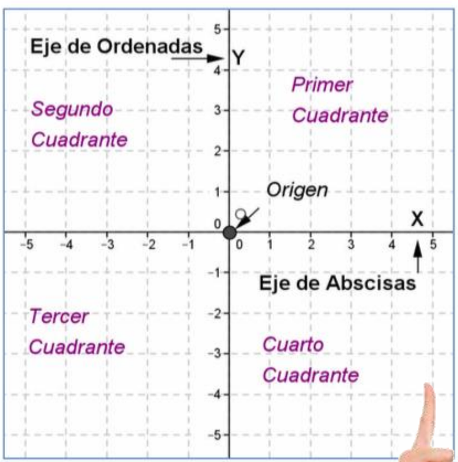
1. Sistema de referencia cartesiano.

- Un sistema de referencia cartesiano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas ejes. El punto en el que se cortan los ejes se denomina origen de coordenadas (O).

- Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos eje de abscisas (eje OX) y al vertical eje de ordenadas (eje OY).

- Al cortarse los 2 ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas denominadas cuadrantes.

- Llamaremos coordenadas de un punto A a un par ordenado de números (x,y) donde x indica la posición en el eje OX e y la posición en eje OY.



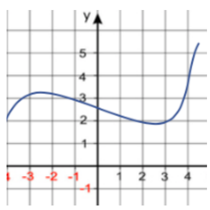
2. Concepto de función.

Una función es una relación que asocia a cada valor de una magnitud inicial un único valor de otra magnitud final.

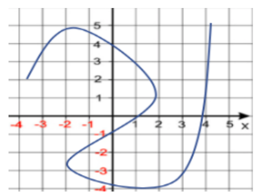
Los valores de dichas magnitudes se denominan variables. La primera magnitud x es la variable independiente y la segunda y la variable dependiente.

Ejemplo gráfico: Gráficamente podremos distinguir una función porque a cada valor de la x le corresponde un único valor de la y.

Sí es función



No es función (varias y para un x)



3. Características de una función:

- **Dominio** (valores de x que tienen gráfica)
- **Recorrido** (valores de y que tienen gráfica)
- **Continuidad.**
- **Monotonía** (Crecimiento y decrecimiento)
- **Extremos relativos y absolutos** (máximos y mín)
- **Puntos de corte / Periodicidad / Simetría**

4. Formas de representar una función.

- **Descripción verbal** que describe una situación.
- T**abla de valores** que nos indica los valores.
- **Gráfica** que nos visualiza la situación.
- **Expresión algebraica.** Fórmula que nos relaciona las dos magnitudes.

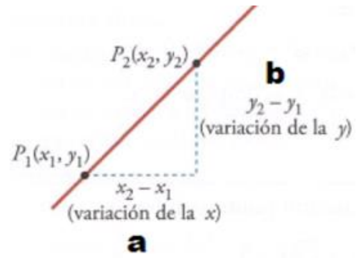
5. Ecuación de una recta y=mx+n (m pendiente, n ordenada en el origen)**.**

- ¿Cómo calcular m y n?. Dados dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$,

n se calcula sustituyendo x=0 ; m = $\frac{b}{a} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

- ¿Cómo calcular m y n en una gráfica?.

n es el valor donde corta la recta al eje OY y m se obtiene cogiendo dos puntos de la recta, trazando un triángulo rectángulo como el de la imagen y calculando el cociente entre su altura y su base.



- Ecuación punto-pendiente. $y-y_0=m(x-x_0)$

6. Estudio y representación de parábolas (y=ax^2+bx+c)

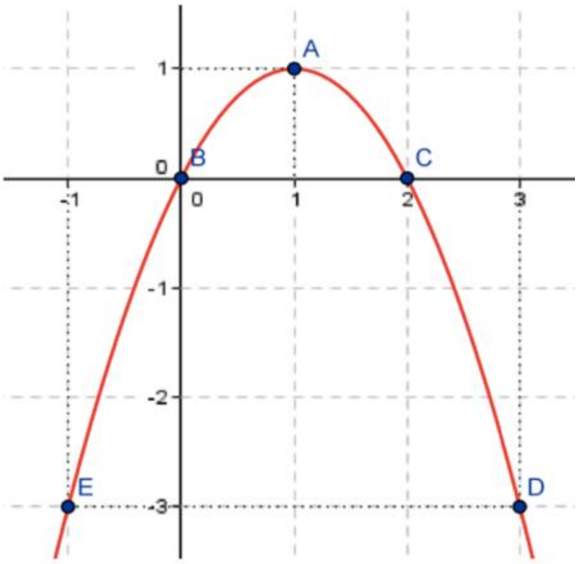
- Si a>0 tiene forma de ∪ y si a<0 tiene forma invertida ∩
- El vértice de la parábola se encuentra en $x_0=-b/2^a$
- Calcular los puntos de corte con el eje 0X, resolviendo $ax^2+bx+c=0$
- Construir tabla valores incluyendo el vértice y los puntos de corte. Además incluir valores a ambos lados del vértice.

<u>Chiste</u>:

Interpreta el comportamiento de funciones a partir de su gráfica e identifica sus características. Construye gráficas a partir de enunciados y viceversa.

TEORÍA. Sistema de referencia cartesiano. Coordenadas de un punto.

1. Indica cuales son las coordenadas de los siguientes puntos marcados en el gráfico:



A → (,   )

B → (,   )

C → (,   )

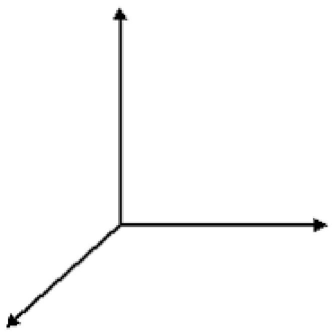
D → (,   )

E → (,   )

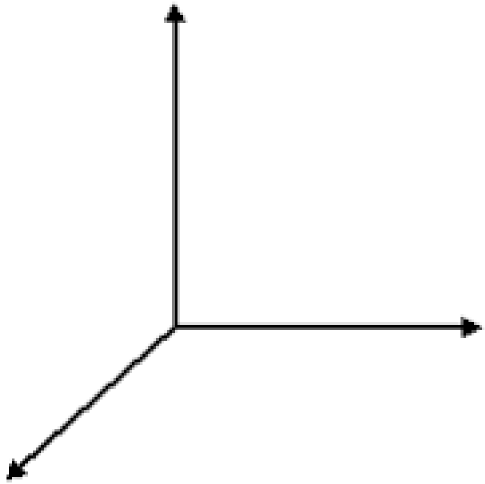
2. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

A = (–4, 2); B = (–3, –3); C = (–1, 0’5) y D = (0, –2)

TEORÍA. Sistema de coordenadas en el espacio. Coordenadas de un punto.



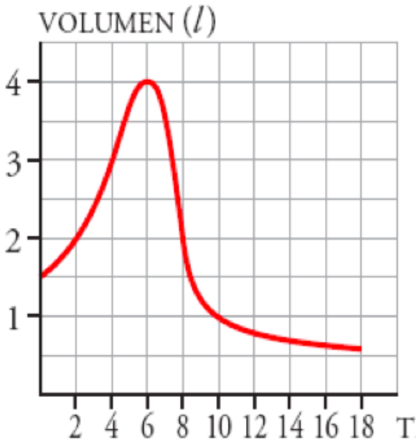
3. Representa en este sistema de coordenadas espacial los siguientes puntos:



A = (2,0,0); B = (1,1,1); C = (0, 1,1); D = (0, 0,3); E=(2,0,2)

Interpretación de funciones:

4. Para medir la capacidad respiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro. Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial? ______________________

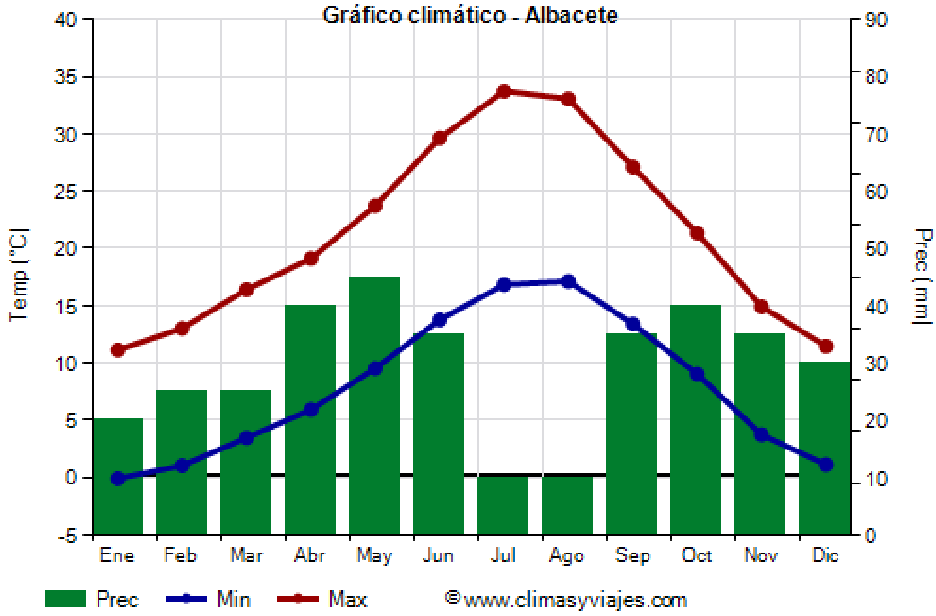
b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?___________________________

c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona? ____

d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ______

e) ¿Y cuándo termina? _______________

5. La siguiente gráfica nos muestra las temperaturas y las precipitaciones que hemos tenido en Albacete durante un año. Mira la gráfica y responde a las preguntas que encontrarás a continuación.



a) ¿En qué meses ha llovido menos y qué cantidad ha llovido? ___________________________________

b) ¿Qué temperatura máxima y mínima hizo en Octubre?_______________________________________

c) ¿En que estaciones del año es cuando más llueve en Albacete? ________________________________

d) ¿Qué observas en cuanto a la diferencia entre temperatura máxima y temperatura mínima durante todo el año?

____

6. Esta gráfica representa los bonos vendidos por una empresa durante 3 años:

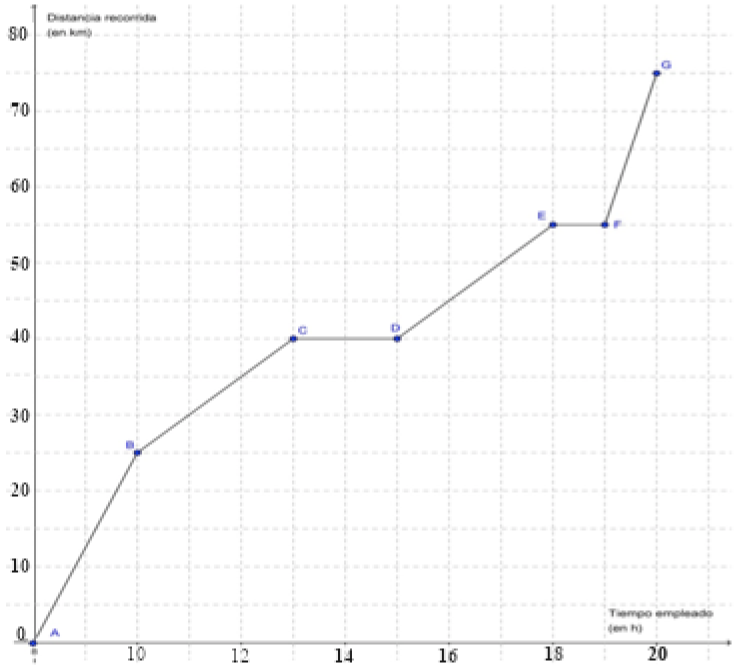
a) ¿Durante cuántos meses se hizo este estudio?

b) ¿En qué mes de 1999 se vendieron menos bonos?

c)¿En qué mes del año 2001 se produce la máxima venta?

d) ¿En qué estación del año es decreciente la venta?

7. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos hecho a la Sierra:



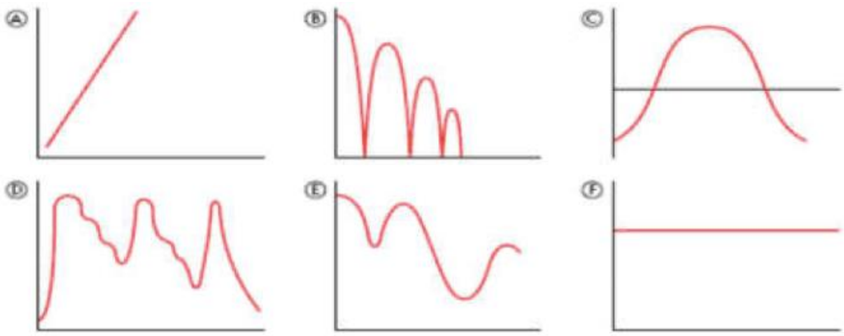
a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?

b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?

c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?

d) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión:

8. Asocia cada gráfica con las situaciones descritas más abajo, y di en cada caso que representan los ejes de abscisas (OX) y los de ordenadas(OY):

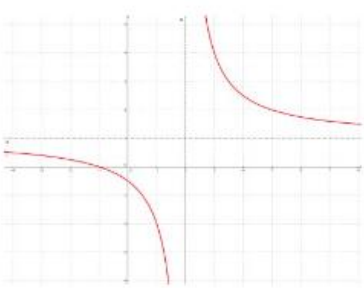


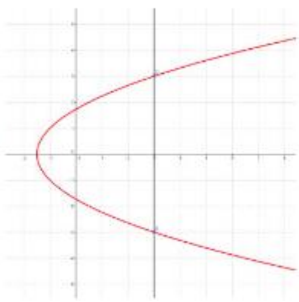
Situación	Eje OX	Eje OY	Letra
1) Altura de una pelota que bota al pasar el tiempo			
2) Edad de una persona con el paso del tiempo.			
3) Temperaturas mínimas diarias en Segovia en un año			
4) Precio de las bolsas de patatas fritas			
5) Nivel de agua de un pantano a lo largo de un año			
6) Evolución de la prima de riesgo española			

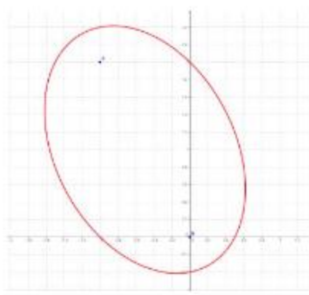
TEORÍA. Concepto de función.

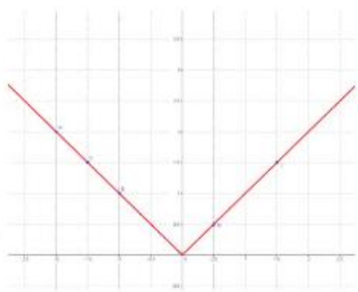
9. Escribe a continuación una gráfica que sea función y otra que no sea función

10. Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función y cuales no:



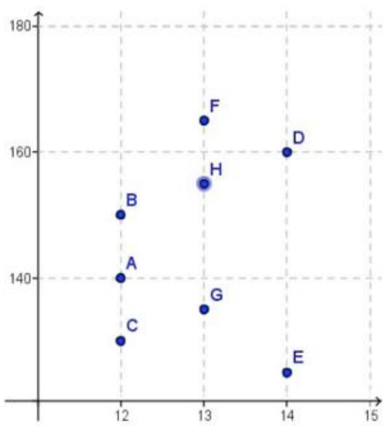






____________________ ____________________ ____________________ ____________________

11. La altura y la edad de un equipo de baloncesto están relacionados según muestra la siguiente gráfica:



a) Si Juan tiene 14 años, ¿cuál puede ser su altura? ____________________

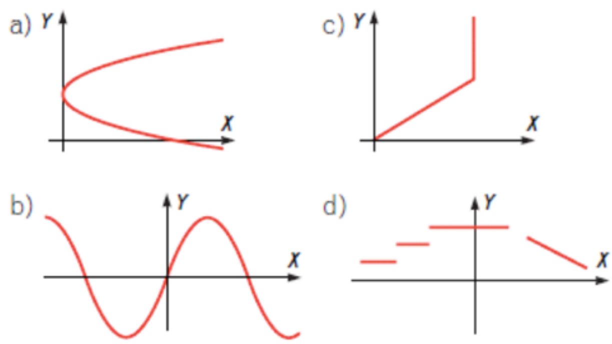
b) Si María mide 165 cm, ¿cuál puede ser su edad? ____________________

c) Si Fran mide 140 cm, ¿cuál puede ser su edad? ____________________

d) La relación entre la edad y la altura de los jugadores del equipo, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? ____________________________________

____

12. Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función y cuales no:



a) ____________________ b) ____________________ c) ____________________ d) __________________

13. Rodea la única tabla que no puede ser una relación funcional:

a)

x	y
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	y
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

c)

x	y
–3	9
–1	1
0	0
2	4

d)

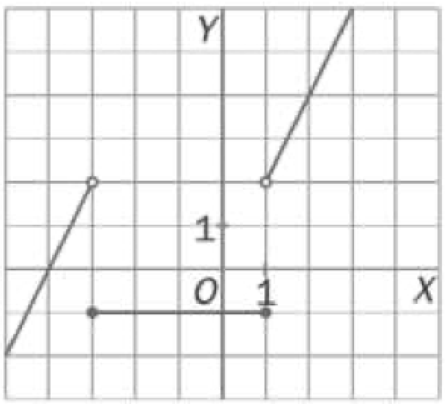
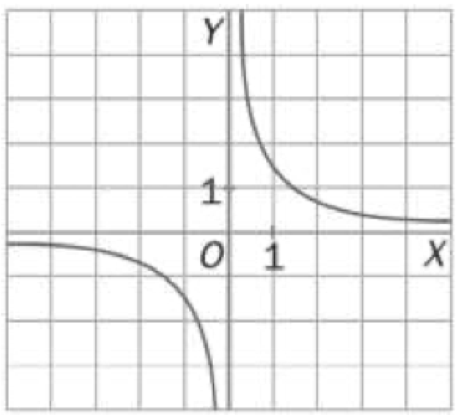
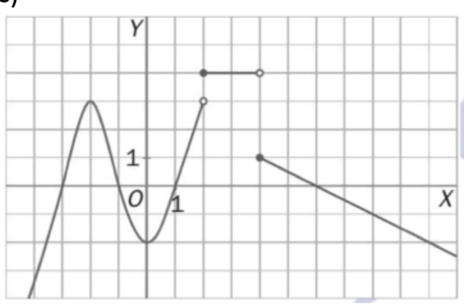
x	y
0	2
1	3
4	6
0	3

14. Indica si las siguientes relaciones son funciones:

Relación	**Si**	**No**	**Justificación**
a) La distancia entre 2 ciudades y el tiempo que tarda un tren en ir de una a otra.			
b) La duración de un partido de futbol y los goles que marcan.			
c) La edad de un árbol y el número de anillos de su tronco.			
d) El título de un libro y el número de páginas.			
e) La velocidad y el tiempo en recorrer un trayecto.			
f) La hora del día y la longitud de una sombra.			
g) El precio de la gasolina y el día del mes.			
h) Día del mes y precio de la gasolina.			
i) Un número y su cuadrado.			

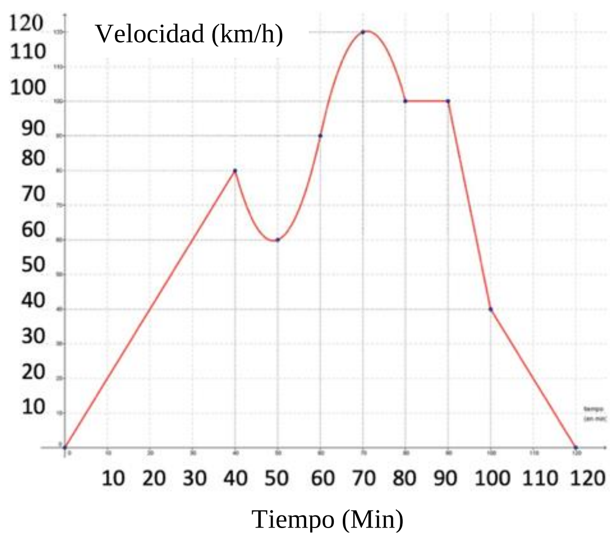
TEORÍA. Dominio y recorrido de una función

15. Calcula el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) 	Dominio= Recorrido=
b) 	Dominio= Recorrido=
c) 	Dominio= Recorrido=

TEORÍA. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos y absolutos.

16. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico... La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es una función la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

c) Dominio:

d) Recorrido:

e) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje?

f) ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?

g) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Ha sido constante en algún momento?_________

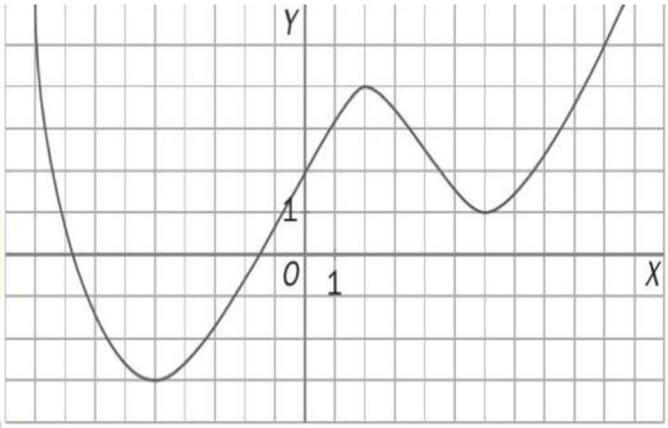
Crece: Decrece: Constante:

h) Indica cuales han sido los máximos y mínimos relativos y absolutos

Max. Relativos:________________________________ Min. Relativos ________________________________

Max. Absolutos:_______________________________ Min. Absolutos ________________________________

17. Estudia el crecimiento y los extremos relativos y absolutos de la siguiente función:



Crece:____

Decrece:______________________________________

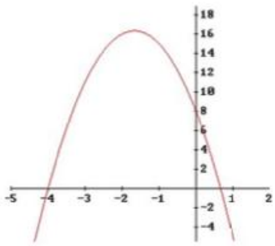
Max.Relativos:__________________________________

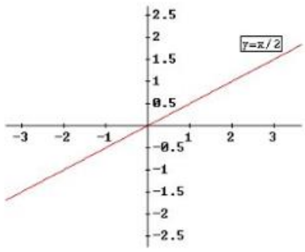
Min.Relativos:__________________________________

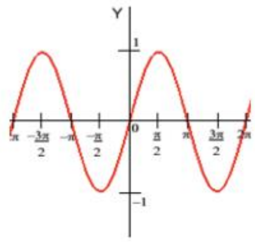
Max.Absolutos:_________________________________

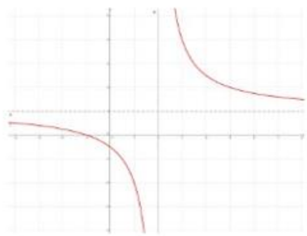
Min.Absolutos:_________________________________

18. Rodea aquella función que es siempre creciente hasta x=-2,

a) 

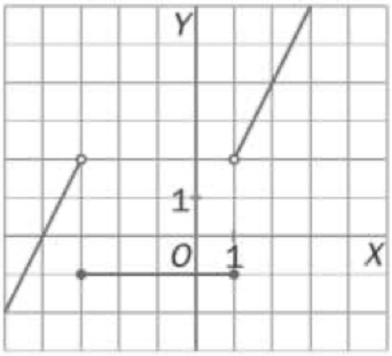
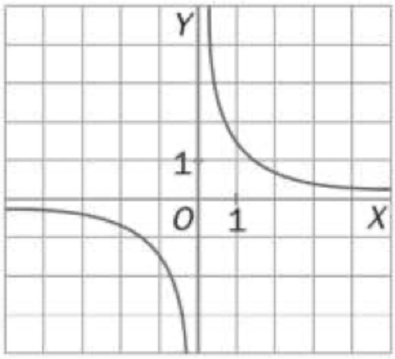
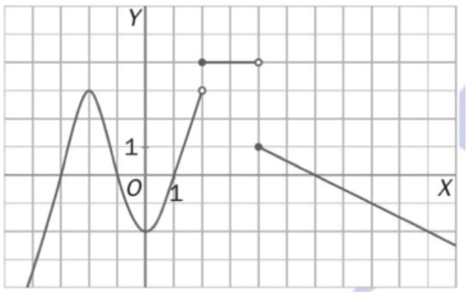
b) 

c) 

d) 

TEORÍA. Continuidad. Tipos de discontinuidades.

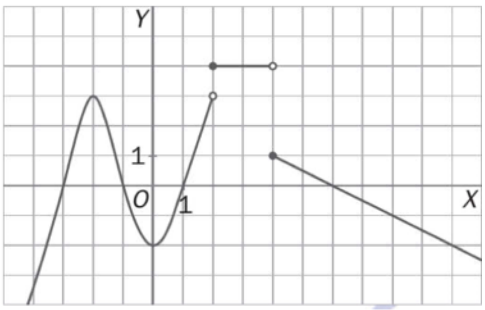
19. Estudia la continuidad y especifica los tipos de discontinuidades de estas funciones:

a) 	Discontinua en:
b) 	Discontinua en:
c) 	Discontinua en:

20. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años?. Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua?. Indica los puntos de discontinuidad y su tipo.

TEORÍA. Puntos de corte con los ejes.

21. Dada la siguiente gráfica, indica los puntos de corte con los ejes



Puntos de corte con OX →

Puntos de corte con OY →

22. Dibuja un eje de coordenadas y representa una función que corte al eje de ordenadas en (0,-3) y no corte al eje de abscisas.

23. ¿En cuántos puntos puede cortar la gráfica de una función al eje OY?. ¿Y al eje OX?

24. Dada la función $y=2x+1$, calcula sus puntos de corte con los ejes.

25. Dada la función $y=-3x+3$, calcula sus puntos de corte con los ejes.

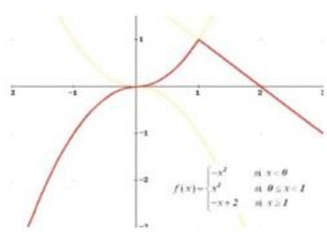
26. Dada la función $y=x^2-5x+6$, calcula sus puntos de corte con los ejes

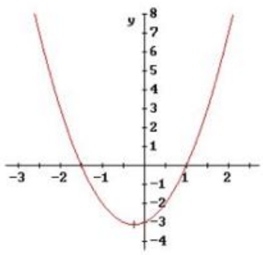
27. Dada la función $y=x^2-4x+3$, calcula sus puntos de corte con los ejes

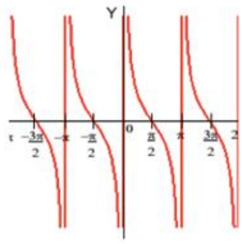
28. Dada la función $y=x^2-2x+1$, calcula sus puntos de corte con los ejes

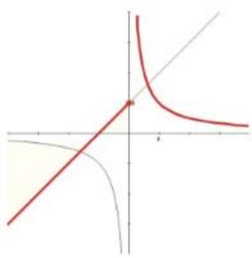
TEORÍA. Periodicidad. Simetría.

29. Rodea aquellas gráficas que correspondan a una función periódica:

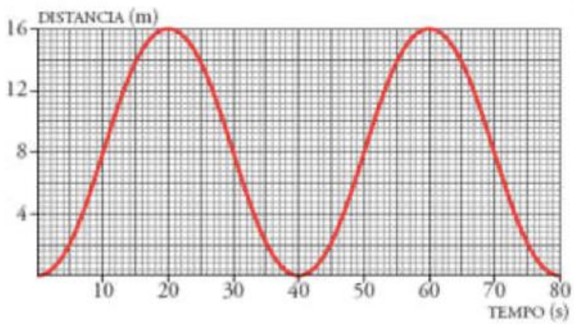
a) 

b) 

c) 

d) 

30. Los cestos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Esta es la representación gráfica de la función tiempo - distancia al suelo de un cesto.



a)¿Cuánto tarda en dar una vuelta completa?___________

b) Indica cuál es la altura máxima y cuál es el radio de la noria. ____

c) ¿Es esta una función periódica?_____________________

d) ¿Cuál es el período?______________________________

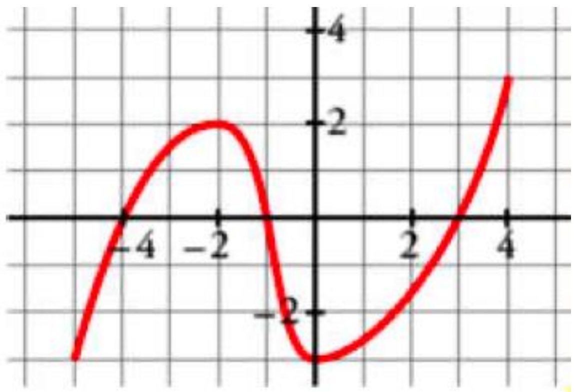
e) Calcula la altura a los 130 segundos sin necesidad de continuar la gráfica__________________________

31. Estudia la simetría (par/impar) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x^4$	b) $f(x)=x^3$	c) $f(x)=4$

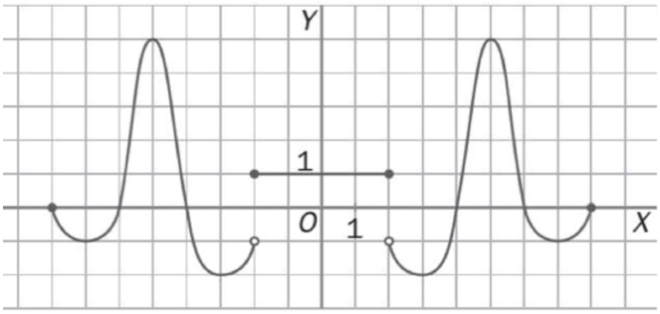
Estudio completo de las características de una función:

32. Estudiar de la siguiente función el dominio, recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y absolutos, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.



Dominio=
Recorrido=
Crecimiento=
Decrecimiento=
Máximos relativos=
Mínimos relativos=
Máximo absoluto=
Mínimo absoluto=
Continuidad→
Puntos de corte con los ejes→

33. Estudiar de la siguiente función el dominio, recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y absolutos, la continuidad, simetría y los puntos de corte con los ejes.



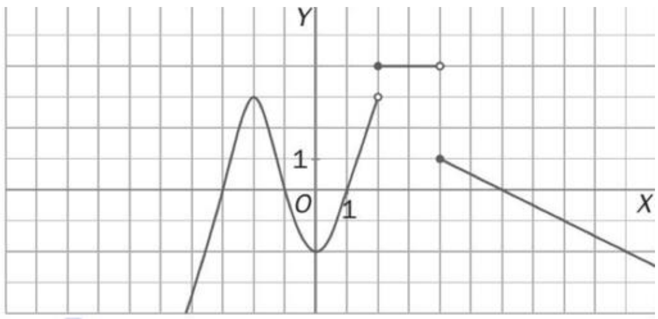
Dominio=
Recorrido=
Crecimiento=
Decrecimiento=
Máximos relativos=
Mínimos relativos=
Máximo absoluto=
Mínimo absoluto=

Discontinuidades→ ____

Simetría → ____

Puntos de corte con los ejes→ ____

34. Estudiar de la siguiente función el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y absolutos, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.



Dominio=
Crecimiento=
Decrecimiento=
Máximos relativos=
Mínimos relativos=
Máximo absoluto=
Mínimo absoluto=

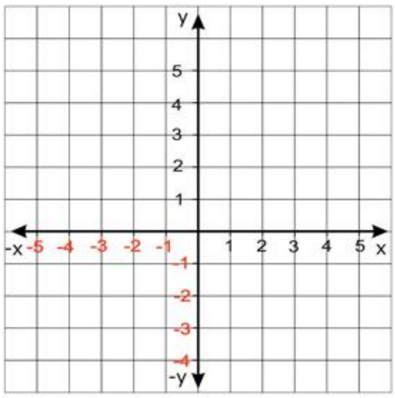
Discontinuidades→ ____

Puntos de corte con los ejes→ ____

TEORÍA. Formas de representar una gráfica.

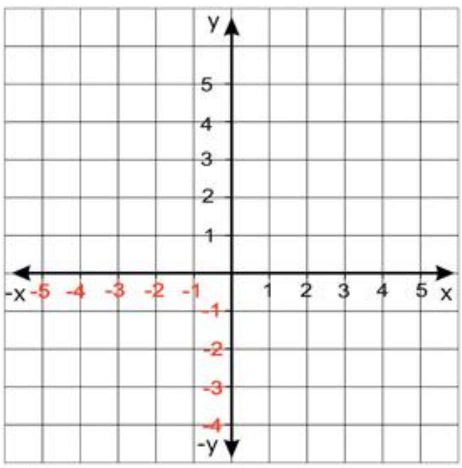
35. Dada la función f(x) = 2x-1, completa la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente:

x	y=f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



36. Dada la función f(x) = x^2-3, completa la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente:

x	y=f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



37. Dada las siguiente situación: "Este verano Juan fue en bicicleta a casa de sus abuelos que vivían en un pueblo cercano, a 35 kilómetros del suyo. A los 20 minutos había recorrido 10 km; en ese momento comenzó a ir más deprisa y tardó 15 minutos en recorrer los siguientes 15 km. Paró a descansar durante 10 minutos y, después, emprendió la marcha recorriendo los últimos 10 km en 15 minutos". Completa la tabla de valores y construye la gráfica asociada.

Tiempo (min)	**Distancia (km)**

38. La tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño durante los primeros meses de vida:

Tiempo (meses)	0	3	9	15	21	27	33
Perímetro (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.

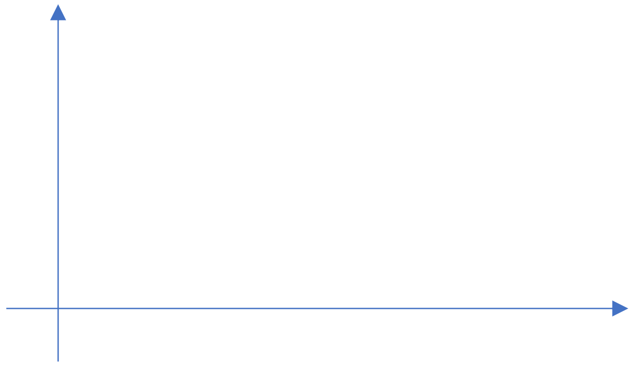
b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo de un niño?

c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años (36 meses)?

39. La distancia (d) recorrida por un tren depende del número de vueltas (n) que da cada rueda.
a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.

b) Completa la tabla y dibuja la gráfica que representa dicha función.

n	d
1	
2	
3	
4	
5	



c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma π = 3,14).

d) ¿Cuantas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?.

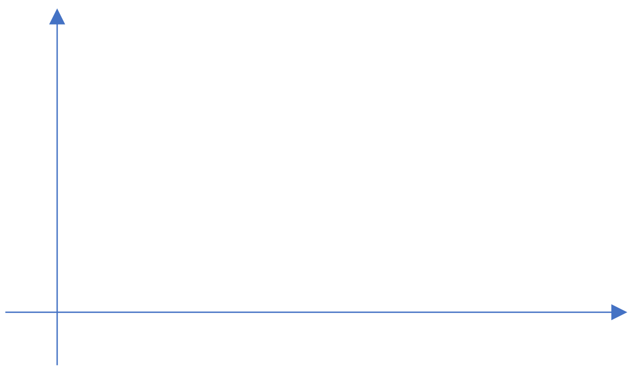
40. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9ºC. Determina:

a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?

b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?

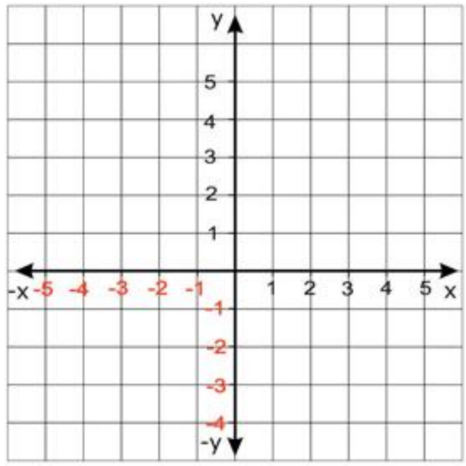
c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica.

A	T
180	
360	
540	
720	
900	

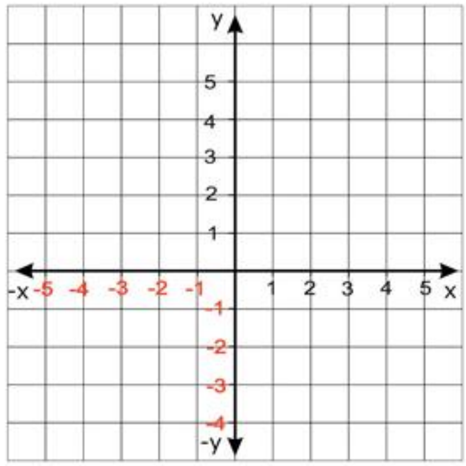


41. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama *"x"* a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de *"x"*. Dibuja su gráfica.

42. Representa una función que cumpla las siguientes características:
- Dominio: [-4,5]
- Pasa por los puntos (-4.0) y (2,0)
- Tiene un mínimo en (-2,-3) y un máximo en (4,4)
- Es continua.

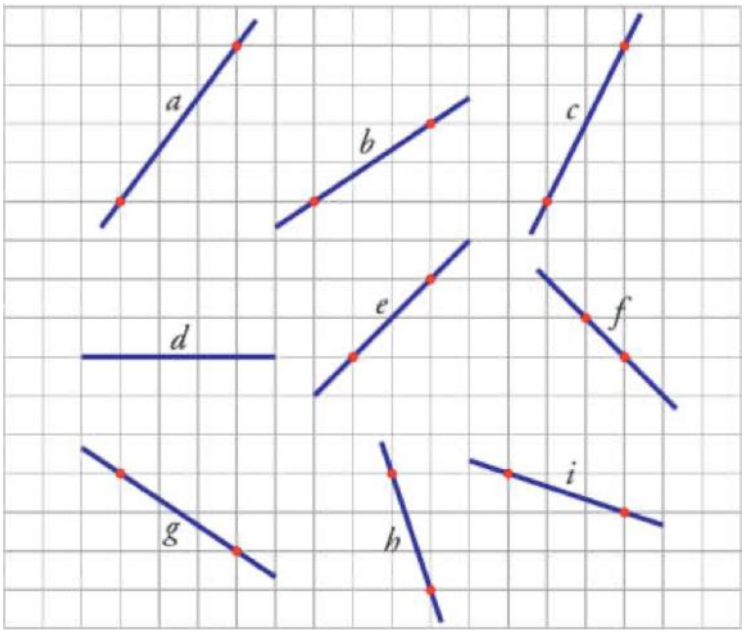


43. Representa una función que cumpla las siguientes características:
- Dominio: [-5,4]
- Pasa por los puntos (-3.0) y (0,3)
- Tiene un máximo en (-2,5) y (4,4)
- Es discontinua en x=1.



TEORÍA. Ecuación de una recta y=mx+n

44. Halla la pendiente de los siguientes segmentos:



a=

b=

c=

d=

e=

f=

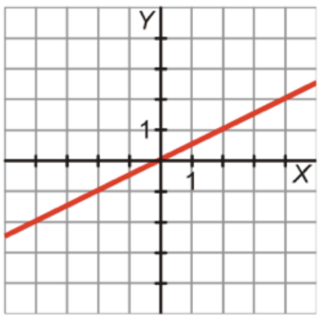
g=

h=

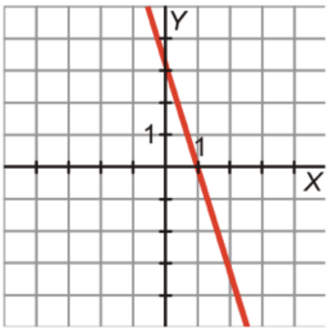
i=

45. Escribe la ecuación de estas rectas:

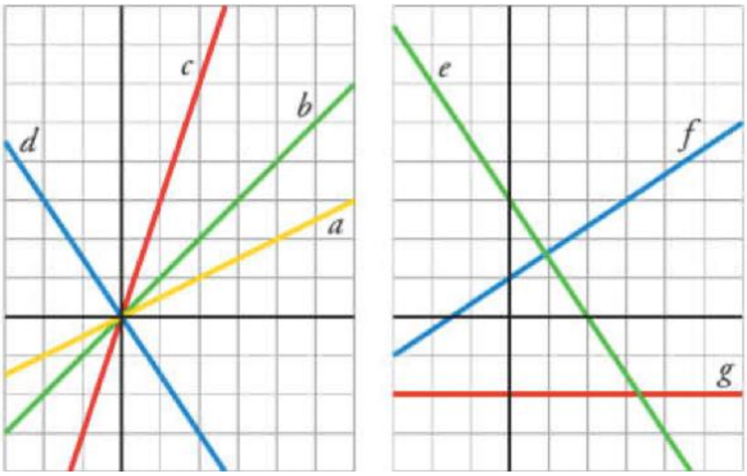
a)



b)



46. Escribe las ecuaciones de estas rectas:



a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

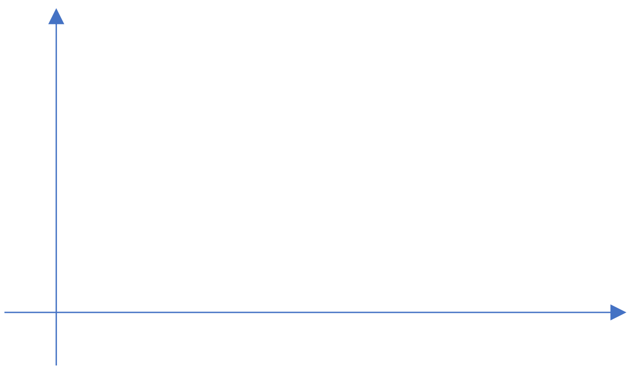
47. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2) y tiene pendiente m=3.

48. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto P(0,5) y tiene pendiente m=-2.

49. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B(3,4).

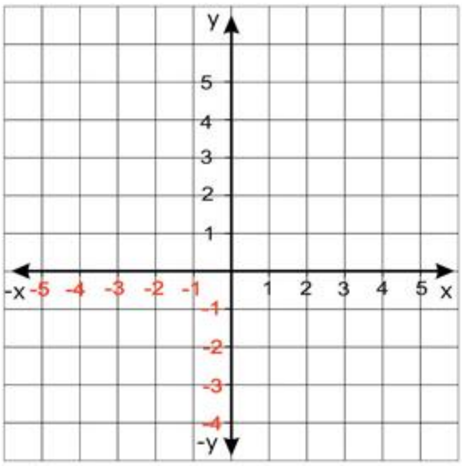
50. Una bolsa de patatas fritas cuesta 1´50€. Completa la tabla que relaciona el Número de Bolsas – Precio y represéntala gráficamente. Obtén la fórmula que relaciona el nº de bolas con el precio que cuestan.

NºBolsas	**Precio**
1	
2	
3	
4	
5	



TEORÍA. Representación de parábolas ($y=ax^2+bx+c$)

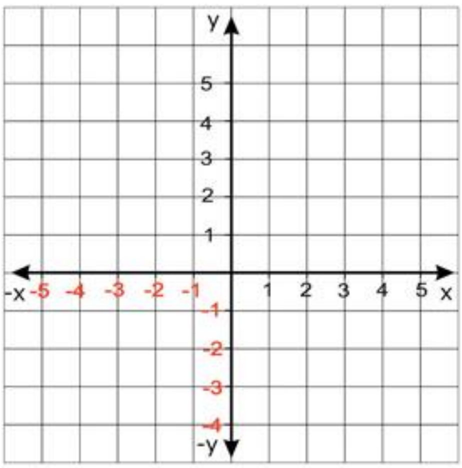
51. Dada la función $f(x) = x^2-2x+3$, completa la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente:
    (1) Vértice →
    (2) Puntos de corte →



(3) Tabla de valores

x	y=f(x)

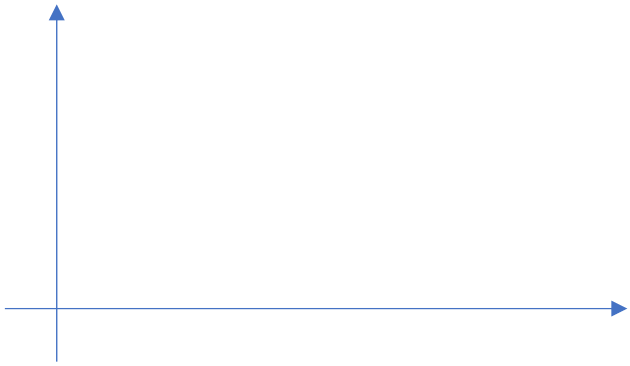
52. Dada la función $f(x) = \frac{1}{4}x^2+x$, completa la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente:
    (1) Vértice →
    (2) Puntos de corte →



(3) Tabla de valores

x	y=f(x)

53. El puente Golden Gate permite la comunicación entre los dos lados de la bahía de San Francisco. Sus torres, de 228 de altura, están separadas por una distancia de 1280 m aproximadamente. La calzada está sujeta a las torres mediante dos cables que tienen forma de parábola y que tocan la calzada en el centro del puente. Representa gráficamente la parábola marcando las coordenadas del punto inicial, del vértice y del punto final. Obtén la ecuación de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$, teniendo en cuenta esos 3 puntos.



54. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de altura 10 cm.
a) Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando el radio de la base.

b) Construye una tabla con los volúmenes (expresados en mililitros) correspondientes a los radios tomados de 2 en 2 cm y represéntala gráficamente.

c) Calcula de forma exacta qué radio deberá tener el vaso para que le quepa un decilitro.

UNIDAD 2. Probabilidad

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
A1. Conteo	- Técnicas de recuento
B1. Medición	- Probabilidad como medida asociada a la incertidumbre en exp. aleatorios.
B2. Estimación y relaciones	- Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.
E2. Incertidumbre	- Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.

1. Experimentos aleatorios y deterministas

- Experimento aleatorio: Es aquel cuyo resultado depende del azar.
Ejemplo: Cara o cruz al tirar una moneda.
- Experimento determinista: es un experimento en el que sabemos el resultado que va a salir.
Ejemplo: Soltar un lápiz y ver si cae.

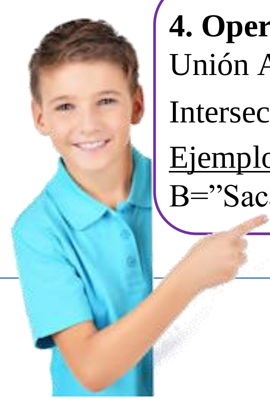
2. Espacio muestral. Sucesos.

- Suceso elemental: Cada uno de los resultados posibles de un Experimento Aleatorio.
- Espacio muestral o suceso seguro: Conjunto de todos los casos o sucesos elementales.
- Suceso compuesto: Subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo: Experimento "Lanzar un dado"
Sucesos elementales→{1},{2},{3},{4},{5},{6}
Espacio muestral → E={1,2,3,4,5,6}
Suceso compuesto → "Sacer un número par"

3. Diagrama de árbol.

Es una técnica que veremos en clase que facilita determinar el espacio muestral y facilita poder contar casos.



4. Operaciones con sucesos

Unión $A \cup B$: Se verifica cuando se cumple A ó B.

Intersección $A \cap B$: Cuando ocurren A y B a la vez.

Ejemplo: "Lanzar Dado", A="Sacar impar", B="Sacar >4", $A \cup B=\{1,3,5,6\}$, $A \cap B=\{5,6\}$

5. Frecuencias absolutas y relativas

Dado un experimento aleatorio, llamaremos:
- Frecuencia absoluta de un suceso al nº de veces que se ha obtenido un suceso.
- Frecuencia relativa es división entre la frec. absoluta y el nº de repeticiones del experimento.

Ejemplo: Lanzar una moneda 20 veces.

	Frec.Absoluta	Frec.Relativa
Caras	12	12/20
Cruces	8	8/20

6. Frecuencias y probabilidad. Regla Laplace.

- La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 que indica el grado de confianza que tenemos de que ocurra ese suceso.
- Ley de los grandes números. Si realizamos un experimento aleatorio muchas veces, la probabilidad coincide con la frecuencia relativa.

Cálculo de la probabilidad

- En experimentos irregulares (Ej: tirar chincheta), la probabilidad se calcula con la frec.relativa repitiendo muchas veces el experimento.
- En experimentos regulares (equiprobables – Ej:tirar dado, lanzar una moneda, …), se usa la Regla de Laplace: $P(A)=\frac{casos\ favorables\ de\ A}{casos\ posibles}$

7. Tablas de contingencia o de doble entrada.

Son tablas que resumen los datos de dos variables. Estas se dividen en filas y columnas en donde se almacena información en cada una de ellas.

Ejemplo de tabla de doble entrada:

Deporte\Estudiantes	Chicos	Chicas	TOTAL
Fútbol	15	3	18
Baloncesto	4	10	14
TOTAL	19	13	32

9. Técnicas de conteo (combinatoria)

Son técnicas que se utilizan para contar el nº total de casos. Veremos el principio multiplicativo, principio aditivo, permutaciones, variaciones y combinaciones.

8. Experimentos/probabilidad compuesta.

- Se llama experimentos compuestos a aquellos que están formados por 2 o más experimentos simples (que pueden ser independientes cuando el resultado no depende de los otros o dependientes cuando cada resultado influye en las probabilidades siguientes).
- En experimentos compuestos se suele utilizar el diagrama de árbol para obtener el conjunto de resultados posibles y la probabilidad de cada camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

Ejemplo: Urna con 3 bolas rojas y 2 blancas. Si sacamos una bola, la metemos y volvemos a sacar otra, ¿Probabilidad que sea 2 veces blanca?

$$P(BB)= 2/5 \cdot 2/5= 4/25$$

TEORÍA. Experimento aleatorio/determinista. Suceso elemental. Espacio muestral. Sucesos compuestos.

1. Marca con una cruz si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas:

Experimentos	Aleatorio	Determinista
a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz		
b) Lanzar una chincheta y ver de que lado cae		
c) Saber quién va a ganar la liga este año		
d) Este año empieza la liga en la misma fecha de siempre		
e) Soltar un objeto y ver si cae		
f) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto		
g) Si en una urna hay 5 bolas blancas y 3 rojas, sacamos una y anotamos el color.		
h) El precio de 0,5 kg de rosquillas si cuestan a 3 € el kilo.		
i) La superficie de las comunidades autónomas españolas		
j) Me tocará el gordo de Navidad		
k) El perímetro de un cuadrado del que se conoce el lado		
l) Tiramos 2 dados y anotamos la suma de los valores		
m) Mañana amanecerá		
n) Saber que día de la semana es mañana		
o) Mañana lloverá		

2. Dados los siguientes experimentos aleatorios indica cuál es su espacio muestral, un suceso elemental y un suceso compuesto:

Experimento	Espacio muestral	Suceso elemental	Suceso compuesto
a) Sacar una carta de la baraja española.			
b) Lanzar dos monedas para ver caras y cruces.			
c) Lanzar un dado con números del 1 al 6			
d) Lanzar 2 dados y sumar el resultado obtenido.			
e) Extraer dos bolas de una bolsa con 7 bolas blancas y 2 negras			

TEORÍA. Técnica de Diagrama de árbol.

3. Extraemos 2 bolas de una urna que tiene bolas rojas, azules y verdes. Determina el espacio muestral.

4. Lanzamos 3 monedas simultáneamente. Determina el espacio muestral (utiliza un diagrama de árbol).

TEORÍA. Operaciones con sucesos: unión e intersección.

5. Consideramos el experimento “Lanzar un dado” y los siguientes sucesos A=”Sacar impar”, B=”Sacar par”, C=”Sacar nºs >1”, D=”Sacar nºs <3”, E=”Sacar nºs >3”, calcula las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$ =	e) $B \cup E$ =
b) $A \cap B$ =	f) $B \cap E$ =
c) $A \cup C$ =	g) $C \cup D$ =
d) $A \cap C$ =	h) $B \cap E$ =

6. Consideramos el experimento “Lanzar un dado” y los siguientes sucesos A=”Sacar divisor de 6”, B=”Sacar divisor de 4”, C=”Sacar nºs >5”, D=”Sacar nºs <5”, E=”Sacar múltiplo de 2”, calcula las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$ =	e) $B \cup E$ =
b) $A \cap B$ =	f) $B \cap E$ =
c) $A \cup C$ =	g) $C \cup D$ =
d) $A \cap C$ =	h) $B \cap E$ =

TEORÍA. Frecuencias absolutas y relativas en un experimento aleatorio.

7. Tras lanzar un dado 20 veces hemos obtenido las siguientes tiradas: 6 4 3 2 2 1 5 5 6 4 3 2 5 1 2 3 5 2 6 1
Completa la tabla de frecuencias absolutas y relativas de todos los sucesos elementales del experimento:

Sucesos elementales	Frecuencias Absolutas (f_i)	Frecuencias Relativas (h_i)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Calcula la frecuencia absoluta de los siguientes sucesos:

Sucesos	Frecuencias Absolutas (f_i)
a) A="Sacar par"	f_A =
b) B="Sacar impar"	f_B =
c) C="Sacar nºs mayores que 2"	f_C =
d) D="Sacar nºs menores que 3"	f_D =

8. Tras tirar una moneda 10 veces, hemos obtenido: C C C X X C X C C X . Completa la tabla:

Sucesos elementales	Frecuencias Absolutas (f_i)	Frecuencias Relativas (h_i)
C		
X		

9. Vamos a realizar el experimento aleatorio de tirar muchas veces una moneda para ver si se obtiene cara o cruz. Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos en clase:

Nº Lanzamientos de moneda	Nº Caras Frecuencia Absoluta (f_i)	Frecuencias Relativas (h_i)
10		
50		
100		
200		
400		

Viendo la frecuencia relativa obtenida, ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?:_____________

10. Vamos a realizar el experimento aleatorio de tirar muchas veces una chincheta para ver si cae de lado o hacia arriba. Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos en clase:

Nº Lanzamientos de chincheta	Nº veces cae de lado Frecuencia Absoluta (f_i)	Frecuencias Relativas (h_i)
10		
50		
100		
200		
400		
800		

Viendo la frecuencia relativa obtenida, ¿Cuál es la probabilidad de caer de lado?:_____________

11. Imagina que tras realizar muchas veces el experimento de lanzar una moneda obtenemos que la frecuencia relativa de sacar cruz se aproxima a 0'15. ¿Qué podemos afirmar acerca de la moneda?

Cálculo de probabilidades utilizando la Regla de Laplace para experimentos equiprobables:

TEORÍA. Regla de Laplace.

12. Dado el experimento aleatorio "Sacar una carta de la baraja española", calcula la probabilidad de los siguiente sucesos:

A="Sacar una figura"	P(A)=	E="Sacar oros o espadas"	P(E)=
B="Sacar una carta impar"	P(B)=	F="Sacar el rey de bastos"	P(F)=
C="Sacar una de espadas"	P(C)=	G="Sacar una de oros par"	P(G)=
D="Sacar una de oros"	P(D)=	H="Sacar figura de bastos"	P(H)=

13. Si en una bolsa de 50 caramelos tenemos 15 de fresa, 25 de naranja y 10 de limón ¿Cuál es la probabilidad de escoger un caramelo de cada uno de los posibles sabores?.

P(Fresa)= P(Naranja)= P(Limón)=

14. Tenemos una urna con 10 bolas rojas, 7 azules y 3 verdes. Si sacamos una bola, ¿Cuál es la probabilidad de que salga roja?. ¿Y azul?.

15. Si tiramos un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un nº < 5?.¿Y la de sacar un divisor de 4?.

16. Si tiramos dos dados a la vez y consideramos el experimento aleatorio “Suma de los 2 dados”. Completa la siguiente tabla que resume los posibles resultados de dicho experimento:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀						
⚁						
⚂						
⚃						
⚄						
⚅						

a) Calcula la probabilidad de que la suma sea 8.

b) Calcula la probabilidad de que la suma sea 12.

c) Calcula la probabilidad de que la suma sea un número par.

TEORÍA. Tablas de contingencia o de doble entrada.

17. En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés y 12 de ellos hablan los dos idiomas.

a) Completa la siguiente tabla de contingencia:

	Hablan francés	No hablan francés	Totales
Hablan inglés			
No hablan inglés			
Totales			120

A partir de la tabla anterior responde las siguientes cuestiones:

b) Si escogemos una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que hable los dos idiomas?

c) Si escogemos una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de no hable ni inglés ni francés?

d) Si escogemos una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sólo hable francés?

18. En el instituto hay 400 alumnos de los que 200 son chicos y 200 son chicas. Hay 50 chicos con gafas y 40 chicas con gafas.

a) Representa la situación mediante una tabla de contingencia.

			Totales
Totales			400

b) Si elegimos un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico sin gafas?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que si escogemos un alumno al azar tenga gafas?

19. Hoy televisan 3 partidos a la misma hora. Uno de futbol, otro de voleibol y otro de tenis. De los 30 alumnos que hay en clase, 18 prefieren futbol y 5 tenis. Hay 12 chicos que quieren ver futbol, 3 chicas que quieren ver voleibol y 2 chicas que quieren ver tenis.

a) Representa la situación mediante una tabla de contingencia.

				Totales
Totales				30

b) Si elegimos un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico?.

c) Si elegimos un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que no quiera ver el voleibol?.

d) Si elegimos un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica que quiere ver futbol?.

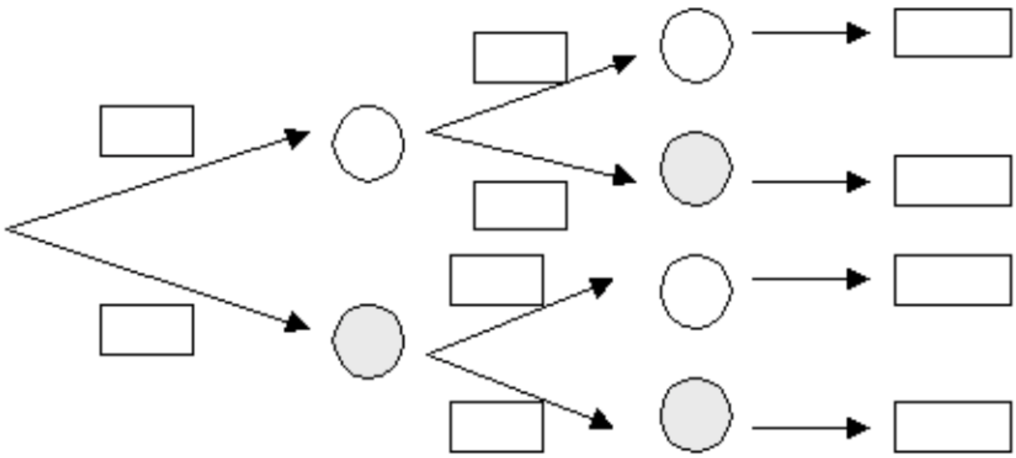
e) Si elegimos un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que no quiera ver el tenis?.

TEORÍA. Experiencias compuestas.

20. Supongamos que tenemos una urna con 3 bolas blancas y 5 negras. Consideremos el experimento "Extraer 2 bolas seguidas con devolución (devolvemos la 1ª bola antes de sacar la segunda)".

a) ¿Es un experimento compuesto?. Y si es así, ¿los dos experimentos simples que lo componen son independientes?.

b) Completa el siguiente diagrama de árbol con las probabilidades que corresponden a cada rama:



c) Mirando el árbol anterior responde:

Probabilidad de que salgan 2 negras:____

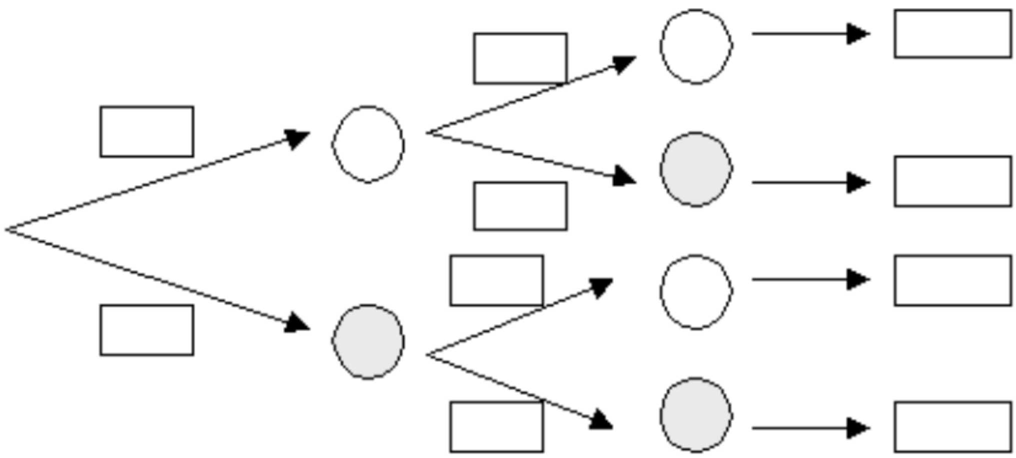
Probabilidad de que salgan 2 blancas:____

Probabilidad de que sacar 1 blanca y 1 negra:____

21. Supongamos que tenemos una urna con 3 bolas blancas y 5 negras. Consideremos el experimento "Extraer 2 bolas seguidas sin devolución (no devolvemos la 1ª bola antes de sacar la segunda)".

a) ¿Es un experimento compuesto?. Y si es así, ¿los dos experimentos simples que lo componen son independientes?.

b) Completa el siguiente diagrama de árbol con las probabilidades que corresponden a cada rama:



c) Mirando el árbol anterior responde:

Probabilidad de que salgan 2 negras:____

Probabilidad de que salgan 2 blancas:____

Probabilidad de que sacar 1 blanca y 1 negra:_______________________________________

22. Consideremos el experimento aleatorio "Tirar 2 veces una moneda". Representa mediante un diagrama de árbol las posibles soluciones del experimento:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cruz?.

23. Consideramos el experimento aleatorio “Tirar un dado 2 veces”. Representa mediante un diagrama de árbol las posibles soluciones del experimento:

a) Probabilidad de “sacar algún 1”.

b) La suma de los dígitos es 8.

c) No sacar ningún 2.

24. Una urna contiene 3 bolas rojas y 4 azules. Se sacan tres bolas. Calcula la probabilidad de que las tres bolas sean del mismo color:

a) Sacando las bolas en una sola extracción.

b) Sacando las bolas de una en una y devolviendo cada vez la bola a la urna.

25. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas con reemplazo (con devolución). Establece el diagrama de árbol correspondiente con las probabilidades de cada rama:

Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean negras.

b) Haya al menos una negra.

c) Ninguna sea negra.

26. En una urna hay 8 bolas blancas y 10 bolas negras. Se sacan dos bolas sin reemplazo (sin devolución). Establece el diagrama de árbol correspondiente con las probabilidades de cada rama:

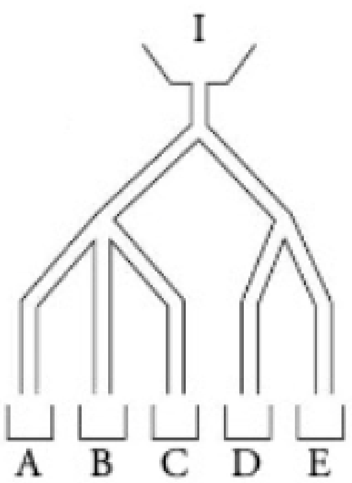
Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean negras.

b) Haya al menos una negra.

c) Ninguna sea negra.

27. Dejamos caer una bola por los siguientes embudos. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en cada casilla, suponiendo que en cada bifurcación la bola tiene la misma probabilidad de ir a cada rama?.



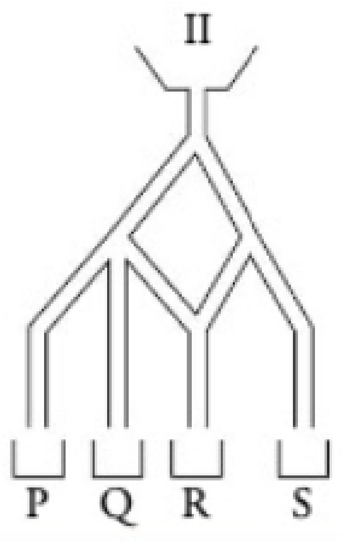
P(A)=

P(B)=

P(C)=

P(D)=

P(E)=

	P(P)= P(Q)= P(R)= P(S)=

28. Se considera el experimento aleatorio "Sacar dos cartas de la baraja española". Calcula:

a) Probabilidad de sacar dos reyes.

b) Probabilidad de sacar las dos de bastos.

c) Probabilidad de sacar la primera de espadas y la segunda de bastos.

d) Probabilidad de no obtener ningún basto.

29. Se considera el experimento aleatorio "tirar una moneda tres veces". Completa el diagrama de árbol que representa las posibles soluciones de este experimento:

a) Probabilidad de sacar cara en la primera tirada.

b) Probabilidad de sacar cara en la segunda tirada.

c) Sacar cara en la tercera tirada.

d) Sacar tres caras.

e) No sacar ninguna cara.

30. ¿Qué es más probable al tirar 2 dados, que salga un 5 en uno de ellos ó que la suma de sus puntuaciones sea mayor que 7?

31. Supongamos que tenemos una moneda y una ruleta de colores (2 sectores rojos, 3 verdes, 2 amarillos y 1 azul).

a) Representa el espacio muestral mediante un diagrama de árbol.

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara y rojo en la ruleta?

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cruz y verde o rojo en la ruleta?

Ejercicios de ampliación:

32. El Melchor Club de futbol tiene un jugador estrella llamado Rodrigo. Se sabe que la probabilidad de que Rodrigo juegue un partido es del 80%. El equipo tiene una probabilidad del 90% de ganar un partido cuando juega Rodrigo y del 60% cuando no lo hace.

a) Represente la situación con un diagrama de árbol.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que juegue Rodrigo y ganen el partido?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no juegue Rodrigo y ganen el partido?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el Melchor Club de futbol gane un partido cualquiera?

33. El 80% de los usuarios de una red social comparte fotografías mientras que el resto no lo hace. De los usuarios que comparten fotografías el 90% ha comentado alguna vez una de las fotografías. De los que no comparten fotografías el 50% ha comentado alguna vez una de las fotografías de sus contactos.

a) Representa la situación con un diagrama de árbol.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario comparta fotografías y haya comentado alguna vez alguna?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no comparta fotografías y pero sí que haya comentado alguna?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario haya comentado una fotografía en alguna ocasión?

34. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias del Hospital de Hellín un 90% de pacientes leves y un 10% de pacientes graves. El 20% de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que un 60% de los pacientes graves deben ingresar en el hospital.
a) Representa la situación con un diagrama de árbol.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente sea leve y haya ingresado en el hospital?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente sea grave y no ingrese en el hospital?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente cualquiera de urgencias ingrese en el hospital?

Técnicas de conteo

1. Principio multiplicativo

Si un suceso **E** puede ocurrir de **m** formas, e independiente de este suceso un suceso **F** puede ocurrir de **n** formas, entonces los sucesos juntos pueden ocurrir un total de **m x n** formas.

35. En restaurante, el menú tiene 4 entrantes, 5 primeros y 3 segundos. ¿De cuántas formas podemos elegir un menú distinto?

36. Si tengo dos camisas, cinco pantalones y cuatro corbatas. ¿De cuántas maneras distintas puedo combinar una camisa, un pantalón y una corbata?

37. Vamos a un bar a tomar un refresco. El camarero nos dice que tiene dos tamaños de vaso (grande y pequeño) y para cada vaso cuatro tipos de refresco. ¿De cuántas maneras los podemos combinar?.

2. Principio aditivo

Si un suceso tiene varias formas alternativas de llevarse a cabo (cada forma con opciones distintas) , entonces el número total de formas de llevarse a cabo es su suma.

Ejemplo: Hay 2 tipos de motos. La moto A puede ser roja o blanca y con 3 tipos de asientos. La moto B puede ser azul, roja o amarilla y con un solo tipo de asiento. ¿De cuántas maneras podemos escoger una moto?

La moto A de 2x3= 6 formas. La moto B de 3x1= 3 formas. En total se puede escoger una moto de 9 formas

38. En el supermercado hay 3 tipos de chocolate. Un chocolate A que puede ser de 3 sabores y además puede ser con o sin azúcar. Un chocolate B que puede ser de 2 sabores, puede tener o no avellanas y puede ser con o sin azúcar. Un chocolate C que puede tener 4 sabores y es siempre con azúcar. ¿De cuántas maneras distintas puedo escoger un chocolate?.

39. Me quiero comprar un automóvil entre dos marcas. La marca A tiene 2 modelos y 3 colores, la marca B tiene 4 modelos y 5 colores disponibles. ¿De cuántas maneras posibles puedo elegir el automóvil?

40. Mario se quiere comprar una raqueta de tenis. Tiene tres marcas a elegir: Wilson, Babolat o Head. Cuando va a la tienda ve que la raqueta Wilson tiene 4 modelos distintos, 2 tipos de mango y puede ser encordada o sin encordar. La raqueta Babolat, en cambio, tiene 2 modelos distintos, 3 tipos de mangos y puede también ser encordada o sin encordar. La raqueta Head, por su parte, tiene 2 modelos con un solo mango y solo sin encordar. La pregunta es: ¿Cuántas formas tiene Mario de comprar su raqueta?

3. Permutación simple o regla del factorial (importa el orden)

Nombre de la técnica de conteo:

¿Importa el orden? ______ Fórmula:

Llamaremos factorial de un número n a $n!=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1$.

Si tenemos **n** elementos distintos los podemos colocar de n! maneras distintas. Es decir, el primer elemento se puede colocar de n maneras distintas, el segundo de n-1 maneras y así sucesivamente.

Ejemplo: De cuantas maneras se pueden sentar 3 amigos en 3 sillas.

El primero se puede colocar en 3 sitios, el segundo en uno de los 2 sitios que quedan y el tercero sólo en el sitio que quede libre. En total $3!= 3\cdot2\cdot1 = 6$ maneras distintas.

41. ¿De cuantas formas distintas podemos colocar las letras A, B, C, D, E y F?

42. ¿Cuántos números distintos podemos formar con los números 1, 2, 3 y 4 sin que se repita ningún número?

43. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 8 personas en 8 butacas del cine?

4. Permutación o variación de n elementos tomados de r en r (importa el orden)

Nombre de la técnica de conteo:

¿Importa el orden? ______ Fórmula:

Si tenemos **n** elementos distintos y los queremos colocar en grupos de **r** elementos. Entoces nPr=$\frac{n!}{(n-r)!}$

Ejemplo: De cuantas maneras se pueden sentar 10 amigos en 5 sillas.

${}_{10}P_5=\frac{10!}{(10-5)!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdots2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$ maneras

44. A un concurso se ha presentado 10 alumnos y se van a repartir 3 premios diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden repartir?

45. ¿Cuántas palabras de 3 letras podemos formar con las letras de la palabra MATES?.

46. ¿De cuántos partidos consta una liguilla formada por 4 equipos?. Ten en cuenta que queremos ver cuantas parejas distintas podemos formar importando el orden ya que AB indica que A juega en casa y es distinto de BA que indica que B juega en casa.

5. Permutación de n elementos distintos tomados de r en r permitiendo la repetición (importa el orden)

Nombre de la técnica de conteo:

¿Importa el orden? ______   Fórmula:

Si tenemos **n** elementos distintos que se pueden repetir y los queremos colocar en grupos de **r** elementos. Entoces $nPRr=n^r$

Ejemplo: ¿Cuántos números de 3 cifras podemos formar con los números 1, 2, 3, 4 (se permite repetición 111, 112, …)? $_4PR_3=4^3=$ 64 números

47. ¿Cuántos números de 3 dígitos podemos formar con los 6 primeros números naturales teniendo en cuenta que se pueden repetir?.

48. ¿Cuántas columnas distintas podemos hacer en una quiniela?. Ten en cuenta que cada quiniela tiene 15 resultados con valores que se repiten entre 1, X ó 2.

6. Permutación con repetición con varios elementos repetidos (importa el orden)

Nombre de la técnica de conteo:

¿Importa el orden? ______   Fórmula:

Si tenemos **n** elementos, pero en este caso hay “h” repetidos de un tipo, “j” repetidos de otro tipo y “k” repetidos de otro tipo. Entonces $nP_{h,j,k}=\frac{n!}{h!\cdot j!\cdot k!}$

Ejemplo: En un barco se pueden izar 3 banderas rojas, 2 amarillas y 5 verdes. ¿Cuántas señales diferentes se podrían hacer izando las 10 banderas que se tienen? $_{10}P_{3,2,5}=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!}=$ 2520 banderas diferentes.

49. Con las cifras 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, ¿Cuántos números de 9 cifras podemos construir?.

50. ¿Cuántos palabras distintas podemos formar permutando las letras de la palabra MAMÁ?.

51. ¿Cuántos palabras distintas podemos formar permutando las letras de la palabra BANANA?.

52. En una urna, hay 5 bolas del mismo tamaño y peso, de los cuales, 3 son rojas y 2 son azules. ¿De cuántas maneras se pueden extraer una a una las bolas de la urna?.

7. Combinaciones de n elementos tomados de r en r (no importa el orden)

Nombre de la técnica de conteo:

¿Importa el orden? _______ Fórmula:

La diferencia entre combinaciones y permutaciones es que en las combinaciones no importa el orden (es decir, por ejemplo ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA son todos el mismo caso).

Si tenemos **n** elementos distintos y los queremos colocar en grupos de **r** elementos sin que importe el orden, entoces nCr = $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$

<u>Ejemplo</u>: Para hacer la limpieza del patio, con 10 alumnos, ¿Cuántas parejas distintas podemos hacer?.

No importa el orden al formar parejas, ${}_{10}C_2 = \frac{10!}{(10-2)!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdots 2\cdot 1}{8\cdot 7\cdots 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}$ = 180 parejas distintas.

53. Tengo 6 cromos. ¿Cuántas parejas distintas puedo formar con ellos?

54. En una fiesta hay 6 estudiantes y quieren hacer grupos de 3 personas. ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse?.

8. Combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r (no importa el orden)

Nombre de la técnica de conteo:

¿Importa el orden? _______ Fórmula:

Si tenemos **n** elementos distintos y los queremos colocar en grupos de **r** elementos permitiendo la repetición sin que importe el orden, entoces nCRr = $\binom{n+r-1}{r} = \frac{n+r-1!}{(n-1)!\cdot r!}$

55. En una bodega hay 4 tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 de ellas permitiendo que se repitan en la elección?

<u>Tabla resumen de las principales técnicas de conteo.</u>

Técnica de conteo	¿Importa el orden?	Explicación	Fórmula
Permutación de n elementos			
Permutación de n elementos tomados de r en r			
Permutación de n elementos tomados de r en r <u>permitiendo la repetición</u>			
Permutación de n elementos entre los que hay varios repetidos de cada tipo			
Combinación			
Combinación con repetición			

UNIDAD 3. Estadística

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
E1. Organización y análisis de datos	- Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana. - Gráficos estadísticos: representación mediante distintas tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, …) y elección del más adecuado para obtener conclusiones. - Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico. - Variabilidad: interpretación y cálculo de medidas de dispersión en sit. reales. - Comparación de dos conjuntos de datos con medidas de localización y dispersión.
E3. Inferencia	- Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones. - Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.

Resumen del tema:

1. Población, muestra e individuo.

- Población: Conjunto de todos los elementos que se estudian.
- Muestra: Subconjunto de la población elegido para realizar el estudio estadístico.
- Individuo: Cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

¿Cuándo coger muestra en vez de población?
En poblaciones muy numerosas, poblaciones difíciles de controlar (Ej: personas de un aeropuerto) y cuando el proceso es muy caro.

¿Cómo seleccionar una muestra?
Se debe escoger la muestra aleatoriamente (al azar) de forma que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos.

Tipos de muestras aleatorias:
- Muestra aleatoria simple: se van sacando individuos al azar.
- Muestra aleatoria sistemática: Se ordena la muestra, se saca un individuo al azar y el resto se van sacando mediante saltos iguales.
- Muestra aleatoria estratificada: se divide la muestra en grupos homogéneos llamados estratos (Ej: estratos por edad) y se saca una muestra aleatoria simple de cada estrato.

Cuando una muestra tiene tamaño adecuado y es aleatoria se dice que es representativa.

2. Variables estadísticas. Tipos.

Una variable es una característica que se quiere estudiar. Las clasificamos en 3 tipos:
- Cualitativas: no toman valores numéricos (Ej: color de ojos)
- Cuantitativas discretas: toman valores numéricos aislados (Ej: Número de hijos)
- Cuantitativas continuas: toman valores numéricos en un intervalo (Ej: Altura)

3. Fases de un estudio estadístico. Hay 6 fases:
1. Saber qué queremos estudiar.
2. Selección de las variables a estudiar.
3. Recogida de los datos.
4. Organización de los datos en tablas.
5. Representación y tratamiento de los datos.
6. Interpretación y análisis.

4. Tabla de frecuencias absolutas y relativas

Los datos recogidos de cada variable se recuentan y se representan en tablas de frecuencias.
- Frecuencia absoluta nº de veces de cada dato
- Frecuencia relativa es división entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra.

Ejemplo: Nº TV en cada casa

Muestra: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3

Variable(X)	Frec.Absoluta(f_i)	Frec.Relativa(h_i)
1	2	2/10
2	5	5/10
3	3	3/10

5. Medidas centrales. Nos indican un valor central en torno al que se distribuyen los datos

<u>Media aritmética</u>:La media o promedio es la suma de los datos divida entre el nº de datos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

<u>Cálculo de la media en tabla de frecuencias:</u>

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
x_1	f_1	
x_2	f_2	
…	…	
x_n	f_n	

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{n}$$

<u>Mediana</u>: Es el valor que deja el 50% de los datos por debajo de él.

<u>Cuartiles</u>:Q_1, Q_2, Q_3 son los valores que dejan el 25%, 50% y 75% respectivamente por debajo de él.

<u>Moda</u>: Es el dato que más se repite.

6. Medidas de dispersión. Nos indican la separación de los datos en torno a la media.

<u>Rango o Recorrido</u>: Diferencia entre el dato mayor y el dato menor.

<u>Varianza</u>: Es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$var(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Se puede calcular de forma más corta:

$$var(x) = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}{n} - \bar{x}^2$$

<u>Cálculo de varianza en tabla de frecuencias:</u>

x_i	f_i	$x_i^2 \cdot f_i$
x_1	f_1	
x_2	f_2	
…	…	
x_n	f_n	

Var(x)= $\frac{{x_1}^2 \cdot f_1 + {x_2}^2 \cdot f_2 + \ldots + {x_n}^2 \cdot f_n}{n} - \bar{x}^2$

<u>Desviación típica</u>: Raiz cuadrada de la varianza. $\sigma = \sqrt{var(x)}$

<u>Coeficiente de variación</u>: CV=$\frac{\sigma}{\bar{x}}$, para comparar dispersión entre muestras distintas.

7. Gráficos estadísticos.

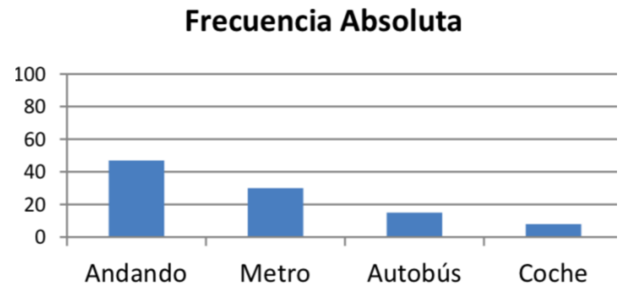
Vamos a estudiar 3 tipos de representaciones de tablas de frecuencias:

1. <u>Diagrama de rectángulos.</u>

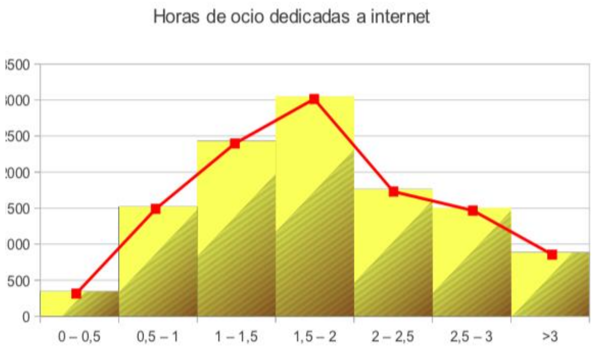
Para variables cualitativas o cuantitativas discretas se llama <u>Diagrama de Barras</u>. Para cuantitativas continuas se llama <u>Histograma</u>.

En el eje horizontal se representan los valores de la variable y el eje vertical las frecuencias.

Ejemplo: Diagrama de barras de una muestra sobre formas de transporte de estudiantes

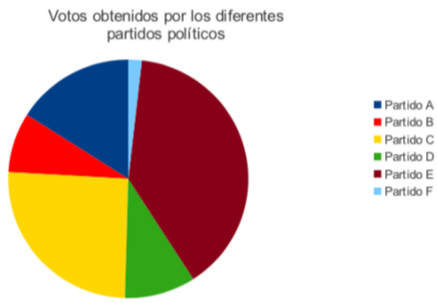


2. <u>Polígono de frecuencias</u> (diagrama de líneas). Se utiliza para variables cuantitativas discretas y continuas con el fin averiguar la tendencia. Se construye uniendo lo puntos medios de las barras de diagramas de barras o histogramas.



3. <u>Diagrama de sectores</u>

Se representan sectores circulares cuyo ángulo es proporcional a la frecuencia absoluta.



TEORÍA. Población. Muestra. Tipos de muestras aleatorias.

1. Se quiere hacer un estudio sobre hábitos alimenticios de los estudiantes de 3º de ESO de todo Hellín. Pero como es muy costoso entrevistar a todos los estudiantes se decide entrevistar a los alumnos de 1º de ESO del IES Melchor de Macanaz. Indica:

a) ¿Cuál es la población?: ____

b) ¿Cuál es la muestra?: ____

c) ¿Quiénes son los individuos?: ______________________________________

2. Queremos hacer un estudio de la cantidad de monedas que llevan en el bolsillo los estudiantes de tu clase. Pero para no preguntar a todos elegimos 10 compañeros al azar y anotamos cuántas monedas lleva cada uno. Indica:

a) ¿Cuál es la población?: ____

b) ¿Cuál es la muestra?: ____

c) ¿Quiénes son los individuos que no pertenecen a la muestra?: ____________________

____

3. Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra justificando tu respuesta

   a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
   b) La altura de un grupo de seis amigos.

4. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "*La nota media de los alumnos de 3º ESO es de* 7'9". ¿Como se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población?.
Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las alumnas, ¿seria representativo su valor?

5. Indica cuáles de las siguientes situaciones te parecen muestras aleatorias y cuáles no:

Experimento	¿Es una muestra aleatoria? Si/No
a) Para saber el nº de televisiones que tienen los hellineros en casa preguntamos en la puerta de un supermercado.	
b) Para saber lo que ganan de media los hellineros nos ponemos a preguntar en el mercado de Hellín de los miércoles.	
c) Para saber los gustos musicales de los hellineros le preguntas a 5 de tus amigos.	
d) Para saber el peso medio de los habitantes de Hellín nos ponemos a preguntar en la puerta de un gimnasio.	
e) Para saber la intención de voto en las próximas elecciones nos ponemos a preguntar en la puerta de la sede un partido político.	

TEORÍA. Tipos de variables.

6. Indica si estas variables son cualitativas, cuantitativas discretas o cuantitativas continuas:

Variables	**Tipo de variable**
a) Color de ojos	
b) Altura	
c) Peso	
d) Número de televisiones en casa	
e) Edad	
f) Tipo de película (romántica, comedia, …)	
g) Número frutas que comes a la semana	
h) Número de asignaturas aprobadas	

i) Tu cantante preferido	
j) Tiempo en llegar al instituto	
k) Lugar donde vives	
l) Número de hermanos	
m) Marcas de chocolate que conoces	
n) Número de chucherías que llevas encima	
o) Tu color favorito	
p) La simpatía	
q) Distancia que recorres para venir al instituto	
r) Dinero que llevas encima	

7. Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números:

2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2

Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos de dicha muestra:

Variable (X)	**Frec.Absoluta (f_i)**	**Frec.Relativa (h_i)**	**Porcentajes**
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
Suma Total→			

8. Vamos a estudiar el color de pelo de los alumnos de 3º de ESO. Para ello tomamos la siguiente muestra:

CASTAÑO, CASTAÑO, CASTAÑO, CASTAÑO, CASTAÑO, NEGRO, NEGRO,
RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO

Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos de dicha muestra:

Variable (X)	**Frec.Absoluta (f_i)**	**Frec.Relativa (h_i)**	**Porcentaje (%)**
CASTAÑO			
NEGRO			
RUBIO			
Suma Total→			

9. En una fábrica se realiza un estudio sobre el espesor, en *mm*, de un cierto tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona una muestra de tamaño *n* = 25, obteniendo los siguientes valores:

7’8, 8’2, 7’6, 10’5, 7’4, 8’3, 9’2, 11’3, 7’1, 8’5, 10’2, 9’3, 9’9,

8’7, 8’6, 7’2, 9’9, 8’6, 10’9, 7’9, 11’1, 8’8, 9’2, 8’1, 10’5

Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos de dicha muestra:

Variable (X)	**Marca de clase (m_i)**	**Frec.Absoluta (f_i)**	**F_i acumuladas**	**Frec.Relativa (h_i)**	**H_i acumuladas**
(7,8]					
(8,9]					
(9,10]					
(11,12]					
(12,13]					
Suma Total→					

10. Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2019 se recogen en la siguiente tabla:

2’03	1’96	1’91	2’11	1’91	1’93	2’08	1’99	1’90	2’16	2’06	2’03

Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos de dicha muestra:

Variable (X)	**Marca de clase (m_i)**	**Frec.Absoluta (f_i)**	**f_i acumuladas**	**Frec.Relativa (h_i)**	**h_i acumuladas**
(1´895, 1´945]					
(1´945, 1´995]					
(1´995, 2´045]					
(2´045, 2´095]					
(2´095, 2´145]					
(2´145, 2´195]					
Suma Total→					

TEORÍA. Medidas de posición (media, moda, mediana y cuartiles) en muestras y tablas de frecuencia. Gráficos estadísticos.

11. La nota media de una clase de 20 alumnos es 5´8. Si se añaden 2 alumnos de notas 9 y 10 respectivamente. ¿Cuál será la nueva media de la clase?.

12. Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números:

2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2

Ordena a continuación los datos de la muestra de menor a mayor:

A partir de dicha muestra ordenada calcula la media aritmética, la mediana, cuartiles y la moda

13. Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2019 se recogen en la siguiente tabla:

2’03	1’96	1’91	2’11	1’91	1’93	2’08	1’99	1’90	2’16	2’06	2’03

Ordena a continuación los datos de la muestra de menor a mayor:

A partir de dicha muestra ordenada calcula la media aritmética, la mediana, cuartiles y la moda

14. En la clase de Educación Física, el profesor ha medido el tiempo (en segundos) que tarda cada alumno en recorrer 100 metros. Los resultados están en esta tabla:

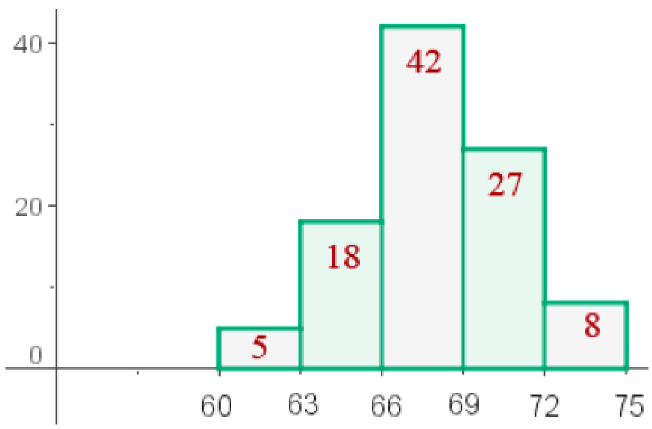
14’92	13’01	12’22	16’72	12’06	10’11	10’58	18’58	20’07	13’15	20’10	12’43	17’51	11’59	11’79
16’94	16’45	10’94	16’56	14’87	17’59	13’74	19’71	18’63	19’87	11’12	12’09	14’20	18’30	17’64

a) Agrupa estos resultados en intervalos de longitud 1 comenzando en 10 segundos y completa la siguiente tabla de frecuencias. A continuación, representa el histograma y el polígono de frecuencias de esta tabla.

Variable (x_i)	**f_i**
Total→	

b) Mirando la tabla frecuencias sabrías decir cuál es la moda, la mediana y los cuartiles.

15. El histograma de la distribución correspondiente al peso de 100 alumnos de 3º ESO es el siguiente:



Forma la tabla de la distribución y calcula la moda y la mediana.

TEORÍA. Medidas de dispersión (desviación típica, varianza y coeficiente de variación).

16. Las notas de 15 alumnos en un examen de matemáticas se reflejan en la siguiente tabla:

7	7	6	6	10	1	4	5	5	3	9	5	5	8	6

Coloca la muestra de forma ordenada en la siguiente tabla :

a) Calcula a partir de la muestra su media, mediana, cuartiles, moda y varianza.

b) Completa la siguiente tabla de frecuencias y calcula a partir de ella la media y la varianza.

Variable (x_i)	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Suma Total→			

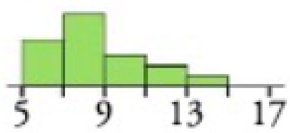
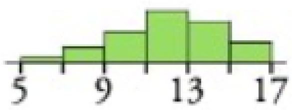
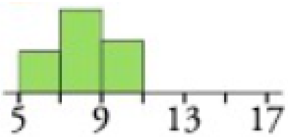
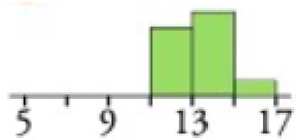
$\bar{x} =$

Var(x)=

c) Representa en diagrama de barras y el polígono de frecuencias absolutas de la tabla anterior.

17. A partir de la siguiente tabla que muestra la media y desviación típica de horas de estudio semanales de distintas clases de 3º de ESO, asocia cada clase a su gráfica correspondiente.

Clase	**Media ($\bar{x}$)**	**Desviación Típica (σ_x)**
3ºA	13,4	1,2
3ºB	8,2	0,8
3ºC	8	2,5
3ºD	12,5	2,3

Clase ____________	Clase ____________	Clase _______________	Clase ______________
			

18. En una tienda de música, el precio medio de las guitarras es de 500€ con una desviación típica de 150€ y el precio de las flautas es de 90€ con una desviación típica de 15€. ¿Cuál tiene más dispersión relativa?

19. Si en Hellín hay una estatura media de 1´70 m con una desviación típica de 15 cm y en Albacete hay una estatura media de 1´65 m con una desviación típica de 20 cm. ¿En cuál de las hay una mayor dispersión?

20. En una excursión de montaña participan 25 personas con las siguientes edades:

8 10 10 11 12 36 37 37 38 40 42 43 43 44 45 47 48 50 52 53 55 58 61 63 67

a) Hacer una tabla de frecuencias clasificando las edades en 6 intervalos que comienzan en 7,5 y terminan en 67,5. Hallar, a partir de ella, los parámetros $\bar{x}$, σ y CV.
b) Prescindiendo de los 5 niños, obtenemos un colectivo de 20 personas. Calcular de nuevo sus parámetros $\bar{x}$, σ y CV, y comparar con los obtenidos en el grupo inicial.
d) Hallar los parámetros de posición Q_1, Q_3 y Me, de la distribución original, y construir el diagrama de caja y bigotes correspondiente.

UNIDAD 4. NÚMEROS REALES

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
A2. Cantidad	- Números grandes y pequeños (Notación exponencial y científica-calculadora) - Estimaciones con la precisión requerida. - Todos los tipos de números (enteros, fracciones, decimales y raíces) en contextos de la vida cotidiana.
A3. Operaciones	- Operaciones con todos los tipos de números en contextos reales. - Propiedades de operaciones aritméticas (con calculadora y Excel).

Resumen del tema:

1. MCM y MCD. Descomponer factorialmente.
- **MCM**. Tomar comunes y no comunes al mayor exponente.
- **MCD**. Tomar comunes al menor exponente.

Ejemplo: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow$ MCM $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$36 = 2^2 \cdot 3^2 \rightarrow$ MCD $= 2^2 \cdot 3$

3. Tipos de números
- **Naturales** (N): 0, 1, 2, …
- **Enteros** (Z): 0, 1, 2, … y -1,-2, -3, …
- **Racionales** (Q): Fracciones ($\frac{a}{b}$ $con\ a, b\epsilon R$)
- **Irracionales** (I): No pueden ponerse en fracción ($\pi, e, \sqrt{p}\ con\ p\ primo, 0'1234 \ldots, 0'102030 \ldots$)
- **Reales** (R): Racionales (Q) e irracionales (I)

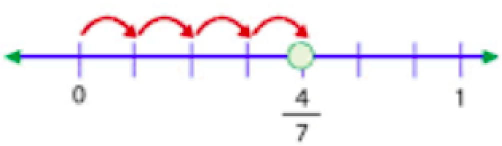
2. Operaciones con naturales y enteros:
- **Tipo I.** +3+5=+8 ; -4-2=-6 ;-3+8= +5 ;+3-7= -4
- **Tipo II. (Varias + y -).** 2+3-4+5-2+1=11– 6=5
Sumamos +, sumamos - y al final los restamos.
- **Tipo III.** 2 signos juntos utilizar la regla de los signos "2 signos iguales + y 2 signos distintos –"
++= +   - - = +   - + = -   + - = -
Ejemplo: - (+3) – (-5) + (-7) + (+3)= -3 +5 – 7 +3
- **Tipo IV.** Producto/ división con signos
Ejemplo: (-5)·(-7) = + 35 ; (-24):(+2) = -12
- **TIPO V.** Jerarquía de las operaciones:
(1) Potencias y raíces // (2) Paréntesis
(3) Multiplicaciones-divisiones // (4) Sumas-restas

Opuesto y valor absoluto
Opuesto de 2 → -2
Valor absoluto |2|=2 y |-2|=2

4. Representación de fracciones y decimales en la recta. (https://www.youtube.com/watch?v=UiJZwbqT06U)

Fracciones: El denominador indica el nº de partes iguales en que dividir la unidad y el numerador las que coger.

Ej: 4/7



Nº decimales: Pasarlos a fracción y representar
- D.Exacto $1'2 = \frac{12}{10}$, $1'23 = \frac{123}{100}$
- P.Puro $1'\hat{6} = \frac{16-1}{9}$, $1'\widehat{23} = \frac{123-1}{99}$
- P.Mixto $1'2\hat{6} = \frac{126-12}{90}$, $1'6\widehat{23} = \frac{1623-16}{990}$

Nota: En la representación de fracciones, para dividir un segmento en partes iguales de forma exacta habría que usar el método de Thales. (**Vídeo:** https://www.youtube.com/watch?v=dqWRtHWI0-c)

5. Ordenar fracciones

- Si tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador (Ej: $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$)
- Si tienen distinto denominador, hay que construir fracciones equivalentes a las dadas con el mismo denominador que será el m.c.m.

Ejemplo: Ordenar $\frac{7}{15}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$

(1) Calculamos m.c.m (15, 5, 3) =15
(2) Construimos fracciones equivalentes con denominador 15.

$$\frac{7}{15} = \frac{7}{15}\ ;\ \frac{4}{5} = \frac{4\cdot3}{5\cdot3} = \frac{12}{15}\ ;\ \frac{2}{3} = \frac{2\cdot5}{3\cdot5} = \frac{10}{15}$$

(3) Ahora ya podemos ordenar $\frac{7}{15} < \frac{10}{15} < \frac{12}{15}$

6. Suma y resta fracciones

- Si tienen el mismo denominador ponerlo como denominador y sumar numeradores ($\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$)
- Si tienen distinto denominador, hay que construir fracciones equivalentes a las dadas con el mismo denominador que será el m.c.m.

Ejemplo: Resolver $\frac{7}{15} + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

(1) Calculamos m.c.m (15, 5, 3) =15
(2) Construimos fracciones equivalentes con denominador 15.

$$\frac{7}{15} = \frac{7}{15}\ ;\ \frac{4}{5} = \frac{4\cdot3}{5\cdot3} = \frac{12}{15}\ ;\ \frac{2}{3} = \frac{2\cdot5}{3\cdot5} = \frac{10}{15}$$

(3) Finalmente $\frac{7}{15} + \frac{10}{15} - \frac{12}{15} = \frac{5}{15}$

7. Producto y división de fracciones

- Producto de 2 fracciones→ Multiplicar en línea

Ejemplo: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1\cdot2}{2\cdot4} = \frac{2}{8}$

- División de 2 fracciones → Multiplicar en cruz

Ejemplo: $\frac{1}{2} : \frac{2}{4} = \frac{1\cdot4}{2\cdot2} = \frac{4}{4}$

8. Operaciones combinadas con fracciones

(1) Resolver paréntesis
(2) Multiplicaciones y divisiones
(3) Por último sumas y restas

Observación: como norma general se recomienda no hacer el mcm para poner el mismo denominador mientras haya alguna multiplicación o división de fracciones en la operación a realizar.

Ej: $\left(\frac{7}{5} : \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{5} = \frac{14}{15} - \frac{3}{5} = \frac{14}{15} - \frac{3\cdot3}{5\cdot3} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

9. Tipos de problemas con fracciones

(1) Problemas de cantidad contraria
(2) Problemas de comparación de fracciones
(3) Problemas de fracción de un número
(4) Problemas de fracción de una fracción
(5) Problemas de fracción de x igual a un número
(6) Problemas de sumas y restas
(7) Problemas de producto y división
(8) Problemas dado el total
(9) Problemas dada una parte

10. Tipos de decimales

- **Decimales exactos** (Q): 1´23 , 2´7 , 3,845
- **Periódicos Puros** (Q): 1´666…=1´$\hat{6}$
- **Periódicos Mixtos** (Q): 1´366…=1´3$\hat{6}$
- **Ni exactos ni periódicos** (I - Irracionales) 0´12345 ... , 0´102030…

Paso de fracción a decimal: Resolver la división.

¿Cómo saber el tipo de decimal mirando el denominador?

- Denominador factores 2 ó 5 → D. Exacto
- Denominador distintos 2 ó 5 →Periódico Puro
- Denominador mezcla 2 ó 5 y otros →P.Mixto

Paso de decimal a fracción:

- D.Exacto $1'2 = \frac{12}{10}$, $1'23 = \frac{123}{100}$
- P.Puro $1'\hat{6} = \frac{16-1}{9}$, $1'\widehat{23} = \frac{123-1}{99}$
- P.Mixto $1'2\hat{6} = \frac{126-12}{90}$, $1'6\widehat{23} = \frac{1623-16}{990}$

11. Aproximación y errores

Formas de aproximar:

- **Truncar a las décimas** (poner 0 desde las centésimas en adelante). Ej: 3,456 → 3,400
- **Redondear a las centésimas** (si la cifra siguientes es 5 o más subir una unidad a las centésimas y si es menor de 5 entonces truncar). Ej: 3,456 → 3,460

Error absoluto y error relativo:

$E_a = |Valor_{aprox} - Valor_{real}|$; $E_r = \frac{E_a}{Valor_{real}}$

El error relativo no tiene unidades y por tanto permite comparar el error entre magnitudes distintas.

Situaciones donde puede hacernos falta una aproximación:

- Cuando se conoce el valor real y no se quiere dar con precisión. Ej: El precio de un piso. Aprox.1 mill €

En este caso se suele usar el redondeo pudiendo indicarse de 2 maneras:

*Redondeo a las décimas, a las centésimas, a las milésimas, a las unidades, a las decenas,…

*Redondeo con cierto número de cifras significativas. Ej: Redondea 2´256 con 3 cifras significativas→ 2´26

No son cifras significativas los ceros a la izquierda, pero si los ceros entre 2 cifras distintas de 0.

Ej: 0,0023 → Tiene 2 cifras significativas / 30005 → Tiene 5 cifras significativas / 0,0103→Tiene 3 c.sign.

Ej: Redondea 0,0023 con 1 cifra significativa → 0,002

- Cuando se desconoce el valor real. Ejemplo: Distancia al nadar en una piscina. Aprox. 5 km.

En el caso de que no conozcamos el valor real, podemos establecer una **cota para el error absoluto** en función de las cifras con las que se de el número.

Ej: Altura Iglesia 15 m → Cota error: $E_{abs}<0,5$ m // Altura montaña 3,4 km → Cota error: $E_{abs}<0,05$ Km=50m

(https://www.youtube.com/watch?v=5cmpf8FNX2c)

12. Propiedades de las potencias

1. $a^0=1$
2. Base negativa. $(-a)^{par}=a^{par}$; $(-a)^{impar}= - a^{impar}$
3. Exp. negativo. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
4. Misma base. $a^n \cdot a^m=a^{n+m}$; $a^n : a^m=a^{n-m}$
5. Mismo exponente. $a^n \cdot b^n=(ab)^n$; $a^n:b^n=(a/b)^n$
6. Potencia de una potencia. $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$

13. Notación científica

Expresar un número en notación científica consiste en expresarlo como el producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Ejemplos:

+ -

a) $345678 = 3´45678 \cdot 10^5$

b) $0,000345 = 3´45\cdot 10^{-4}$

c) $345´6\cdot 10^5 = 3´456\cdot 10^7$

(https://drive.google.com/file/d/0B-02ZNYAUZ9CXzRvU29Bc0pJNHM/view)

14. Operaciones en Notación científica

- Para realizar + y - en notación científica, se transforma cada exp. decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos.

$4\cdot 10^8 + 2,3\cdot 10^6 - 6,5\cdot 10^5 = 4000\cdot 10^5+23\cdot 10^5-6,5\cdot 10^5$

- El producto (cociente) de dos nº decimales da como resultado la multiplicación (división) de los decimales y restar los exponentes de base 10.

$4\cdot 10^8 \cdot 2´3\cdot 10^6 = (4 \cdot 2´3) \cdot 10^{8+6}$

$4\cdot 10^8 : 2´3\cdot 10^6 = (4:2´3) \cdot 10^{8-6}$

15. Definición de radical

$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow \quad a = b^n$ (a radicando y n índice)

Observaciones:

- Si a<0, entonces $\sqrt[n]{a}$ sólo existe con n impar.
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

16. Propiedades y operaciones con radicales

1. Producto/Cociente radicales del mismo índice: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ // $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

2. Potencia de una raíz $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

3. Raíz de una raíz $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

4. Extraer factores de una raíz

5. Simplificar/amplificar raíces $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

6. Producto/Cociente de raíces de distinto índice.

7. Suma de radicales. Descomponer radicandos y extraer factores

$\sqrt{50} + \sqrt{8} + \sqrt{12} = \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=oQRf4lSIfY4&vl=es

Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=n4LBiSxHv94

17. Racionalizar (quitar raíces del denominador)

1. $\boldsymbol{\sqrt{a}}$ **en el denominador**. Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{a}$. (Ej:$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{7}$)

2. $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m}}$ **en el denominador**. Multiplicar numerador y denominador por $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^b}}$ con b lo que falta hasta n. (Ej:$\frac{3}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt[5]{7^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{7}$)

3. $\boldsymbol{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ **en el denominador**. Usar el conjugado. (Ej:$\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{7})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{7})}{-5}$)

https://www.youtube.com/watch?v=KTdBezXCjk0

Repaso de mcm, mcd y operaciones con enteros.

1. Calcula MCM y MCD de 42 y 63

42 |	63 |	42 = ____________________	MCM(42,63)=
		63 = ____________________	MCD(42,63)=

Tipo I. Suma/Resta de 2 números enteros.

2. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 4+7=		b)-2-5=		c) -5+6=		d) 4-7=		e) -4-9=	
f) -6-3=		g) 6-10=		h) 9-7=		i) - 8+3=		j) -5-3=	
k) 7-3=		l) 2-5=		m) 5+9=		n) -6+2=		o) -4+3=	
p) -6-3=		q) -3-5=		r) -9+4=		s) -7+9=		t) -8-7=	

Tipo II. Suma/Resta de varios números enteros.

3. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 5 - 6 + 2 - 4 + 1=	____ - ____ =	e) - 2 - 3 - 5 + 4 - 1 + 3 =	____ - ____ =
b) 4 + 5 + 3 - 2 - 9 - 7=	____ - ____ =	f) - 6 - 5 + 8 – 3 + 9 - 1 + 8 =	____ - ____ =

Tipo III. Suma/Resta cuando aparecen 2 signos juntos.

4. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 6 - (- 3)	b) 5 - (+ 3)	c) - (+4) - (- 6) + (+3)	d) - (-5) - (+ 6) + (+2) + (-4)

Tipo IV. Producto/División de números enteros.

5. Resuelve las siguientes operaciones:

a) (+2)·(-3)		d) (-4)·(-9)		g)(+20):(-2)·(-3)=		j) (+9):(-3)·(+2)=	
b)(+6)·(+7)		e) (-8):(+2)		h) (-2)·(-4)·(-3)=		k) (+8):(-4):(-2)=	
c)(-5)·(+4)		f) (-18):(-6)		i) (+2)·(-6)·(-5)=		l) (+20):(-5):(+2)=	

Tipo V. Operaciones combinadas

6. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 4+8:2	b) 3–3·3	c) 5+5·2	d) 7–9·3	e) 16:8–4·3	f) 12:2–2·2
g) 8·3+5·2	h) 6–12:2	i) (8+5)·2	j) 7+5·(–2)	k) (-8+5)·3	l) 5·2+3
m) 3·4 – 3·2 + 21:(-3)		n) 18:2–3·(8-4)+(-4)·(-2)		o) 8–[9–(3+4)·2]	

7. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $5^3 - 6 \cdot (2^3 - 2)$	b) (-2) ·(+5) – (-3) ·(-7) – 5 + 4·8	c) $2^3 - 4 \cdot (\sqrt{36} - 4)$

Reconoce tipos de números y los representa

TEORÍA: Tipos de números reales.

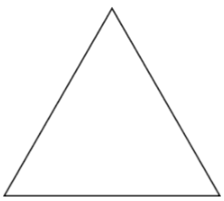
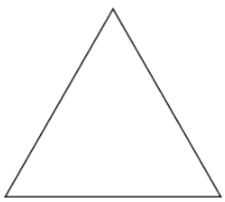
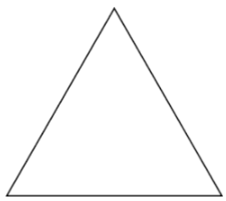
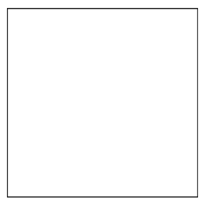
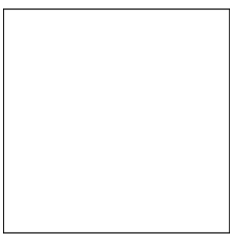
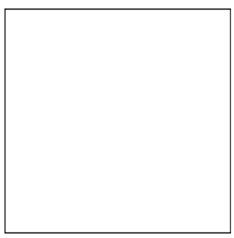
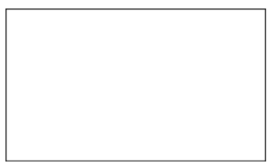
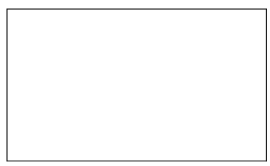
8. Indica que afirmaciones son verdaderas o falsas justificando en su respuesta:

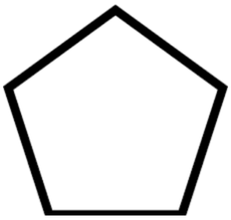
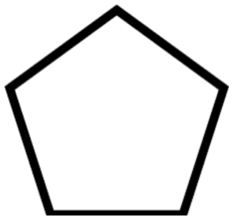
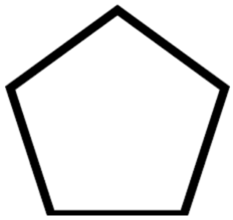
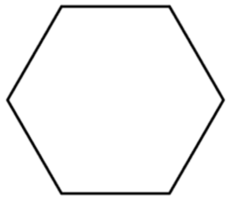
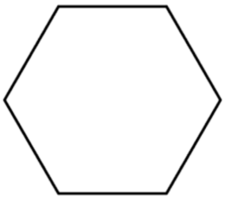
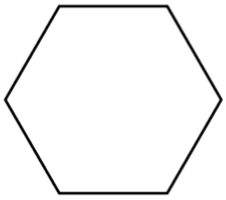
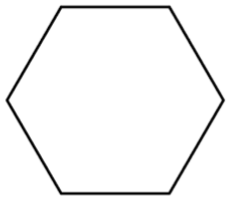
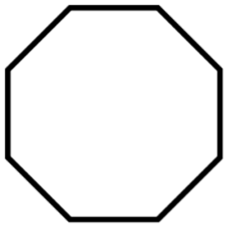
Afirmaciones	V/F	Justificación
a) El número 2 en natural pero no es racional		
b) El número 5/7 es racional pero no entero.		
c) El número -5 es natural, entero y racional		
d) $\sqrt{16}$ es un número irracional		
e) -15/3 es racional y entero		
f) $\sqrt{5}$ es un número irracional		
g) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ es un número racional e irracional		

9. Clasifica en números naturales (N), números enteros (Z) , números racionales (Q) e irracionales (I) los siguientes números: 2, -5, 2/3, 3,14444…, 1´2, -2/5, 7/1, ∏, 2´333…. , $\sqrt{3}$, -25/5, $\sqrt{49}$

Naturales (N)	Enteros (Z)	Racionales (Q)	Irracionales (I)

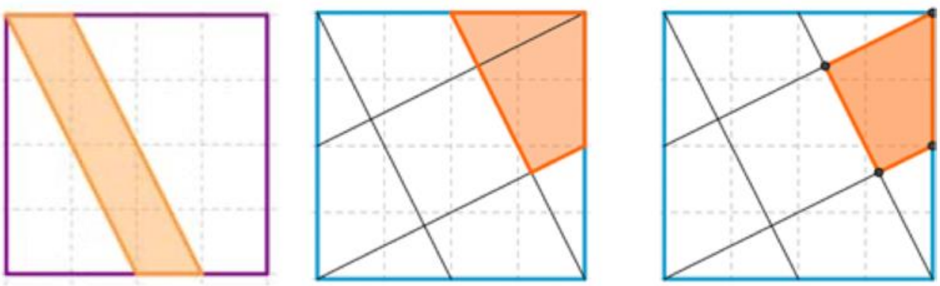
10. Representa la fracción indicada sobre las siguientes figuras:

a) $\frac{1}{2}$ 	b) $\frac{2}{3}$ 	c) $\frac{3}{4}$ 	d) $\frac{3}{4}$ 
e) $\frac{5}{6}$ 	f) $\frac{2}{3}$ 	g) $\frac{3}{8}$ 	h) $\frac{5}{6}$ 

i) $\frac{3}{5}$ 	j) $\frac{7}{10}$ 	k) $\frac{8}{15}$ 	l) $\frac{3}{6}$ 
m) $\frac{6}{6}$ 	n) $\frac{1}{4}$ 	ñ) $\frac{5}{18}$ 	o) $\frac{3}{4}$ 

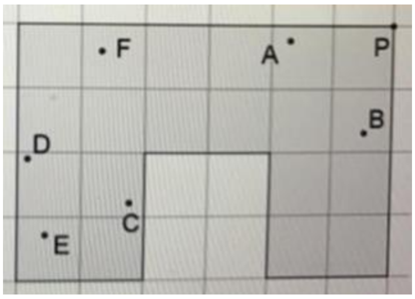
11. Representa utilizando rectángulos las fracciones 9/8 y 7/3.

12. Hallando la fracción que representa cada cuadrado y sabiendo que cada cuadrado tiene lado 4 cm, calcula las áreas coloreadas.



13. En una tienda quieren impedir los robos instalando una cámara en el techo. La cámara puede girar 360º y en principio está instalada en el punto P. En el plano hay 6 personas A, B, C, … en el interior de la tienda.

a) ¿Qué fracción de la tienda queda oculta a la cámara?.



b) ¿Cuál sería la mejor ubicación para la cámara y qué fracción de tienda quedaría oculta para esa ubicación?.

TEORÍA: ¿Cómo representar fracciones en la recta real?.

14. Representa sobre la recta las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{4}$	b) $\frac{7}{8}$
c) $\frac{3}{5}$	d) $\frac{7}{6}$
e) $\frac{8}{3}$	f) $-\frac{5}{2}$
g) $-\frac{7}{4}$	h) $\frac{8}{5}$
i) $\frac{13}{6}$	j) $\frac{15}{7}$

Operaciones con fracciones

15. Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes justificando tu respuesta:

$a)\ \frac{3}{5}\ y\ \frac{9}{15}$	$b)\ \frac{7}{5}\ y\ \frac{14}{10}$	$c)\ \frac{4}{8}\ y\ \frac{8}{6}$

16. Calcula el valor de "x" para que las siguientes fracciones sean equivalentes:

$a)\ \frac{2}{5}\ y\ \frac{8}{x}$ → x=	$b)\ \frac{10}{4}\ y\ \frac{x}{6}$ → x=	$c)\ \frac{4}{x}\ y\ \frac{8}{12}$ → x=

17. Ordenar de menor a mayor $\frac{7}{15}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$

18. Ordenar de menor a mayor $\frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{11}{18}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

19. Realiza las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{1}{12} + \frac{7}{8} - \frac{3}{10} = \frac{}{} + \frac{}{} - \frac{}{} = \frac{}{}$

12 | 8 | 10

mcm(12,8,10)= _______

b) $\frac{35}{36} - \frac{1}{8} - \frac{3}{24} = \frac{}{} - \frac{}{} - \frac{}{} = \frac{}{}$

36 | 8 | 24

mcm(36,8,24)= _______

c) $\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{}{}=\frac{}{}$	d) $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{3}=\frac{}{}=\frac{}{}=\frac{}{}$
e) $\frac{3}{2}:\frac{6}{4}:\frac{9}{8}=\frac{}{}:\frac{}{}=\frac{}{}$	f) $\frac{3}{2}:\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{3}=\frac{}{}\cdot\frac{}{}=\frac{}{}$
f) $7:\frac{6}{4}=$	g) $\frac{3}{2}:5=$
g) $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right):\frac{7}{10}=$ Sol: -7/12	h) $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)+\left[-1-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\right]=$ Sol:-7/4

i) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=$

Sol: 11/6

j) $2+\frac{1}{3+\frac{2}{4+\frac{3}{5}}}=$

Sol: 181/79

20. Resuelve:

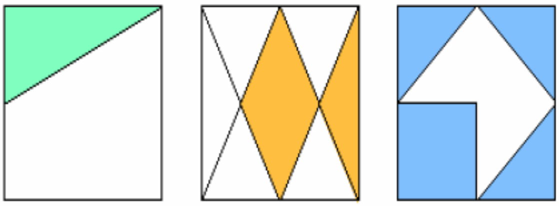
a) $\frac{2}{7}$ $de\ 14 =$	b) $\frac{3}{5}$ $de\ 105 =$	c) $\frac{3}{20}$ $de\ 400 =$

Problemas con fracciones

21. **Tipo 1. Problemas de cantidad contraria.**
a) Una clase tiene 36 alumnos de los que 15 han aprobado. ¿Qué fracción representa los suspensos?.

b) Si se han vaciado 5/28 de una piscina. ¿Qué fracción representa la parte que queda por vaciar?

22. **Tipo 2. Comparación de fracciones.**
Los siguientes cuadrados tienen coloreados la parte de terreno con olivos plantados por 3 hermanos. Cada hermano ha plantado un terreno. ¿cuál de los hermanos tiene más olivos?. Además la Junta de CLM da una ayuda de 0,5 € por m^2. Cada cuadrado tiene 5000 m^2. ¿Cuánta ayuda le corresponde a cada uno?.



23. **Tipo 3. Problemas de fracción de un número.**
Antonio tiene ahorrados 2380€. Si gasta 3/7 en un ordenador. ¿Cuánto dinero le queda?.

24. **Tipo 4. Problemas de fracción de una fracción.**
Nos comemos 1/3 de una tarta. De lo que queda nos comemos 2/7. ¿Qué fracción representa la parte de tarta que queda sin comer?

25. **Tipo 5. Problemas de fracción de x igual a un número.**
Se nos rompe una bolsa de caramelos y se nos caen 210 caramelos, lo que supone 3/7 del total. ¿Cuántos caramelos tenía la bolsa?

26. **Tipo 6. Problemas de sumas y restas de fracciones.**
España y Portugal poseen 5/24 y 1/6 de los bosques europeos respectivamente. ¿Qué fracción de bosques europeos tienen España y Portugal?. ¿Qué fracción de bosques tiene el resto de Europa?.

27. **Tipo 7. Problemas de multiplicaciones y divisiones.**
Nos quedan 2/3 de tarta y los queremos repartir entre 6 personas. ¿A qué fracción de tarta tocamos?.

28. **Tipo 8. Problemas dado el total.**
En una clase hay 36 alumnos, 2/3 de los cuales son chicos. Las 3/4 de las chicas dan música. ¿Qué fracción del total son chicas de música y cuántas son?

29. **Tipo 9. Problemas dada la parte.**
En una carnicería se vende por la mañana 3/7 de la carne y por la tarde la mitad de lo que quedaba. ¿Qué fracción queda por vender?

	Se vende	Queda
Mañana		
Tarde		

30. De un calentador de agua se gasta 1/6 del agua y luego 2/5 partes de lo que quedaba. Si aún quedan 30 litros. ¿Cuál es la capacidad del calentador?

	Se gasta	Queda
Primero		
Después		

31. Tres amigos les toca la lotería. El primero se lleva 2/5 del total, el segundo 5/9 de lo que queda y el tercero 92€. ¿Cuánto dinero les tocó?

<u>**Problemas variados**</u>

32. He recorrido en coche 60 km, lo que supone 4/9 del total. ¿Cuántos kilómetros haré en total?.

33. Tengo un terreno de 600 m^2. Dedico 2/15 a plantar alcachofas, 1/6 ha plantar pimientos y el resto lo tengo para árboles. De la parte de árboles, 2/5 son de árboles ornamentales y el resto son frutales. ¿Cuántos m^2 dedico a frutales?.

(Sol: 252 m^2)

34. Violeta se ha comido los 2/5 de una barra de helado. ¿Qué fracción queda?. Su padre, Robert, se ha comido la mitad del resto. ¿Qué fracción del helado queda ahora?

(Sol: a)3/5 b)3/10)

35. José recibe el regalo de un paquete de discos. En la primera semana escucha 2/5 de los discos, y en la segunda, 4/5 del resto. Si aún le quedan 3 sin escuchar, ¿cuántos discos había en el paquete?.

	Escucha	Queda
1ª semana		
2ª semana		

(Sol: 25 discos)

36. De un recipiente de 240 litros se han llenado 130 botellas de medio litro. ¿Cuántas botellas de 1/5 de litro se podrá llenar con el resto?

(Sol: 875 botellas)

37. Nos dicen que el resultado de un examen ha sido el siguiente: 1/8 de los alumn@s han suspendido, 3/7 tienen suficiente, 3/8 notable y 1/10 sobresaliente. Comprueba si es posible.

(Sol: No)

38. Una masa de pizza de 600 g contiene 2/15 de aceite, 9/25 de agua y el resto harina. ¿Qué parte de harina tiene la mezcla y que cantidad en gramos es?.

(Sol: No)

39. Una finca se divide en tres parcelas. La primera es igual a los 4/7 de la superficie de la finca y la segunda es igual a la mitad de la primera. a) ¿Qué fracción de la finca representa la tercera parcela?; b) Si la finca es de 14.000 m2, ¿cuál es la superficie de cada parcela?

(Sol: a) 1/7, b) 8000, 4000 y 2000 m^2)

40. En un programa de televisión intervienen 3 médicos. El primero habla 3/8 del tiempo total, la segunda interviene 2/5 del resto y el tercero expone sus ideas en 15 minutos. ¿Cuánto tiempo dura el programa?

(Sol: 40 minutos)

41. Aída organiza su armario: la cuarta parte la reserva a los zapatos; del espacio que queda, 7/12 los dedica a ropa y el resto a complementos. ¿Qué fracción del armario dedica a los complementos?

(Sol: 5/16)

42. Nos gastamos 2/3 de lo que llevamos en el supermercado y una cuarta parte de lo que nos queda en la farmacia. Si regresamos a casa con 6 euros. ¿Cuánto teníamos al salir de casa?

(Sol: 24€)

43. Una persona realiza 3/5 partes de un viaje en ferrocarril; los 7/8 del resto en coche y los 26 km restantes en moto. En total, ¿cuántos kilómetros recorre?.

(Sol: 520 km)

44. Un futbolista ha metido los 2/5 de los goles de su equipo y otro la cuarta parte del resto. Si los demás jugadores han conseguido 45 goles, ¿cuántos goles metió el equipo en toda la temporada? .

(Sol: 100 goles)

45. Una canica cae al suelo y se eleva cada vez los 2/3 de la altura anterior. Tras botar tres veces, se ha elevado 2 metros. ¿Desde qué altura cayó la canica?

(Sol: 6,75 m)

46. Si un grifo tarda 2 horas en llenar una piscina y otro grifo tarda 3 horas. Si los ponemos a llenar a la vez, ¿cuánto tardarán?

	Tiempo en llenar	Fracción que llena en 1 hora	Suma de las 2 fracciones
Grifo 1			
Grifo 2			

(Sol: 1,2 h)

47. Si un grifo tarda 8 horas en llenar una piscina y otro grifo tarda 12 horas. Si los ponemos a llenar a la vez, ¿cuánto tardarán?

	Tiempo en llenar	Fracción que llena en 1 hora	Suma de las 2 fracciones
Grifo 1			
Grifo 2			

(Sol: 4,8 h)

48. Un padre y un hijo tardan 2 horas en arar un campo. Si el padre lo hace solo tarda 6 horas. ¿Cuánto tardará el hijo en hacerlo solo?.

	Tiempo en llenar	Fracción que ara en 1 hora
Padre		
Hijo		

(Sol: 3 h)

B2.C1.2. Tipos de decimales. Paso de decimal a fracción y a la inversa. Representación

TEORÍA: Tipos de decimales

TEORÍA: Paso de fracción a decimal.

TEORÍA: Dada una fracción, cómo saber qué tipo de decimal es mirando su denominador.

49. Indica qué tipos de decimales son los siguientes números:

a) 1,44444….	b) 7,43	c) 127	d) 1,010010001…
___________________	___________________	___________________	___________________
e) 7,241111….	f) $3,\hat{2}$	g) $1,2\hat{7}$	h) 1,234567….
___________________	___________________	___________________	___________________
i) √2=1,414213….	j) $3,0123\hat{2}$	k) π-3=0,141592	l) 1,2122232425….
___________________	___________________	___________________	___________________

50. Ordena, de menor a mayor: $2´\hat{3}$, 2´3, 2´13 y 2´303003… .

51. Escribe 3 números comprendidos entre 3,6 y $3,\hat{6}$

52. Pasa a decimal las siguientes fracciones e indica de que tipo es:

a) $\frac{6}{25}$	b) $\frac{7}{3}$	c) $\frac{5}{6}$

53. Indica que tipo de decimal son estas fracciones, sin hacer la división y justifica tu respuesta:

a) $\frac{23}{50}$	a) $\frac{8}{7}$	a) $\frac{3}{14}$	a) $\frac{4}{6}$
a) $\frac{9}{6}$	a) $\frac{13}{150}$	a) $\frac{7}{20}$	a) $\frac{6}{35}$

TEORÍA: Paso de decimal a fracción

54. Escribe en forma de fracción los siguientes números:

a) 5´6 =	b) 0´17 =	c) 2´106 =	d) 0´0023 =
e) 123´111… =	f) $1'\hat{3}$ =	g) $1'2\hat{3}$ =	h) $21'\hat{5}$ =
i) $1'2\widehat{343}$ =	j) $27'\hat{9}$ =	k) $1'7\widehat{03}$ =	l) $0'1\hat{3}$ =
m) $1'1234\ldots$ =	n) π =	o) $1'27\hat{3}$ =	p) $0'\hat{9}$ =

55. Indica si son verdaderas o falsas estas afirmaciones justificando tu respuesta:

Enunciado	V	F	Justificación
a) Al sumar dos decimales periódicos puros siempre se obtiene otro periódico puro.			
b) Hay nºs decimales que no son racionales			
c) Los números naturales son racionales			
d) El cociente de 2 decimales exactos es exacto			

56. Representa en la recta los siguientes números decimales utilizando las fracciones:

a) $0'6 = \frac{}{}$	b) $0{,}25 = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$
c) $0'\hat{3} = \frac{}{} = \frac{}{}$	d) $1'\hat{4} = \frac{}{}$
e) $1'\hat{9} = \frac{}{} =$	f) $1'4\hat{9} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$

Aproximación y errores

TEORÍA: Truncamiento. Redondeo. Error absoluto y relativo.

57. Completa la siguiente tabla:

	2314	1325	4300	937	1554	1665	9555
Truncar a las centenas							
Redondear a las decenas							
Redondear a las u.millar							

58. Halla los errores absoluto y relativo que cometemos al redondear y truncar a las décimas la expresión decimal del número 10´476.

59. Supongamos que medimos la altura de un lápiz y obtenemos 17 cm, cuando en realidad mide 16,8 cm. También medimos la distancia a Murcia desde Hellín y nos salen 88 km, cuando en realidad son 90 km. ¿En qué caso hemos cometido un mayor en la medición?

60. Completa la siguiente tabla redondeando con el nº de cifras significativas indicado:

	Cifras significativas				
Número	1	2	3	4	5
$\sqrt{2}$					
1/3					
1´99995					

61. Establece una cota del error absoluto para las estas situaciones en que desconocemos el valor real:

Situación	Cota del error absoluto
a) Volumen de una piscina 48 m^3	
b) Altura de una canasta 3,55 m	
c) Altura de un helicóptero 35,5 km	
d) Peso boli 35 g	
e) Peso silla 3,25 kg	

Potencias y radicales

TEORÍA: Propiedades de las potencias.

62. Escribe en forma de potencia sin calcular:

a) $2^5 \cdot 2^7$		b) $4^2 \cdot 4^3$		c) $2^{15} \cdot 2^9$		d) $2^5 \cdot 2^x = 2^7$	x=
e) $3^9 : 3^5$		f) $6^6 : 6^5$		g) $2^{10} \cdot 2^3 \cdot 2^4$		h) $5^x : 5^4 = 5^9$	x=
i) $(2^3)^4$		j) $(5^3)^5$		k) $((2^3)^4)^2$		l) $((3^2)^3)^5$	
m) $2^7 \cdot 3^7$		n) $21^5 : 7^5$		o) $12^4 : 2^4$		p) $2^5 \cdot 4^5$	
r) $9^{12} : 3^3$		s) $4^6 \cdot 6^6$		t) $20^{15} \cdot 5^{15}$		u) $15^x : 5^x$	

63. Escribe en forma de potencia sin calcular:

a) $(-2)^{57}$		b) $(-4)^{24}$		c) $(-2)^4 \cdot (-2)^9$		d) $(-2)^5 : 2^3$	
e) $(-3)^9 : (-3^5)$		f) $-(-6)^9 : 6^6$		g) $-(-2)^{13} \cdot (-2^3)$		h) $(-5)^7 : (-5^4)$	

64. Escribe en forma de potencia sin calcular:

a) $((-2)^9 : 2^5) \cdot 2^7$	b) $(3^9 \cdot (-3)^3) : ((-3) \cdot 3^3)^2$	c) $(7^9 : 7^1) : (-7^4)$
d) $((-4)^6 : (-4)^5) \cdot 4^1$	e) $((-a)^8 \cdot a^4) : (-a)^3$	f) $((-y)^2 \cdot (-y)^3) \cdot y^4$
g) $((-4)^9 : 2^9) \cdot (-2^7)$	h) $-((-8)^9 : 2^9) : -2^9$	i) $(b^5 \cdot (-b)^4) : (-b)^3$
j) $((-9)^7 \cdot 9^4) : (-3)^{11}$	k) $((-9)^6 : (-3)^6) \cdot -3^5$	l) $(-y^2)^3 \cdot ((-y)^4)^2$

65. Escribe en forma de potencia sin calcular:

a) $\frac{7^6}{(-7)^4}$	b) $\frac{(-15)^3}{5^3}$	c) $\frac{18^5}{3^5 \cdot 6^5}$
d) $\frac{(7^6 \cdot 7^3)^2}{(7^2 \cdot 7^4)^3}$	e) $\frac{30^6}{3^6}$	f) $\frac{30^6}{3^5}$

66. Escribe en forma de potencia sin calcular:

a) $\frac{12^5}{3^{-4}}$	b) $\frac{15^{-3}}{5^{-2}}$	c) $\frac{20^7}{2^4}$
d) $\frac{36^5}{3^9}$	e) $\frac{54^{-6}}{(-6)^7}$	f) $\frac{-64^4}{(-4)^6}$

Notación científica

TEORÍA: Notación científica.

67. Escribe en notación científica los siguientes números:

Número	Notación Científica	Número	Notación Científica
60250000000		$0{,}00043 \cdot 10^3$	
256000000		$0{,}0000012 \cdot 10^{-2}$	
0,00000003		$123 \cdot 10^4$	
0,0000435		$120{,}03 \cdot 10^{-6}$	
0,002020		$0{,}0123 \cdot 10^5$	
$23{,}4 \cdot 10^3$		$0{,}00045 \cdot 10^{-2}$	
27 cienmilésimas		3 billones de billón	
7 billones		0,23 diezmilésimas	

68. Resuelve los siguientes cálculos expresando la solución en notación científica:

a) La masa de la Tierra es 5,98·1024 kg. ¿Cuál sería la masa equivalente a 3 planetas iguales a la Tierra?
b) El diámetro de un virus es de $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra, si su radio medio es de 6.370 km?
c) La velocidad de la luz es 3·108 m/s. ¿Qué distancia recorre la luz en un año?

Radicales

TEORÍA: Definición de radical. Propiedades de los radicales.

69. ¿Cuánto mide el lado de una habitación cuadrada embaldosada con 144 baldosas de cuadrados de 25 cm de lado?

70. En un depósito cúbico caben 1000 cubos de 1 dm^3, ¿cuánto mide su arista?.

71. Calcula:

a) $\sqrt[3]{27}$=	b) $\sqrt[4]{16}$=	c) $\sqrt{36}$=	d) $\sqrt[3]{-8}$=	e) $\sqrt[3]{-125}$=	f) $\sqrt{81}$=

72. Calcula:

a) $\sqrt[5]{1}$=	b) $\sqrt{-36}$=	c) $\sqrt[4]{81}$=	d) $\sqrt[5]{-1}$=	e) $\sqrt[3]{-8}$=	f) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$=	g) $\sqrt[3]{\frac{27}{-8}}$=	h) $\sqrt[4]{-16}$

73. Descompón en factores y extrae los que puedas fuera de la raíz:

a) $\sqrt{12}$ =	b) $\sqrt{48}$ =	c) $\sqrt{72}$ =
d) $\sqrt{2500}$ =	e) $\sqrt[3]{52}$ =	f) $\sqrt[3]{40}$ =

74. Extrae fuera del radical cuando sea posible:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$ =	b) $\sqrt[5]{2^7 \cdot 3^6}$ =	c) $\sqrt{5^7 \cdot 7^3}$ =
d) $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$ =	e) $\sqrt[3]{3^{17} \cdot 5^4}$ =	f) $\sqrt[7]{a^{15} \cdot b^{24}}$ =
g) $\sqrt{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2}$ =	h) $\sqrt{2^5 \cdot 3^8 \cdot 7^3}$ =	i) $\sqrt[3]{a^2 \cdot b^4 \cdot c^7}$ =

j) $\sqrt[5]{32 \cdot x^4 \cdot y^{12}}$ =	k) $\sqrt[7]{5^2 \cdot 7^{14} \cdot 11^8}$ =	m) $\sqrt[4]{2^5 \cdot w^9 \cdot t^4}$=

75. Calcula estas operaciones de radicales de distinto índice:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ =	b) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$ =	c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ =	d) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}$=
e) $\sqrt{2^5} \cdot \sqrt{2^3}$ =	f) $\sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^4 b}$ =	g) $\sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[3]{4x}$ =	h) $\frac{\sqrt[4]{5^{10}} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt[4]{5^6}}$=

76. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{3^6}$=	b) $\sqrt[4]{2^2}$=	c) $\sqrt[12]{3^4}$=	d) $\sqrt[6]{2^3}$=	e) $\sqrt[8]{2^{10}}$=	f) $\sqrt[4]{3^6}$=

77. Calcula:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{27}}$=	b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16}}$=	c) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$=	d) $\left(\sqrt[4]{2^2}\right)^3$=	e) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{7}}\right)^6$ =	f) $\left(\sqrt{\sqrt[5]{7^2}}\right)^5$ =

78. Calcula estas operaciones de radicales con distinto índice:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$ =	b) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2}$ =	c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{3^2}$ =	d) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{6}$=
e) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2}$ =	f) $\sqrt{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2 b}$ =	g) $\sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[5]{x}$ =	h) $\sqrt[4]{5^2} : \sqrt[6]{5^3}$=

79. Simplifica las operaciones que puedas:

a) $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$ =	b) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$ =	c) $5\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}$ =	d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$ =

80. Simplifica las operaciones que puedas:

a)$\sqrt{8}+7\sqrt{2}$ =	b) $\sqrt{20}-\sqrt{5}$ =	c) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-10\sqrt{2}$=

TEORÍA: Racionalizar raíces (quitar raíces del denominador).

81. Racionaliza y simplifica:

a)$\frac{3}{\sqrt{5}}$	b) $\frac{7}{\sqrt{3}}$	c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$	d) $\sqrt{\frac{2}{5}}$
e)$\frac{7}{\sqrt[4]{3^3}}$	f) $\frac{2}{\sqrt[5]{2^2}}$	g) $\frac{2}{\sqrt[10]{7^7}}$	h) $\frac{5}{\sqrt[7]{3^2}}$
i)$\frac{7}{\sqrt[4]{3^3}}$	j) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$	k) $\frac{5}{\sqrt{5}-2}$	l) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

B2.C1.2. Tipos de números reales. Representación de raíces en la recta real.

TEORÍA: Recordamos los tipos de números reales. Representación de $\sqrt{a}$.

82. Clasifica en números naturales (N), números enteros (Z) , números racionales (Q) e irracionales (I) los siguientes números: $2'34\hat{1}$, -5´3, 9999, $9'\hat{8}$, $\frac{\pi}{2}$, $1'102030\ldots$, -7/3, -$\sqrt{4}$, $\sqrt{2}$, $1'001234\ldots$, $\sqrt{49}$

Naturales (N)	Enteros (Z)	Racionales (Q)	Irracionales (I)

83. Representa en la recta los siguientes números irracionales utilizando el teorema de Pitágoras:

a) $\sqrt{2}$	b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{10}$	d) $\sqrt{6}$

UNIDAD 5. PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
A5. Razonamiento proporcional	- Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos (escalas, cambio de divisas, velocidad y tiempo, …)
A6. Educación financiera	- Toma de decisiones de consumo responsable: relaciones cantidad-precio, valor-precio en contextos cotidianos. (porcentajes, intereses,…)

Resumen del tema:

1. Cómo resolver reglas de 3 directas / inversas.

(1) Planteamos la correspondiente reglas de 3:

Magnitud 1		Magnitud 2
A	------>	C
B	------>	X

(2) Estudiamos si la relación entre Magnitud 1 y Magnitud 2 es Directa (+ +) o Inversa (+ -)

- Si la relación es Directa → $\frac{A}{B}=\frac{C}{X}$ → $X=\frac{B\cdot C}{A}$ (multiplicamos en cruz y dividimos por el valor que queda)

- Si la relación es Inversa le damos la vuelta a los valores correspondientes a la Magnitud 1 con lo que la igualdad nos queda así → $\frac{B}{A}=\frac{C}{X}$ → $X=\frac{A\cdot C}{B}$ (multiplicamos en línea y dividimos por el valor que queda)

2. Reglas de 3 compuestas (más de 2 magnitudes)

(1) Planteamos la correspondiente regla de 3:

Magnitud 1		Magnitud 2		Magnitud 3
A	---->	C	---->	E
B	---->	D	---->	X

(2) Estudiamos si la relación de las Magnitud 1 y Magnitud 2 con la magnitud que lleva la X para ver si es Directa (+ +) o Inversa (+ -). Cuando se directa mantendremos la proporción igual y cuando sea inversa le daremos la vuelta. Por ejemplo, suponiendo que Magnitud 1 sea Directa y Magnitud 2 inversa

$\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{E}{X}$ → $X=\frac{B\cdot C\cdot E}{A\cdot D}$ (dejamos $\frac{A}{B}$ al ser directa y $\frac{D}{C}$ al ser inversa)

3. Repartos directamente proporcionales

Queremos repartir una cantidad C directamente proporcional a valores a, b y c. Calculamos S=a+b+c y calculamos la fracción que representa cada parte $\frac{a}{S},\frac{b}{S}\ y\ \frac{c}{S}$. A cada uno le corresponde esa fracción de C:

$$\frac{a}{S}\ de\ C\ ,\frac{b}{S}\ de\ C\ y\ \frac{c}{S}\ de\ C$$

Repartos inversamente proporcionales.

Queremos repartir una cantidad C inversamente proporcional a valores a, b y c. En este caso hacemos un reparto directamente proporcional a valores $\frac{1}{a},\frac{1}{b}\ y\ \frac{1}{c}$ cogiendo como S=$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

4. Problemas de mezclas

Queremos mezclar una cantidad C_1 de producto A de precio P_1 con una cantidad C_2 de producto B precio P_2. Para plantear los problemas utilizar la siguiente tabla:

	Cantidad	Precio	Coste
Producto A	C_1	P_1	$C_1 \cdot P_1$
Producto B	C_2	P_2	$C_2 \cdot P_2$
Mezcla	C_1+C_2	$X= (C_1 \cdot P_1+ C_2 \cdot P_2)/(C_1+C_2)$	$C_1 \cdot P_1+ C_2 \cdot P_2$

5. Problemas de velocidades

Móviles. Espacio=Velocidad·Tiempo (misma dirección $v=v_2-v_1$ // distinta dirección $v=v_1+v_2$)

Caudales. Nº Litros=Caudal·Tiempo (misma dirección $C=C_2-C_1$ // distinta dirección $C=C_1+C_2$)

6. Porcentajes.

(1) Cálculo de <u>porcentajes de forma directa</u>. 35 % de C $=\frac{35}{100} \cdot C = 0{'}35 \cdot C$

(2) <u>Aumentos porcentuales</u>. Aumento del 20% → 120 % de C $=\frac{120}{100} \cdot C = 1{'}20 \cdot C$

(3) <u>Disminuciones porcentuales</u>. Descuento del 30% → 70 % de C $=\frac{70}{100} \cdot C = 0{'}70 \cdot C$

(4) Cálculo de <u>porcentajes como regla de 3 directa</u>

Cantidad	(Directa)	Porcentaje (%)
Total	------>	100 %
Parte	------>	X

<u>Ejemplos:</u>

a) Un abrigo ha costado 33€ con un 10% de aumento del precio. ¿Cuánto costaba ante de dicho aumento?.

Cantidad	(Directa)	Porcentaje (%)	
33	------>	110 %	$x=\frac{3300}{110}$
X	------>	100 %	

b) Si en una clase 6 alumnos llevan gafas, lo que supone el 20% del total. ¿Cuántos alumnos tiene la clase?.

Cantidad	(Directa)	Porcentaje (%)	
X	------>	100 %	$x=\frac{600}{20}$
6	------>	20 %	

7. Problemas de intereses

<u>Interés simple</u> (pago/amortización de intereses al final del periodo)

I intereses, C capital, r % de interés, t tiempo

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ (t en años) , $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ (t en meses) , $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36500}$ (t en días)

<u>Interés compuesto</u> (amortizaciones varias veces durante el periodo)

$C_F = C_I \cdot (1 + \frac{r}{100})^t$, $I=C_F-C_I$. C_F capital final, C_I capital inicial, r % interés, t tiempo, I intereses

Resolución de problemas aritméticos aplicables a la vida real.

TEORÍA: Reglas de 3 simples directas e inversas.

1. En una obra, 2 obreros realizan una zanja de 5 m. Si mantienen el mismo ritmo de trabajo, ¿cuántos metros abrirán si se incorporan 3 obreros más?

2. Si 20 obreros levantan un muro de ladrillos en 6 días, ¿cuántos días tardarían 12 obreros?

3. Si un coche recorre 200 km en 75 minutos, ¿cuántos tardará en recorrer tardarían 320 km?

4. Si un grifo de caudal 6 l/min llena una bañera en 12 minutos, ¿cuánto tardará en llenarla un grifo de caudal 8 l/min?

TEORÍA: Reglas de 3 compuestas.

5. Un albañil pone 260 m^2 de baldosa en 5 días trabajando 8 horas al día. Se compromete a poner 500 m^2 de baldosas en 7 días, ¿cuántas horas tendrá que trabajar al día? .

6. Para calentar 2 litros de agua desde 0 a 20 ºC se necesitan 1.000 calorías. Si queremos calentar 3 litros de agua de 10 a 60 ºC ¿Cuántas calorías son necesarias?. (Sol: 3750 cal.)

7. Un motor funcionando 10 días y trabajando 8 horas diarias ha originado un gasto de 1.200 euros. ¿Cuánto gastará el motor funcionando 18 días a razón de 9 horas diarias?. (Sol: 2.430 €)

8. En un restaurante 113 comensales han consumido 840 yogures durante 20 días. ¿Será suficiente una reserva de 200 yogures para los próximos cinco días en los que se prevé una afluencia media de 120 comensales por día?. (Sol: No)

9. Ocho bombillas encendidas 4 horas diarias, han consumido 48 kW/h en 30 días. ¿Cuánto consumirán 6 bombillas iguales a las anteriores, encendidas 3 horas diarias, durante 20 días?. (Sol: 18 kW/h)

10. Nueve grifos abiertos 10 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de 20 €. Averiguar el precio del vertido de 15 grifos abiertos 12 horas durante los mismos días. (Sol: 40 €)

11. Para pintar un muro de 8 metros de largo y 2,5 metros de alto necesitamos 2 botes de 1 kilo de pintura. ¿Cuántos botes de 5 kilos se necesitarán para pintar uno de 50 metros de largo y 2 de alto?. (Sol: 2 botes)

12. Un ganadero sabe que para alimentar a sus 20 animales durante 30 días necesita 2 toneladas de pienso. ¿Cuántos días le durará la comida si compra 10 animales más y otros 1.500 kilogramos de pienso?. (Sol: 35)

TEORÍA: Repartos directamente proporcionales.

13. Pedro, Alberto y María tenían, respectivamente, 5, 3 y 2 euros. Juntaron su dinero y compraron 500 folios. ¿Cuántos folios recibe cada uno?. (Sol: Pedro 250, Alberto 150 y María 100 folios)

14. En una campaña de recogida de pilas para reciclar, Yolanda lleva 7 pilas, Miriam 11 y Juan 12. Si como premio ganan 60 bolígrafos, ¿cómo se los repartirán?. (Sol: Yolanda 14, Miriam 22 y Juan 24 bolígrafos)

15. Tres amigos reciben 450 € por hacer de canguro. Rafa trabajó 3 días, Marina 5 días y Alfredo 7 días. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?. (Sol: Rafa 90, Marina 150 y Alfredo 210 €)

16. Dos socios montan una empresa. El socio A puso 2 millones de euros y el socio B puso 5 millones. Al año han obtenido 28.000 € de beneficios. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?. (Sol: El A 8.000 y el B 20.000 €)

17. Se reparte dinero en proporción a 5, 10 y 13; al menor le corresponden 2500 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos? Sol: 5.000 y 6.500 €

18. ¿Cómo se podrían repartir 2310€ entre 3 hermanos de forma que al mayor le corresponda la mitad que al menor y a este, el triple que al mediano?

TEORÍA: Repartos inversamente proporcionales.

19. Quiero repartir un beneficio de 1100€ en partes inversamente proporcionales a los días que han faltado 2 trabajadores que ha sido 3 y 4 días respectivamente. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

20. Tres camareros se reparten 295€ de propinas en partes inversamente proporcionales a los días que faltaron a trabajar que fueron 2, 5 y 7 días respectivamente. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

TEORÍA: Problemas de mezclas

21. Si mezclamos 40 kg de café de 6,80€/kg con 25 kg de otro café de 4,50€/kg. ¿A qué precio resultará el kg de mezcla?.

22. Si un joyero mezcla 3 lingotes: uno de 30 kg con 68,3% de oro, otro de 10 kg con 82,15% de oro y otro de 15 kg de oro puro. Hallar el porcentaje de oro que tendrá la mezcla.

23. Un litro de agua pesa 999,2 g y un litro de alcohol 749,7 g. ¿Qué pesará un litro de disolución al mezclar 3 litros de agua con 7 litros de alcohol?.

24. Un joyero quiere fundir un lingote de 3kg de oro de ley 0,80 con 4 kg de oro de ley de 0,95. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?

TEORÍA: Problemas de velocidades

25. Un motorista va por una carretera a 80 km/h. Más adelante, a 30 km, va un ciclista a 25 km/h en el mismo sentido. ¿Cuánto tardará el motorista en alcanzar al ciclista?.

26. Un meteorito se acerca hacia una estrella a una velocidad de 100 km/s. La estrella se dirige hacia el meteorito a 65 km/h. Si se encuentran a una distancia de 3 millones de km. ¿Cuánto tardarán en chocar?

27. Un camión sale de Hellín a 90 km/h a las 8 de la mañana. A los 30 minutos, se dan cuenta que se ha dejado un paquete y sale un coche persiguiéndolo a 120 km/h. ¿A qué hora lo pillará?.

28. Un embalse tiene una capacidad de 880 hm^3 y se encuentra al 20% de su capacidad. Cada día se vacían 7500 l/s y recibe una aportación media de la lluvia de 34 m^3/s. Manteniendo ese ritmo, ¿Cuánto tardará en alcanzar el 75% de su capacidad?.

TEORÍA: Porcentajes. Porcentajes encadenados.

29. De un colegio con 600 alumnos, el 50% son de Educación Primaria, el 35% de ESO y el 15% de Bachillerato. Halla el nº de alumnos de cada nivel. (Sol: 300 de primaria, 210 de ESO y 90 de Bachillerato)

30. En la liga de futbol en la que juego he metido 7 de los 48 goles de mi equipo. ¿Qué porcentaje he metido?. (Sol:14, 6%)

31. Un agricultor recogió el año pasado 120 toneladas de naranjas. Este año espera obtener un 30% más. ¿Cuántas toneladas espera obtener? (Sol:156 toneladas)

32. Me voy a comprar un ordenador de 950€. Hay un descuento de un 18%, ¿Cuánto me costará? (Sol:779€)

33. En Diciembre vi un abrigo que valía 60€. En Enero le hicieron un descuento de un 20% y en Febrero volvieron a subirle el precio un 20%. ¿Cuánto vale ahora?. (Sol: 57,6€)

34. El precio de un coche es de 11.400 euros. Al comprarlo me han hecho un descuento del 22 %, pero después había que pagar un 17% de impuestos de matriculación. ¿Cuál es el precio final?. (Sol: 10.403,64€)

35. Un artículo que vale 50 euros tiene los siguientes cambios de precio: primero sube un 30%, a continuación, baja un 15%, vuelve a bajar un 25%, y por último tiene una subida del 10%. ¿Cuál es su precio final? ¿Qué porcentaje ha variado respecto del precio inicial?. (Sol: Precio final: 45,58€ Descuento: 8,8375%)

36. En una reunión hay un 60 % de mujeres. Si hay 12 mujeres, calcula el número total de personas que han asistido a la reunión. (Sol: 20 personas)

37. Un reloj valía 32 euros, pero el relojero me lo ha rebajado y he pagado finalmente 28.80 euros. ¿Qué tanto por ciento me han rebajado?. (Solución: 10 %)

38. En un incendio han ardido el 40% de los árboles de un bosque. Si después del incendio quedan 4.800 árboles sin quemar, ¿cuántos árboles había al principio?. (Sol: 8000 árboles)

39. Un cliente ha comprado una lavadora por 375 euros. Estaba de oferta con un 20 % de descuento. ¿Cuál era el precio sin rebaja?. (Sol: 468,75 €)

40. Un depósito de agua está al 93% de su capacidad. Si se añaden 14.000 litros, quedará completo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?. (Sol: 200.000 litros)

41. Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30% y en esa posición mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?. (Sol: 80 cm)

42. Si en una clase el 77.777... % de los alumnos aprueban y hay más de 30 alumnos, pero menos de 40, ¿cuántos alumnos son y cuántos aprueban?

43. Antonia gana cierto dinero al mes. Si se gasta el 40 % en pagar la letra del piso, el 75 % de lo que le queda en facturas y le sobran 90 € para comer. ¿Cuánto gana y cuánto gasta en el piso y en facturas?

TEORÍA: Interés simple y compuesto.

44. Un banco ofrece un beneficio anual de un 3%. ¿Qué beneficio obtendremos si depositamos 900€ durante 3 años?.

45. Calcula el interés que producen 2000€ en 10 meses al 4% anual.

46. Antonio le prestó a Pepe 2500€ al 2% anual durante 4 años. ¿Cuánto dinero tendrá que devolver Pepe cuando pase ese tiempo?.

47. ¿Qué interés recibiremos al invertir 5000€ al 3% anual si lo retiramos a los 2 meses y 9 días?.

48. ¿Cuánto tiempo tendremos que mantener 3000€ en el banco al 4% de interés para ganar 350€?.

49. ¿Qué rédito "r" nos tendrá que dar el banco para ganar 200€ al invertir 2500€ durante 2 años?.

50. ¿Qué capital tendremos al cabo de 5 años si invertimos 20000€ al 3,5% anual con amortizaciones anuales?.

51. ¿Cuántos intereses ganaremos al meter 10000€ al 3% anual durante 3 años con amortizaciones anuales?.

UNIDAD 6. SUCESIONES

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
A4. Relaciones	- Patrones y regularidades numéricas
D1. Patrones	- Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos

Resumen del tema:

1. Sucesiones generales

- Una sucesión es un conjunto ordenado de números reales a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , … . A cada número de la sucesión se le llama término.

Ejemplos:

a) 1, 2, 3, 4, 5, … // b) 3, 7, 11, 14, 17, …

c) 3, 6, 12, 24, … // d) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8 ,… (Sucesión de Fibonacci)

- A la fórmula que nos permite calcular cualquier término de la sucesión le llamamos término general.

2. Cálculo de términos de una sucesión a partir de su término general.

- Término general como fórmula:

$a_n = n^2 - 1 \rightarrow a_1 = 1^2-1=0$, $a_2 = 2^2-1=3$, $a_3 = 3^2-1=8$, …

- Término general expresado de forma recurrente

$a_1=2$, $a_2=5$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

$a_3 = 3a_2-2a_1=3\cdot5-2\cdot2 =15-4=11$

$a_4 = 3a_3-2a_2=3\cdot11-2\cdot5 =33-10=23$

$a_5 = 3a_4-2a_3=3\cdot23-2\cdot11 =69-22=47$

3. Sucesiones aritméticas

- Una sucesión aritmética es una sucesión en la que cada término se obtiene sumándole o restándole una cantidad fija llamada diferencia (d)

Ejemplo: a) 3, 5, 7, 9, 11, … (d=2)

b) 10, 7, 4, 1, -2 , … (d=-3)

- El término general de una sucesión aritmética se calcula con la siguiente fórmula donde a_1 es el primer término de la sucesión y d la diferencia.

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

- Suma de n términos de una sucesión aritmética:

$$S_n=(a_1+a_n)\cdot \frac{n}{2}$$

4. Sucesiones geométricas

- Una sucesión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando una cantidad fija llamada razón (r)

Ejemplo: a) 1, 2, 4, 8, 16, … (r=2)

b) 4, 2, 1, 1/2, 1/4 , … (r=1/2)

- Término general de una sucesión geométrica

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$$

- Suma de n términos de sucesión geométrica

$$S_n=a_1\cdot \frac{(r^n-1)}{r-1}$$

- Suma de infinitos términos sucesión geométrica

$$S_n=a_1\cdot \frac{1}{1-r}, \ \mathbf{-1<r<1}$$

Sucesiones generales

TEORÍA: ¿Qué es una sucesión o progresión?. ¿A qué se llama término general de una sucesión?

Ejercicio. Dadas las siguientes sucesiones calcula para cada una de ellas los términos indicados:

a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, … a_2= ______ a_5= ______ a_8= _______ a_9= ______

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, … a_2= ______ a_5= ______ a_8= _______ a_9= ______

c) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … a_2= ______ a_5= ______ a_8= _______ a_9= ______

d) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, … a_2= ______ a_5= ______ a_8= _______ a_9= ______

1. Indica que regla siguen las siguientes sucesiones para la construcción de sus siguientes términos:

   1,4,7,10,13,16,19… ____

   1,2,4,8,16,32,… ____

   1,4,9,16,25,36,… ____

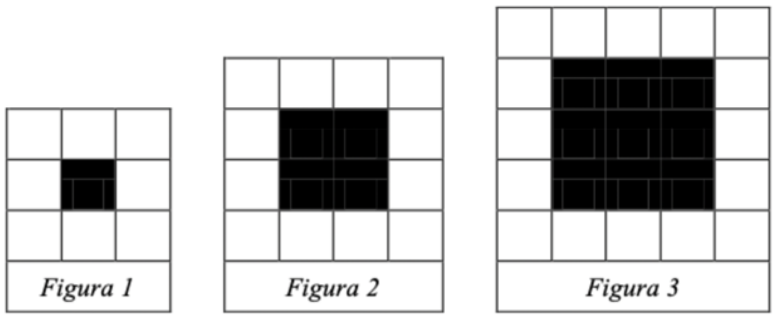
   1,-3,9,-27,81,… ____

   2,4,6,10,16,26,… ____

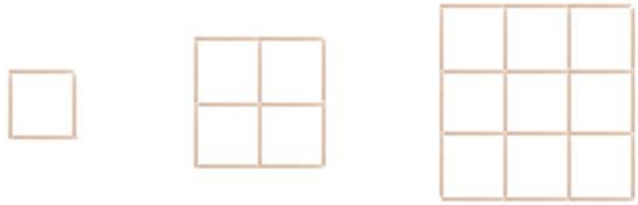
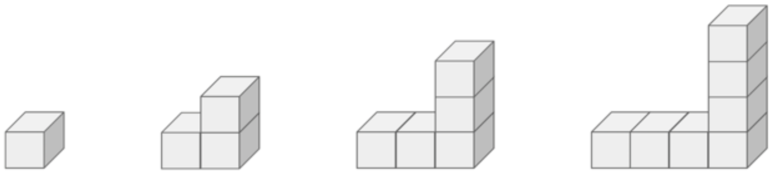
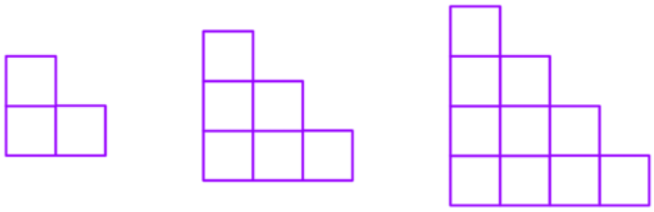
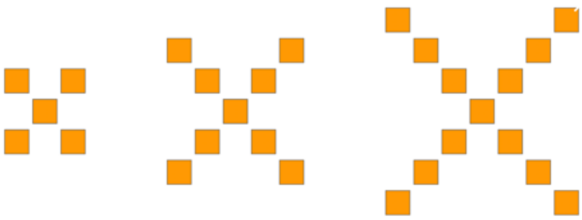
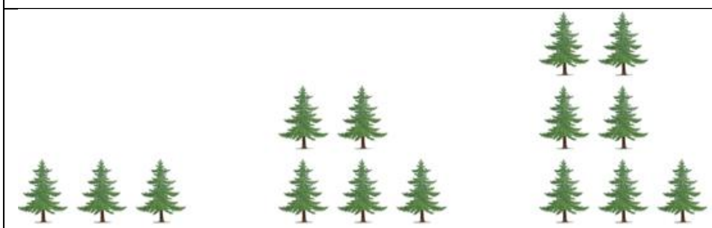
   110,90,70,50,30,… ____

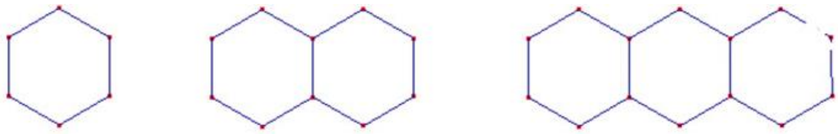
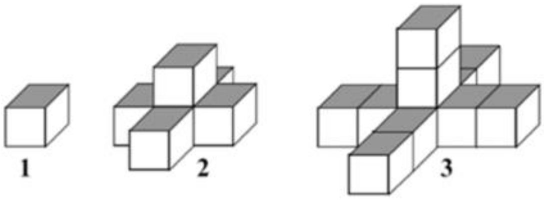
   6,8,16,18,26,28,36,38,… ____

2. Observe la siguiente secuencia, cuente la cantidad de cuadros blancos en cada caso y determine el número de cuadros blancos de la figura n-ésima.



3. Dada las siguientes regularidades geométricas adivina los siguientes términos de la sucesión y trata de obtener una fórmula para el término n-ésimo de la sucesión:

Regularidad geométrica	Sucesión	Fórmula
		
		
		
		
		
		
		

Regularidad geométrica	Sucesión	Fórmula
		
		

Imágenes extraídas de la página https://www.visualpatterns.org

4. Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

Término general	Cálculo de sus 5 primeros términos
$a_n = 5+3(n+1)$	
$b_n = 2n^2 + 1$	
$c_n = (n+1)(n+2)$	
$d_n = \frac{2n-3}{3n}$	
$e_n = n^3$	
$f_n = 3n - 1$	
$g_n = 2^n - 6$	

5. Dadas las siguientes sucesiones recurrentes, escribe sus 5 primeros términos:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1=2$, $a_2=7$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$	$d_n = 5d_{n-1} - d_{n-2}$, $d_1=2$, $d_2=4$ $d_3 =$ $d_4 =$ $d_5 =$
$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$, $b_1=1$, $b_2=1$ $b_3 =$ $b_4 =$ $b_5 =$	$e_n = 3e_{n-1} - 2e_{n-2}$, $e_1=1$, $e_2=1$ $e_3 =$ $e_4 =$ $e_5 =$

6. Imagina que eres un investigador y que has estado estudiando el crecimiento de 4 plantas. Al final has obtenido las siguientes 4 fórmulas te dan la altura en centímetros de las plantas en función de “n” que representa el número de días de vida de la planta. A los 6 días de vida, ¿Cuál de las cuatro plantas es más alta?.

$a_n = n^2 - n$	$b_n = 5n-2$	$C_n = 3{\cdot}2^n$	$d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$, $d_1=1$, $d_2=3$

Sucesiones aritméticas

TEORÍA. Sucesiones aritméticas

¿Qué es una sucesión aritmética?

¿Cuál es el término general de una sucesión aritmética?

¿Cómo se calcula la suma de n términos de una sucesión aritmética?

7. Determina si las siguientes sucesiones son o no aritméticas:

a) 2, 5, 8, 11, 14, … ______________________________________

b) 1, 10, 100, 1000, … ______________________________________

c) 2, 4, 8, 16, 32, … ______________________________________

d) 2, 4, 6, 8, 10, … ______________________________________

e) 8, 4, 0, -4, -8, … ______________________________________

f) 1, 3, 6, 10, 15, … ______________________________________

8. En una progresión aritmética donde $a_1=4'2$ y $a_2=4'9$, calcula el valor de "d" y el término a_5.

9. En una progresión aritmética donde $a_5=8$ y $d=-3$, calcula el valor de a_1 y a_9.

10. Calcula el término general de las siguientes sucesiones aritméticas:

a) 5, 6, 7, 8, 9, …	a_n =
b) -2, 0, 2, 4, 6, …	b_n =
c) -1, 1, 3, 5, 7, 9, …	c_n =
d) 3, 6, 9, 12, 15, …	d_n =

11. Calcula el término treinta de las siguientes sucesiones aritméticas

a) 8, 11, 14, 17, 20, …	a_n =	a_{30} =
b) 9, 5, 1, -3, -7, …	b_n =	b_{30} =
c) 2, 6, 10, 14, 18, …	c_n =	c_{30} =

12. Calcula el primer término de una sucesión aritmética sabiendo que $a_{10}=34$ y $d=3$.

13. Calcula el primer término de una sucesión aritmética sabiendo que $a_{15}=40$ y $d=2$.

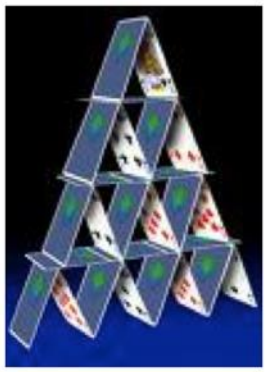
14. Comprobamos que nosotros gastamos una media de 14 euros al mes en móvil. Al comprar el móvil nos gastamos 59€. ¿Cuánto nos habremos gastado en 3 años y 3 meses? ¿Y en 5 años y 7 meses?. Plantea la solución mediante sucesiones.

15. Nos hemos comprado una casa y hemos tenido que contratar una hipoteca. De entrada dimos 30000€ y de cuota mensual pagamos 550€. ¿Cuánto nos habremos pagado en 4 años y 5 meses?. Plantea este problema mediante sucesiones.

16. Halla la suma de los 20 primeros términos de la sucesión 1,7,13,19,25, …

17. Halla la suma de los 30 primeros términos de la sucesión 1,4,7,10,13, …

18. ¿Cuántas cartas necesitamos para construir un castillo de 4 pisos como el de la imagen?. ¿Y para construir un castillo de 12 pisos?. El record del mundo se consiguió con un castillo de 60 pisos. ¿Cuántas cartas se necesitaron?. Plantea tu solución mediante sucesiones.



19. Halla la suma de los 150 primeros números pares.

20. Un nadador, se somete al siguiente entrenamiento: 11 largos de piscina el primer día y cada día que pasa aumenta en tres largos. ¿Cuántos largos hará en total en 40 días?

21. Se quiere construir un tejado de forma que en la primera fila haya 10 tejas, en la segunda 11, y así sucesivamente, hasta un total de 20 filas de tejas. ¿Cuántas tejas se necesitan?

Sucesiones geométricas

TEORÍA. Sucesiones geométricas

¿Qué es una sucesión geométrica?

¿Cuál es el término general de una sucesión geométrica?

¿Cómo se calcula la suma de n términos de una sucesión geométrica?

¿Y la suma de infinitos términos?

22. Determina si las siguientes sucesiones son o no geométricas:

a) 2, 5, 8, 11, 14, … ______________________________________

b) 1, 10, 100, 1000, … ______________________________________

c) 2, 4, 8, 16, 32, … ______________________________________

d) 4, 2, 1, 1/2, 1/4, … ______________________________________

e) 2, 6, 12, 36, … ______________________________________

f) 1, -2, 4, -8, 16, … ______________________________________

23. Calcula el término general de las siguientes sucesiones geométricas:

a) 3,6,12,24,48 …	$a_n =$
b) 4, 2, 1, 1/2, 1/4, …	$b_n =$
c) 2, 10, 50, 250, …	$c_n =$
d) 27, 9, 3, 1, 1/3, …	$d_n =$

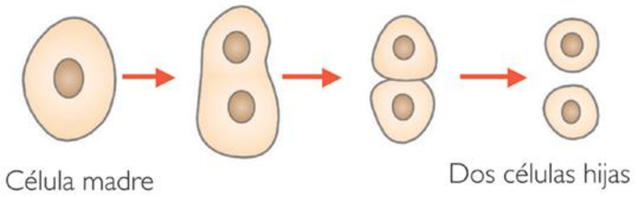
24. Calcula el término octavo de las siguientes sucesiones geométricas:

a) 5, 2´5, 1´25, …	$a_n =$	$a_8 =$
b) 1, 2, 4, 8, 16, …	$b_n =$	$b_8 =$
c) 7, 14, 28, 56, …	$c_n =$	$c_8 =$

25. Calcula los seis primeros términos de una sucesión geométrica sabiendo que $a_1=5$ y $r=4$.

26. Calcula los seis primeros términos de una sucesión geométrica sabiendo que $a_1=5$ y $a_2=3$.

27. Una célula se reproduce por bipartición cada 5 minutos. ¿Cuántas habrá al cabo de 10 horas?



28. Un coche va perdiendo un 11% de su valor cada año. Si al principio costaba 30000€, ¿Cuánto valdrá dentro de 7 años?. Plantea el problema en términos de sucesiones.

29. A Isabel y Andrés les han confiado, a las nueve de la mañana, un secreto. Cada uno de ellos, al cuarto de hora, se lo han contado a tres amigos. Estos a otros tres,...,etc. ¿Cuánta gente lo sabrá a las 2 de la tarde?

30. Si hay un crecimiento anual de un 6% y una población de 40 millones de personas. ¿Cuál será la población dentro de 10 años?

31. Una vivienda de 90 m^2 en Albacete costaba 90000€ hace 10 años. Teniendo en cuenta que el crecimiento medio anual en esos 10 años ha sido de un 14%. ¿Qué precio tendría ahora esa casa?

32. Calcula la suma de los 10 primeros términos de la sucesión 2, 6, 12, 24, 48, ...

33. Calcula la suma de los infinitos términos de una sucesión con a_1= 6 y r=0´5.

34. Calcula la suma de los infinitos términos de una sucesión con a_1= 60 y r=-0´2

HOJA DE REPASO PARA EL EXAMEN

Sucesiones Aritméticas	Sucesiones Geométricas
Término general $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$ **Suma de n términos** $S_n=(a_1+a_n)\cdot \frac{n}{2}$	**Término general** $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$ **Suma de n términos** $S_n=a_1\cdot \frac{(r^n-1)}{r-1}$ **Suma de ∞ términos si -1<r<1,** $S_n=a_1\cdot \frac{1}{1-r}$

Progresiones Aritméticas

1. Hallar los términos que se indican de las siguientes progresiones aritméticas:
a) El término 20 en: 1, 6, 11, 16... b) El término 6 en: 3, 7, 11, 15... c) El 12 en: -4, 0, 4, 8... d) El término 10 en: 2, 5, 8, 11...
Sol: a) 96; b) 23; c) 40; d) 29

2. Calcula el término general de las siguientes sucesiones:
a) -1,1,3,5,7,9 b) 3,6,9,12,15,18 c) 5,6,7,8,9 d) -2,0,2,4,6 Sol: a) 2n-3; b) 3n; c) n+4; d) 2n-4

3. Calcula el primer término de una progresión aritmética que consta de 10 términos, sise sabe que el último es 34 y la diferencia es 3. Sol: 7

4. Halla la suma de los términos de una progresión aritmética en los siguientes casos:
a) De los 10 primeros términos de: 1, 6, 11... b) de los 20 primeros de: 22, 23, 24... c) De los 30 primeros de: 1/2, 3/4, 1...
Sol: a) $a_{10}=46$, S=235; b) $a_{20}=41$, S=630; c) $a_{30}=31/4$, S=495/4.

5. Halla la suma de los números pares: 2, 4, 6, ..., 100. Sol: 2550

6. El número de usuarios de un polideportivo los fines de semana comenzó siendo de 150 personas y aumentó en 30 personas cada fin de semana a partir de entonces. ¿Cuántas personas asistieron al polideportivo a los 6 meses?. Sol: $a_{24}=840$

7. Mar ahorra cada mes 5€ más que el mes anterior. En 5 años sus ahorros sumarán 9330€. Determina lo que ahorró el primer mes y lo que ahorró el último mes. Sol: $a_1=8$; $a_{60}=303$

8. La población mundial ha pasado en 40 años de 2500 millones a 5500 millones de habitantes. Calcula a diferencia anual si suponemos que sigue una progresión aritmética e indica que población habrá dentro de 20 años. Sol: d=75 ; 7000

9. ¿Pertenece el número capicúa 373 a la sucesión 9, 13, 17, 21, ... ? ¿Qué lugar ocupa**?** Sol: Sí, lugar 92

Progresiones Geométricas

1. Prueba cuales de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y cuáles no.Y de las que sean calcula su razón.
a) 5, 5/3, 5/9, 5/27,... b) 3, 12, 60, ... c) 54, 36, 24, 16, ...

Sol: a) Si r=1/3; b) No; c) Si r=2/3

2. El número de bacterias de un cultivo está aumentando un 25 % cada hora. Si al principio había 300000 ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 5 horas? Sol: 915527 bacterias

3. Un padre decide colocar en una hucha 1€ el día que su hijo cumpla un año, e ir duplicando la cantidad sucesivamente en todos los cumpleaños para hacerle un buen regalo a la mayoría de edad. ¿Cuánto tendrá que colocar el día que su hijo cumpla 18 años? ¿Cuánto habrá en la hucha en total? Sol: 2^{17}€, 262143€

4. El valor de un auto se deprecia 18 % cada año. Su precio original fue 19000 €. ¿Cuánto valdrá al cabo de 9 años? Sol: a_{10}=3185

5. Una máquina costó 9000 €. Se calcula que al final de cada año sufre una depreciación igual al 15 % del valor que tiene al principio de ese año. ¿Cuál será su valor al cabo de 5 años? Sol: a_6=3993,35€

6. La población de una ciudad aumenta en 35 % cada 10 años. Si su población en 1940 era de 40000 habitantes, ¿cuál será su población en el año 2020? Sol: a_9=441296 habitantes

7. Antonio dispone de 500 € para el próximo viaje de estudios. Decide ingresarlo en un banco que le ofrece un 2,5 % de interés continuo mensual, es decir que cada mes se incrementa su dinero y se le aplica el %. Si todavía faltan 15 meses para el viaje, ¿cuanto dinerotendrá para entonces? Sol: a_{13}=724,14€

UNIDAD 7. LENGUAJE ALGEBRAICO. ECUACIONES.

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
D2. Modelización	- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y lenguaje algebraico. - Estrategias de deducción de conclusiones a partir de un modelo matemático.
D4. Igualdad y desigualdad	- Relaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana. - Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas. - Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones y sistemas lineales. - Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales mediante el uso de la tecnología.
D6. Pensamiento computacional	- Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones. - Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos. - Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.

Resumen del tema:

1. Álgebra y Lenguaje Algebraico

- El Álgebra es la parte de las matemáticas que utilizas letras para trabajar con números desconocidos.
- El Lenguaje Algebraico es el lenguaje que nos permite traducir situaciones de la vida real a lenguaje matemático mediante el uso de letras en combinación con símbolos y números.
- Una combinación de nºs y letras se denomina expresión algebraica.

Ejemplo: Doble de un nº más su mitad → $2x + \frac{x}{2}$

2. Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica es el nº que resulta de sustituir las letras por los valores indicados y realizar las operaciones.

Ejemplo: Si $P(x,y)=x^2 \cdot y + x$ → $P(2,1)= 2^2 \cdot 1 + 2 = 6$

3. Partes de una expresión algebraica

Una expresión algebraica puede estar formada por uno o varios sumandos llamados monomios. Una suma de monomios se llama polinomio.

$3x$, $4xy$ son Monomios → $3x + 4xy$ es Polinomio

Dada el monomio $3 \cdot x^1 \cdot y^2 = 3xy^2$, entonces:

Coeficiente: Nº de la expresión → 3

Parte literal: Letras de la expresión → xy^2

Grado: Suma de exponentes de las letras → 1+2=3

4. Operaciones con monomios

- Suma $3a + 4a = 7a$; $2x + 3x=5x$; $a + b =$ No
- Resta $6b - 3b = 3b$; $4x – 2x = 2x$; $x – y =$ No
- Producto $3x^2 \cdot 5x^3 =15x^{2+3} =15x^5$; $4a \cdot 5b = 20ab$;
- Cociente $4a^4 : 2a^2 = (4:2)a^{4-2} = 2a^2$

Nota: $3x + 4y =$ No se puede; $3x \cdot 4y= 12xy$

5. Polinomios. $P(x)= a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$

Grado del P(x) → n // Término independiente → a_0

Operaciones con polinomios

Suma/Resta (P(x)±Q(x)) // Producto (P(x) · Q(x)) // División (P(x) : Q(x))

https://www.youtube.com/watch?v=sqSzkXrbmtA

6. División de Ruffini

https://www.youtube.com/watch?v=Rp3LEbCfNFs

Sacar factor común

https://www.youtube.com/watch?v=XvRwXCvZ-Lc

Productos notables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ // $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

7. Resolución de ecuaciones de 1º grado

Para aprender a resolverlas las clasificamos en tipos

- Tipo 1 ($x\pm a=b$). Ej: x-2=3 → x=3+2 → x=5
- Tipo 2 (ax=b). Ej: 2x=8 → x=8/2=4
- Tipo 3 (x/a=b). Ej x/2=6 → x=2·6=12
- Tipo 4 (ax+b=c).Ej:2x+3=5→2x=5-3→2x=2→x=1
- Tipo 5 (varias x). Agrupamos las x en un lado, las unimos y se nos convierte en un tipo anterior.
- Tipo 6 (con paréntesis). Quitar los paréntesis y se convertirá en una ecuación de tipo 5.
- Tipo 7 y 8 (con denominadores). Poner común denominador a toda la ecuación y tacharlo para obtener finalmente una ecuación de un tipo anterior.

8. Resolución de ecuaciones de grado ≥2

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ecuaciones incompletas

$ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x=0$; $x=-b/a$

$ax^2+c=0 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{-c}}{a}$

https://drive.google.com/file/d/1JCQIrHY39q827ifXvFZmGCXyULNe3-ut/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/14tMQGqYxF8whcRWrfyLdYXu2dgWebsJ6/view?usp=sharing

Ecuaciones Bicuadradas

$ax^4+bx^2+c=0 \rightarrow$ Cambio $y=x^2$. Resolver $ay^2+by+c=0$

Con las soluciones y_0 , y_1, despejar $x^2=y_0$; $x^2=y_1$

https://www.youtube.com/watch?v=GpsgWkhieC8

Ecuaciones de grado ≥3

Expresar P(x)=0 y factorizar utilizando Ruffini.

https://drive.google.com/file/d/1ewCcwIW7aA3qPmhWzEHHcupd6jUamRLq/view?usp=sharing

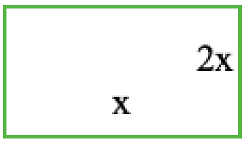
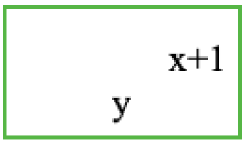
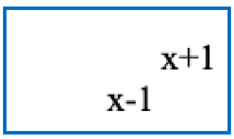
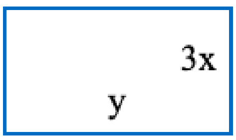
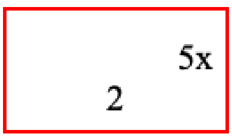
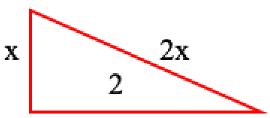
1. Completa la siguiente tabla con la expresión algebraica correspondiente a cada frase:

1) Doble de un número menos su cuarta parte.		30) Dividir 25 en dos partes.	
2) Años de Ana dentro de 12 años.		31)Suma número al cuadrado y su consecutivo	
3) Años de Isabel hace tres años.		32) La suma de un nº y su siguiente al cuadrado	
4) La cuarta parte de un nº más su siguiente.		33) El cociente entre un número y su cuadrado.	
5) Perímetro de un cuadrado.		34) La diferencia de dos impares consecutivos.	
6) Un número par.		35) El producto de un nº con su consecutivo.	
7) Un número impar.		36) Diferencia de 2 nº consecutivos al cuadrado	
8) Un múltiplo de 7.		37) Triple de un número elevado al cuadrado.	
9) Dos números enteros consecutivos.		38) Restar 7 al duplo de un nº al cuadrado.	
10) Dos nº que se diferencian en dos unidades.		39) Roberto es cinco años más joven que Arturo	
11) El doble de un nº menos su quinta parte.		40) Antonio tiene 20 euros más que Juan.	
12) El quíntuplo de un nº más su quinta parte.		41) Carmen supera a Concha en tres años.	
13) La edad de una señora es el doble de la de su hijo menos 5 años.		42) El precio de “m” libros a 49 euros cada uno.	
14) Dos nº se diferencian en 13 unidades.		43) El nº que es la cuarta parte del número “y”.	
15) Dos números suman 13.		44) Dos múltiplos de tres consecutivos.	
16) Un hijo tiene 22 años menos que su padre.		45) El 25% de un número.	
17) Dos números cuya suma es 25.		46) Lo que cuestan “c” metros de cuerda si cada metro cuesta 8 euros.	
18) La cuarta parte de la mitad de un número.		47) Beneficio al vender un artículo que cuesta “a” euros por “b” euros.	
19) Dimensiones de un rectángulo en el que su largo tiene 6 metros más que el ancho.		48) Lo que cuesta un lápiz si 15 cuestan “p” euros.	
20) Un tren tarda tres horas menos que otro en ir de Madrid a Barcelona.		49) El número que representa 12 unidades más que el número “x”.	
21) Repartir x manzanas entre seis personas.		50) La edad de Juan es ocho veces la de Rafael.	
22) Un nº es 10 unidades mayor que otro.		51) Nº que representa 20 unid. menos que “h”	
23) Un número menos su mitad más su doble.		52) Nº que es tres veces mayor que “n”.	
24) Un número 5 unidades menor que otro.		Rebaño de “x” ovejas: 53) Nº de patas.	
25) El cuadrado de un número.		54) Número de patas si se mueren 6 ovejas.	
26) Un número y su opuesto.		55) Nº de ovejas después de nacer 18 corderillos	
27) Un número y su inverso.		56) Número de ovejas después de dos años si el rebaño crece un cuarto al año.	
28) Veinticinco menos el cuadrado de un nº.		57)Ana tiene “x” €. Enrique tiene 100€ más.	
29) El cuadrado de un nº menos su cuarta parte.		58) Susana tiene el doble de Enrique.	
30) Dividir 25 en dos partes.		59) Charo tiene 400 euros menos que Susana.	

2. Traduce las siguientes frases a lenguaje algebraico:

a) El quíntuplo de un número menos 6 unidades.	
b) El cuádruple del resultado de sumar 3 unidades a un número.	
c) Si ando 2/7 del camino más 3 km habré andado la tercera parte del camino.	
d) El perímetro de un rectángulo cuyo largo es el doble que el alto.	
e) El triple de un número menos la mitad del número.	
f) El doble del resultado de restar 5 al número.	
g) El producto de dos números seguidos.	
h) Un múltiplo de 5 mas 4.	
i) La mitad del cuadrado de un número más 5 unidades.	
j) La suma de la edad de un padre y un hijo hace 3 años.	
k) La edad de María dentro de 5 años será el triple que la de su hermano.	
l) Envasar 1500 litros de vino en botellas de 1 litro y de 2 litros.	
m) El cuadrado de la diferencia de 2 números es 4.	

3. Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estas figuras.

 Perímetro: Área:	 Perímetro: Área:
 Perímetro: Área:	 Perímetro: Área:
 Perímetro: Área:	 Perímetro: Área:

4. Inventa un problema cuya solución sea la siguiente ecuación $x+(x+1)+(x+2)= 63$

5. Inventa un problema cuya solución sea la siguiente ecuación $x+x/3= 40$

6. Inventa un problema cuya solución sea $x\cdot(x+3)=240$

7. Traduce a lenguaje algebraico las siguientes situaciones de la vida real:

a) De un barril de vino sacan 1/3 de lo que le cabe, luego 2/5 de lo que le queda y al final 10 litros. ¿Qué expresión representa el vino que han sacado?

b) Compré dos abrigos por 80€. Uno estaba rebajado un 20% y el otro un 30%. Indica la expresión algebraica que representa el precio de cada uno.

c) Un bocadillo vale 1€ más que una botella de agua. Por 3 bocadillos y dos aguas he pagado 8€.

8. Traduce a lenguaje algebraico las siguientes situaciones de la vida real:

a) La expresión 10a+b representa un número de 2 cifras. Escribe en forma algebraica un número de 3 cifras.

b) Un grupo de amigos quiere comprar un regalo a María y tocan a 12€ cada uno. Si fueran 3 amigos más tocarían a 4€ menos cada uno. ¿Qué expresión algebraica representa la igualdad entre las dos frases anteriores?.

9. Inventa un problema de la vida real cuya solución sea $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+3y=20 \end{cases}$

TEORÍA. Monomios. Coeficiente, parte literal y grado.

10. Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Variables	Grado
$-9x^4$				
$2x^4y^3$				
$4wt^2$				
$4x^2y$				
	23	ab^2		
-6hg				
7…		qg		

TEORÍA. Operaciones con monomios.

11. Opera con los siguientes monomios:

a) $x + x =$	b) $3x^3-2x^3-5x^3=$	c) $a+4a =$	d) $4n - 6n=$
e) $2m^5+m^5+4m^5 =$	f) $6c - 8c +2c =$	g) $6a -3b +2a +7b=$	h) $3t-5t+t=$

12. Opera con los siguientes monomios:

a) $3x·5x =$	b) $(-a) ·4a=$	c) $\frac{x^2}{2} \cdot 6x=$	d) $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^3}{3}=$
e) $(-3x^2) ·6x =$	f) $-xy^3·5y^2 =$	g) $14a^6 : 2a^2=$	h) $3t-5t+t=$

13. Simplifica los siguientes cocientes entre monomios:

a) $\frac{8x^3y^2}{2xy} =$	b) $\frac{6a^4b^3}{3ab^2} =$

TEORÍA. Polinomios. Grado y término independiente.

14. Indica el grado y el término independientes de los siguientes polinomios:

Polinomio	Grado	Término independiente
$-3x^2y^3- 4x^4 + 3x^2y + 6xy$		
$x^3- 4x^2- x + 7 + 2x^3y^3$		
$x^3y^6 - 11x^2 - x^2y^8 + 6$		

Operaciones con polinomios

15. Dados $P(x)=2x^3 - x^2 + 4x - 1$, $Q(x)=-x^4 - x - 5$ y $R(x)=-3x+2$. Calcular:

a) P+Q+R
b) P-Q
c) $P \cdot R$

16. Calcula las siguientes operaciones con polinomios:

a) $3\cdot(2x+5)=$	b) $7\cdot(x-3x^2)=$
c) $x^2\cdot(5x-3)=$	d) $3x\cdot(x^2-2x)=$
e) $(4+x)\cdot(3x-2)=$	f) $(2x-3)\cdot(x+4)=$
g) $(x+1)\cdot(2x+3)-2\cdot(x^2+1)$	h) $(2x-5)\cdot(x+2)+3x\cdot(x+2)$

TEORÍA. Valor numérico de un polinomio.

17. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones en los números que se indican:

a) P(x)=$\frac{x-2}{x+5}$ en x=1	b) Q(x)=x^2-2x+6 en x=0	c) R(x)=$\frac{x+2}{x-4}$ en x=2
d) S(x,y)=$\frac{x-y}{x+y}$ en x=1, y=2	e) T(x)=xy^2-xy en x=2, y=-1	f) U(x)=$\frac{x-3}{x+1}$ en x=-2

<u>Aplicación de los polinomios a la vida real</u>

18. La población de un cierto país, expresada en millones de habitantes se puede aproximar por el polinomio P(t)= – 0,01t^2 – 0,062t +127,7 donde t=0 representa el año 2000 y en general t representa los años trascurridos desde ese año.

a) Calcula cuántos habitantes habrá en 2025 (redondea el resultado).

b) ¿Cuántos habitantes habrá en 2030? (redondea el resultado).

c) En 2025, el 23,1% de las personas serán mayores de 65 años. ¿Cuántas personas serán?

19. Una compañía de agua tiene los siguientes precios según el consumo de agua (mira la tabla). Para el cálculo de la factura tiene la siguiente fórmula (sin incluir el IVA en ese precio): **V=5+c·p**, con "c" el consumo en m^3 y "p" el precio según el tramo.

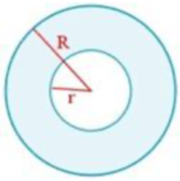
TRAMO (m^3)	Precio (€/m^3)
0-5	0,6
6-10	1
11-15	1,8
16-20	2,8
>20	4,5

a) Si Inés consumió 17 m^3, cuanto le costó sin IVA.

b) Si Juan consumió 24 m^3, cuanto pagó con 21% de IVA.

20. Un mecánico diseñador de coches necesita conocer el área de una arandela metálica de radio exterior R y radio interior r.

a) Determina el polinomio que representa el área de la arandela.



b) Suponiendo que r es el 40 de R, reescribe el polinomio sólo en términos de R.

c) Si R=10 cm, ¿qué área tendrá la arandela?

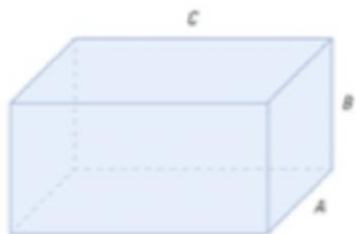
21. Una empresa se dedica a fabricar memorias USB. El coste en euros de fabricar "x" unidades viene dado por el polinomio $C(x)=(-1/4)x^2+2x+10$. La ganancias de vender "x" unidades viene dado por el polinomio $G(x)=(-3/5)x^2+3x+2$.

a) Calcula el polinomio que representa los beneficios B(x) de vender "x" unidades.

b) ¿Qué beneficios se obtendrán al vender 25 unidades?

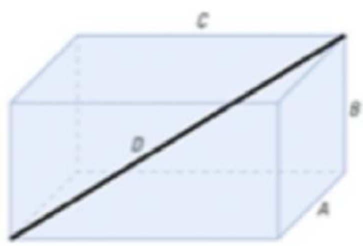
c) ¿Qué beneficios se obtendrán al vender 125 unidades?.

22. Una caja de cartón tiene forma de prisma rectangular.



a) ¿Qué expresión algebraica nos da su volumen?. Esta expresión, ¿es un monomio o un polinomio?.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica de su diagonal?



TEORÍA. Productos notables.

23. Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x+2)^2=$	b) $(2y-1)^2=$
c) $(x-3)(x+3)=$	d) $(2a+3b)^2=$
e) $(3b-7)^2=$	f) $(2x+5)(2x-5)=$
g) $(3x+4)^2=$	h) $(1-2x)^2=$

24. Transforma en productos notables las siguientes expresiones:

a) $4x^2+8x+4=$	b) $x^2-6x+9=$
c) $9x^2-36=$	d) $a^2-2a+1=$
e) $x^2+2xy+y^2=$	f) $b^2-25=$
h) $x^4+2x^2+1=$	g) $4x^2-12xy+9y^2=$

TEORÍA. Sacar factor común.

25. Extrae factor común:

a) $18x^4+32x^2=$	b) $6x^2+12x-24=$
c) $6x^3-10x^2-8x=$	d) $2xy+6x^2y-4x^2y^2=$
e) $9a+6a^2+3a^3=$	f) $2x-6xy-4zx=$
g) $2x^2-4x^3+8x^4=$	h) $6x^2(x+1)-3x^2(x-1)=$
i) $2xyz+10xz+4yz=$	j) $3(x+1)+6(x+1)^2=$

Ecuaciones de grado 1

TEORÍA. Recordamos como resolver ecuaciones de grado 1

	Visualiza el vídeo 1 de Álgebra “Ecuaciones de grado 1” y completa los siguientes apartados:	

i) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación 3(x+1)-4(x-2)=x+7

ii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $\frac{3x-1}{20} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{4(x+2)}{15}$ - 5

iii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación 4x-6=4(x+3)

iv) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación 4x-6 = 4(x-2)+2

1. Comprueba si "3" es solución de alguna de estas ecuaciones:

a) $3x - 2 = 5x - 8$	b) $x^2 - 2x = 1$
c) $2^x = 8$	d) $2^{x+1} = 27$
e) $x^3 - x^2 = 18$	f) $\sqrt{5x+1} = 4$
g) $\sqrt{6x+7} = 7$	h) $(2x+1)^2 = 5x^2 + 2$

2. Tanteando, indica cuál es la solución de cada una de estas ecuaciones:

a) $2x^2 = 8$	b) $2 \cdot 10^x = 2000$
c) $(x-2)^2 = 64$	d) $\sqrt{3x+1} = 4$
e) $x^2 + x = 2$	f) $5^{x-1} = 25$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones	Comprobación
a) $2+5(x-13)=x-3$ (Sol:15)	

b) 2(1+x)-3(x-1)-6=x-11 (Sol:5)	
c) -5(2-x)+3(2x+4)=(4x-2)·5 (Sol: 4/3)	
d) $\frac{x+1}{5}+\frac{x-2}{6}=1$ (Sol: 34/11)	
e) $\frac{2x+4}{4}-2(x-3)=5-\frac{7x}{2}$ (Sol: -1)	
f) $\frac{x-2}{6}-\frac{3-2x}{5}=6-x$ (Sol: 208/47)	

Problemas de ecuaciones de grado 1

4. Calcula un número que sumado con su anterior y con su siguiente dé 114. (Sol: 38)

5. Halla un número que multiplicado por 3, sumándole luego 10, multiplicando lo obtenido por 5, agregándole 10 y multiplicando finalmente el resultado por 10 da 750. ¿Qué número es?. (Sol:1)

6. La suma de tres números es 72. El segundo es 1/5 del tercero y el primero excede al tercero en 6. Hallar dichos números. (Sol: 6, 36 y 30)

7. Halla 3 números impares consecutivos que sumen 105. (Sol: 33, 35 y 37)

8. Una madre tiene el cuádruplo de la edad de su hijo, y dentro de cinco años, tendrá el triple de años que él. Indicar que edad tienen ambos. (Sol: Madre 40 años e hijo 10 años)

9. Un padre tiene 47 años y su hijo 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea triple que la del hijo?. (Sol: 7 años)

10. En un rectángulo la base mide 18 cm más que la altura y el perímetro mide 76 cm ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? . (Sol: 10x28 cm)

11. Un abrigo ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma el precio inicial ha disminuido 4,8€. ¿Cuál era el precio inicial? (Sol: 60€)

Ecuaciones de grado 2

TEORÍA. Resolver ecuaciones de grado 2

Situaciones de la vida real en las que aparecen ecuaciones de 2º grado

Visualiza el vídeo 2 de Álgebra "Ecuaciones de grado 2" y completa los siguientes apartados:

(i) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $x^2-5x+6=0$

(ii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $x^2+x-12=0$

(iii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $x^2-5x=0$

(iv) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $2x^2-18=0$

(v) Inventa una ecuación de 2º grado que tenga como soluciones 7 y 8

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-7x+12=0$ (Sol: 3 y 4)
b) $x^2+x+1=0$ (Sol: Sin solución)
c) $x^2-6x = -9$ (Sol: -3)
d) $x^2= 5x+6$ (Sol: 6 y -1)
e) $2x^2+7x+6=0$ (Sol: -2 y 3/2)
f) $3x^2-16x+5=0$ (Sol: 5 y 1/3)

g) $x^2-4=0$ (Sol: 2 y -2)
h) $x^2+3x=0$ (Sol: 0 y -3)
i) $3x^2-27=0$ (Sol: 3 y -3)
j) $2x^2-4x=0$ (Sol: 0 y 2)
k) $6x^2-42x=0$ (Sol: 2 y -2)

Visualiza el vídeo 3 de Álgebra "Ecuaciones de grado 2 con operaciones" y completa los siguientes apartados:

(i) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $(x+1)^2-(x-3)\cdot(x+3)=0$

(ii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación (2x+2)·(x-6)-(x+3)·(x-5)=0

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x+4)^2-(x-3)^2=-7$

(Sol: -1)

b) $7(x-3)-5(x^2-1)=x^2-5(x+2)$

(Sol: 1)

c) $1-\frac{x^2}{3}-\frac{3x+2}{3}=1$

(Sol: -2 y -1)

Problemas de ecuaciones de grado 2

14. ¿Cuánto tiempo tardará en caer una piedra desde lo alto de un barranco de 30 metros de alto?. Utiliza la fórmula $y=1/2 \cdot g \cdot t^2$ con $g=9{,}8 m/s^2$.

15. ¿Cuánto tiempo tardará en caer una pelota desde 2 metros de alto?. Utiliza la fórmula $y=1/2 \cdot g \cdot t^2$ con $g=9{,}8 m/s^2$.

16. Un ciclista va a una velocidad de 7,2 km/h y frena de pronto con una aceleración de -0,33 m/s^2 hasta pararla recorriendo 6,06 m. ¿Cuánto tiempo tardará en parar la bici?. (Nota: La fórmula para el MRUA es $x=x_0+v_0t + ½\, a\, t^2$. Utiliza la velocidad inicial v_0 expresada en m/s).

17. La suma de un número y su cuadrado es 30. Hallar dicho número. (Sol: 5)

18. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 3 m menos que la hipotenusa y 3 m más que el otro. Hallar los lados y el área del triángulo. (Sol: 12, 9, 15. Área=54 m2)

19. Un campo rectangular tiene 80 m^2 de área y 2 m de largo más que de ancho. Halla los lados. (Sol:8 y 10)

20. Halla el perímetro de un cuadrado sabiendo que su área es 64 m^2. (Sol: 32 m)

Ecuaciones de grado >2

TEORÍA. Ecuaciones bicuadradas.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4-5x^2+4=0$

(Sol: 1, -1, 2 y -2)

b) $x^4-10x^2+9=0$

(Sol: 1, -1, 3 y -3)

c) $x^4-4x^2-5=0$

(Sol: $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$)

TEORÍA. Ecuaciones de grado >2 por el método de Ruffini.

Visualiza el vídeo 4 de Álgebra "Regla de Ruffini" y completa los siguientes apartados:

1. Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $x^3-4x^2+x+6=0$

2. Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $x^4+2x^3-x-2=0$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de Ruffini:

a) $x^3-3x+2=0$
b) $x^4+3x^2-4x=0$
c) $x^3-7x+6=0$

UNIDAD 8. SISTEMAS.

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
D2. Modelización	- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y lenguaje algebraico.
D4. Igualdad y desigualdad	- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas. - Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones y sistemas lineales. - Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales mediante el uso de la tecnología.
D6. Pensamiento computacional	- Generalización de procesos de resolución de problemas a otras situaciones. - Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos.

Resumen del tema:

Sistemas de ecuaciones
Casos al resolver un sistema de ecuaciones:
- Sistema Compatible Determinado (SCD) → Tienen una única solución
- Sistema Compatible Indeterminado (SCI) → Tiene infinitas soluciones (alguna ecuación 0=0)
- Sistema Incompatible (SI) → Sin soluciones (alguna ecuación se convierte en nº = 0)

Métodos de resolución: Sustitución, igualación y reducción.

Método gráfico: Despejar y en ambas ecuaciones, crear tablas de valores y representar gráficamente.

Sistemas de ecuaciones

TEORÍA. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

	Visualiza el vídeo 5 de Álgebra "Sistemas de ecuaciones" y completa los siguientes apartados:	

(i) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $\begin{cases} 3x + 2x = 5 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$ por sustitución.

(ii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $\begin{cases} 3x + 2x = 5 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$ por reducción.

(iii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación $\begin{cases} 3x + 2x = 5 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$ por igualación.

(iv) Comprueba que x=1 , y=1 es solución del sistema $\begin{cases} 3x + 2x = 5 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$ tal y como se hace en el vídeo.

(v) Comenta los dos casos especiales de los que se habla en el vídeo a la hora de resolver sistemas…

1. Resuelve los siguientes sistemas por sustitución:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

(Sol: x=1, y=1)

b) $\begin{cases} 7x - 2y = 3 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

(Sol: x=1, y=2)

c) $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 5x - 3y = 19 \end{cases}$

(Sol: x=2, y=-3)

2. Resuelve los siguientes sistemas por igualación:

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$

(Sol: x=4, y=5)

b) $\begin{cases} x-2y=1 \\ x+6y=-1 \end{cases}$

(Sol: x=1/2, y=1/4)

3. Resuelve los siguientes sistemas por reducción:

a) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-3y=-2 \end{cases}$

(Sol: x=1, y=1)

b) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 6x+5y=3 \end{cases}$

(Sol: x=-2, y=3)

c) $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

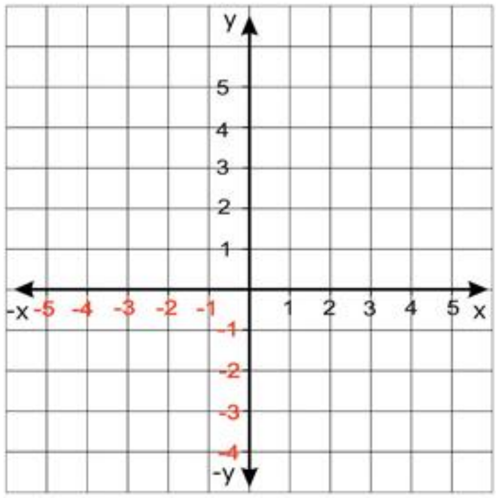
(Sol: x=3, y=-1)

4. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

x	y

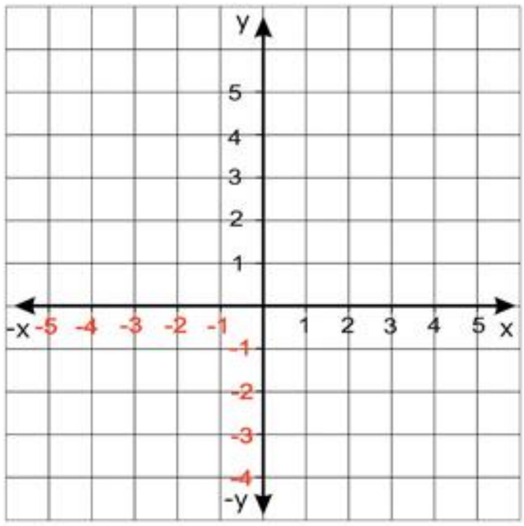
x	y



b) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x+2y=5 \end{cases}$

x	y

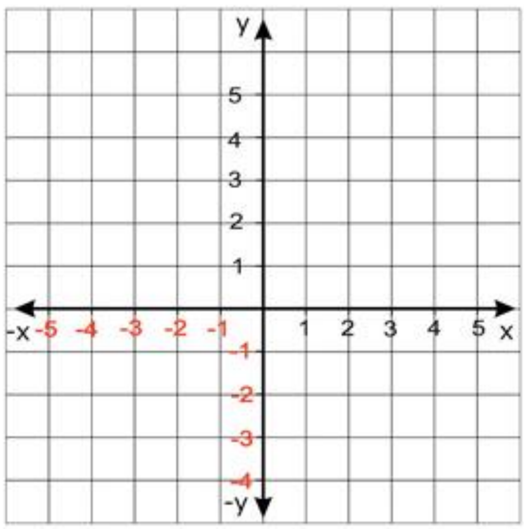
x	y



c) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

x	y

x	y



Problemas de sistemas

5. Completa la siguiente tabla plateando los sistemas que permiten resolver los siguientes problemas:

Problemas	Planteamiento
a) Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?	{
b) La suma de dos números es 12 y la mitad de uno de ellos es igual al doble del otro. ¿Qué números son?	{
c) Tenemos dos números cuya suma es 0 y si a uno de ellos le sumamos 123 obtenemos el doble del otro. ¿Qué números son?	{
d) Hallar un número de dos cifras que cumpla que la segunda cifra es el doble de la primera y que la suma de las cifras es 12.	{
e) La suma de los goles marcados por dos equipos es 30, y cuando ambos e quipos hayan marcado 5 goles más, la diferencia entre ambos equipos será de 2 goles. Halla los goles marcados por cada equipo.	{
f) En un corral, entre gallinas y ovejas hay 27 animales, y contando las patas hay 76 patas en total. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?	{
g) En un examen tipo test, las preguntas correctas suman un punto y las incorrectas restan medio punto. En total hay 100 preguntas y no se admiten respuestas en blanco (hay que contestar todas). La nota de un alumno es 8.05 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.	{
h) En un aparcamiento hay 90 vehículos, entre coches y motos. Si salieran 40 coches y 10 motos, el número de coches igualaría el número de motos. Halla el número de coches y de motos que hay en el aparcamiento.	{
i) Una chica compra 2 refrescos y 3 bolsas de pipas por 3,50 €, y un chico compra 3 refrescos y 5 bolsas de pipas por 5,50 €. Halla lo que cuesta cada refresco y cada bolsa de pipas.	{
j) Con dos tipos de vino de 3,50 €/l y de 1,50 €/l queremos obtener un vino de 2,50 €/l. ¿Cuántos litros de cada vino debemos mezclar para obtener 50 litros del nuevo vino?	{

k) Jorge tiene 27 años más que su hija Pilar. Dentro de 8 años, la edad de Jorge será el doble que la de Pilar. ¿Cuántos años tiene cada uno?	$\begin{cases} \\ \end{cases}$
l) Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime. Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?	$\begin{cases} \\ \end{cases}$
m) Hemos comprado 3 canicas de cristal y 2 de acero por 1,45€ y, ayer, 2 de cristal y 5 de acero por 1,7€. Determinar el precio de una canica de cristal y de una de acero.	$\begin{cases} \\ \end{cases}$
n) Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.	$\begin{cases} \\ \end{cases}$
ñ) Manuel tiene 66 años más que su hermana y sus edades suman 38. ¿Qué edad tiene cada hermano?	$\begin{cases} \\ \end{cases}$
o) Tomás utiliza en el gimnasio 9 pesas, siendo algunas de 5kg y otras, de 10kg. ¿Cuántas pesas de cada utiliza si en total levanta 65kg?.	$\begin{cases} \\ \end{cases}$
p) En un concierto benéfico se venden todas las entradas y se recaudan 23000€. Los precios de las entradas son 50 € las normales y 300 € las vip. Calcular el número de entradas vendidas de cada tipo si el aforo del establecimiento es de 160 personas.	$\begin{cases} \\ \end{cases}$
q) Hemos comprado 18 litros de pintura en una tienda de bricolaje donde el precio de la pintura azul es 12€/L y el de la pintura verde es 13.5€/L. ¿Cuántos litros de pintura de cada color hemos comprado gastando 234€?	$\begin{cases} \\ \end{cases}$
r) Con una cuerda de 34 metros se puede dibujar un rectángulo (sin que sobre cuerda) cuya diagonal mide 13 metros. Calcular cuánto mide la base y la altura de dicho rectángulo.	$\begin{cases} \\ \end{cases}$

6. María ha adquirido 2 camisetas y un pantalón por un total de 22 euros, y Pedro ha pagado 39 euros por 3 camisetas y 2 pantalones. ¿Cuál es el precio de cada uno de los artículos por separado? (Sol: 5€ y12€)

7. En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que las moscas tienen 6patas y las arañas 8 patas). (Sol: 30 moscas y 12 arañas)

8. La suma de las edades de mi abuelo y mi hermano es de 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edades tienen cada uno de ellos?. (Sol: Abuelo 53 años y hermano 3 años)

9. Tengo 30 monedas. Unas son de cinco céntimos y otras son de un céntimo. ¿Puedo tener en total 78 céntimos?. (Sol: 12 monedas de 5 céntimos y 18 de 1 céntimo)

10. Paco tiene 80 años y me contó que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese 100€ a cada nieta y 50€ a cada nieto, repartiría 650 €. ¿Cuántos nietos y nietas tiene Paco?. (Sol: 5 nietas y 3 nietos)

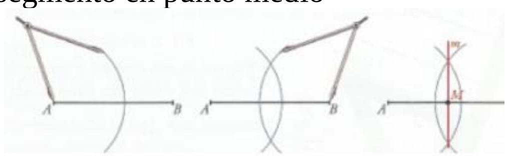
UNIDAD 9. GEOMETRÍA PLANA Y EN EL ESPACIO

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
B1. Medición	- Longitudes, áreas y volúmenes de figuras tridimensionales - Representaciones planas de objetos tridimensionales en problemas de áreas.
B2. Estimación y relaciones	- Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones basadas en estimaciones.
C1. Figuras geométricas de 2 o 3 dimensiones.	- Semejanzas y Pitágoras - Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (Geogebra, Realidad Aumentada, …)
C2. Localización y sistemas de representación	- Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
C3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.	- Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. - Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia o vida diaria.

Resumen del tema:

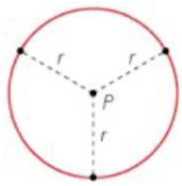
Lugar geométrico. Se llama lugar geométrico al conjunto de todos los puntos que cumplen una determinada propiedad geométrica.

Mediatriz: Es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a los extremos de un segmento es la misma.
La Mediatriz es la perpendicular al segmento en punto medio



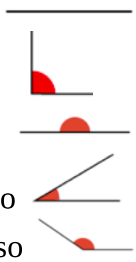
Bisectriz: Es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a los lados de un ángulo es la misma.
La Bisectriz es la semirecta que divide al ángulo en 2 partes iguales.

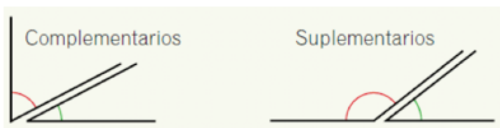
Circunferencia: Es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto P es r.

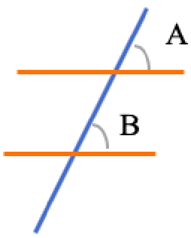


Relaciones angulares

Ángulo nulo
Ángulo recto
Ángulo llano
Ángulo agudo
Ángulo obtuso



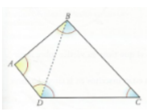




Si 2 paralelas son cortadas por una recta transversal, los ángulos que determinan se denominan ángulos correspondientes.
A y B son **ángulos correspondientes iguales**

Suma ángulos interiores de polígono convexo

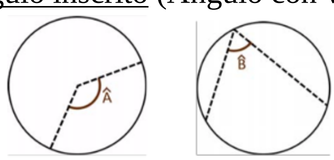
Suma ángulos interiores n-ágono = 180º(n-2)



Ejemplo: n=4 lados

Los ángulos interiores suman 180*(4-2)=360º

Ángulo central (Ángulo con vértice en el centro circunfer.)
Ángulo inscrito (Ángulo con vértice en la circunferencia)



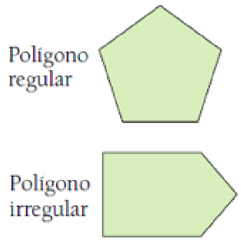
A es ángulo central
B es ángulo inscrito

Los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco miden los mismo.

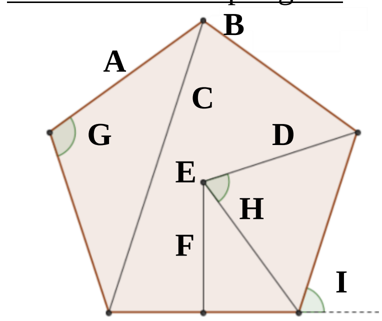
La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que determina.  B= A/2

Polígonos

Polígono: Figura plana y cerrada limitada por segmentos.
P.Regular (lados y ángulos iguales).

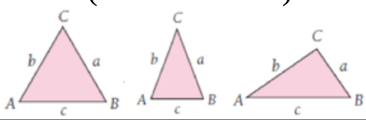


Elementos de un polígono

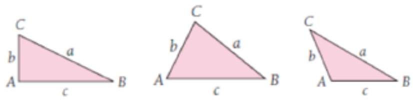


A - Lado
B - Vértice
C - Diagonal
D - Radio
E - Centro
F - Apotema
G - Ángulo interior
H - Ángulo central
I - Ángulo exterior

Tipos triángulos según lados
- Equilátero (3 lados iguales)
- Isósceles (2 lados iguales)
- Escaleno (lados distintos)

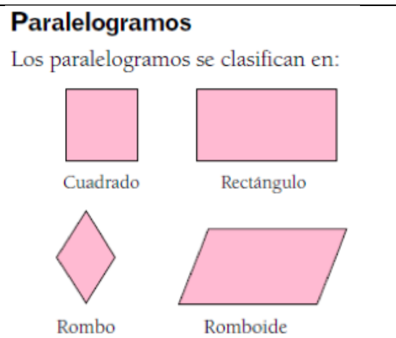


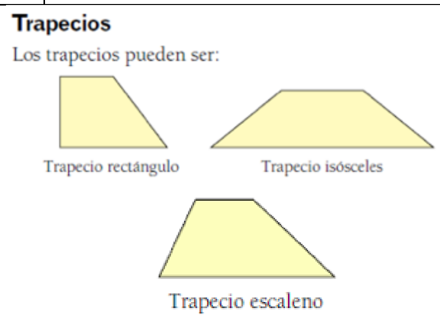
Tipos triángulos según ángulos
- Rectángulo (ángulo recto)
- Acutángulo (ángulos agudos)
- Obtusángulo (ángulo obtuso)



Propiedad triángulos: Cada lado es menor que la suma de los otros dos. ¿Se puede construir triángulo de lados 3, 5 y 10 cm?.

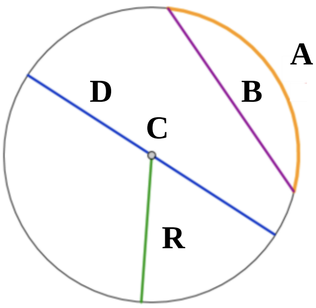
Cuadriláteros (Polígonos 4 lados)
Se clasifican en:
- Paralelogramos (lados paralelos 2 a 2)
- Trapecios (solo 2 lados paralelos)
- Trapezoides (ningún lado paralelo)





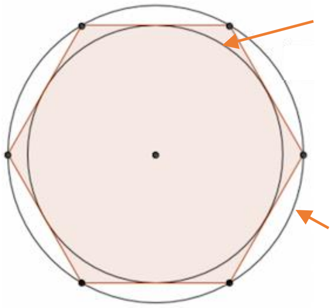
Circunferencia y Círculo

Elementos de una circunferencia



A - Arco
B - Cuerda
C - Centro
D - Diámetro
R – Radio

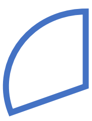
Circunferencias en un polígono



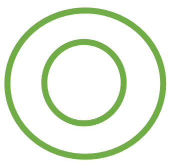
Circunferencia inscrita

Circunferencia circunscrita

Sector y Corona Circular

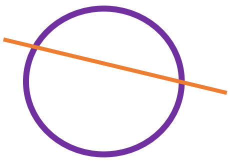


Sector Circular

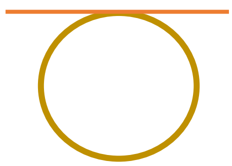


Corona Circular

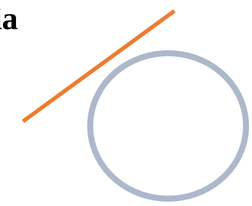
Posiciones de una recta y un circunferencia



Recta Secante



Recta Tangente

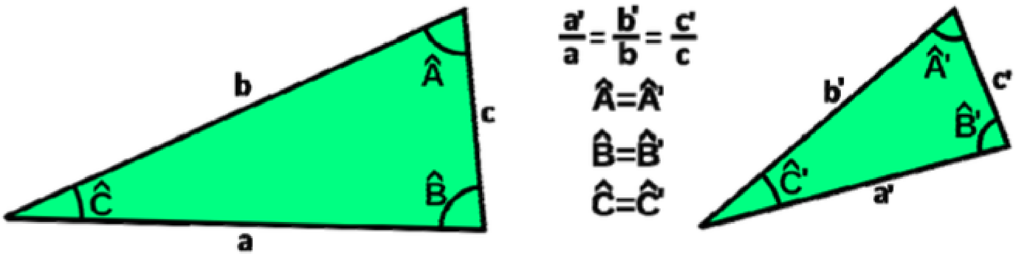


Recta Exterior

Semejanzas

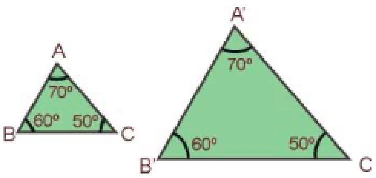
Polígonos semejantes. Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales.

Triángulos semejantes. Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados proporcionales ($\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$) y sus ángulos iguales (A=A´, B=B´y C=C´)

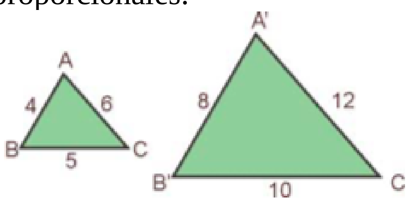


Criterios de semejanza de triángulos:

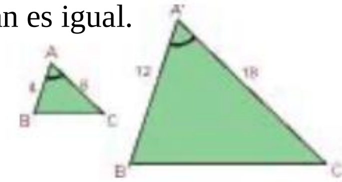
Criterio 1. Dos triángulos son semejantes si tienes 2 ángulos iguales.



Criterio 2. Dos triángulos son semejantes si tienes los 3 lados proporcionales.

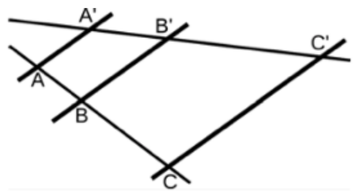


Criterio 3. Dos triángulos son semejantes si tienen 2 lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.



Teorema de Tales. Si dos rectas son cortadas por varias paralelas, los segmentos que determinan son proporcionales.

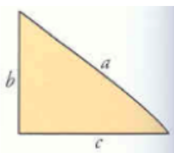
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$



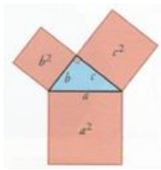
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



Criterio clasificación triángulos

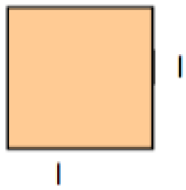
Triángulo acutángulo
($a^2 < b^2 + c^2$)

Triángulo rectángulo
($a^2 = b^2 + c^2$)

Triángulo obtusángulo
($a^2 > b^2 + c^2$)

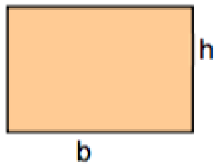
Perímetros y Áreas de figuras planas

CUADRADO



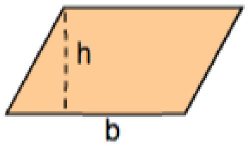
$P = 4l$
Área $= l^2$

RECTÁNGULO



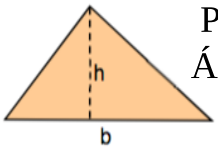
$P = 2b+2h$
Área $= b \cdot h$

PARALELOGRAMO



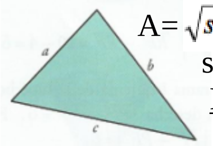
P=Suma Lados
Área= $b \cdot h$

TRIÁNGULO (con la altura)



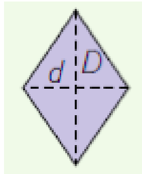
P=Suma Lados
Área= $b \cdot h/2$

TRIÁNGULO (con los 3 lados)



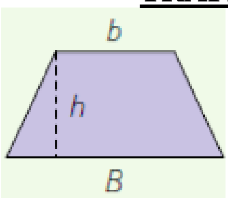
$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$s = (a+b+c)/2$
Fórmula de Herón

ROMBO



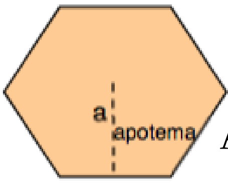
P=Suma Lados
Área= $D \cdot d/2$

TRAPECIO



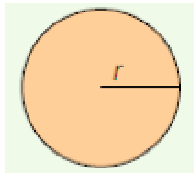
P=Suma Lados
$A = (B+b) \cdot h/2$

POLÍGONO REGULAR



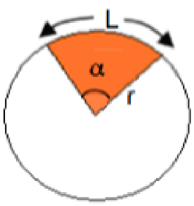
P=Suma Lados
A= Perímetro$\cdot a/2$

CIRCUNFERENCIA



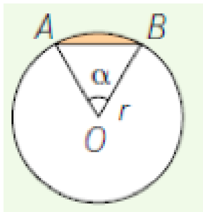
$P = 2 \cdot \prod \cdot r$
Área= $\prod \cdot r^2$

SECTOR CIRCULAR



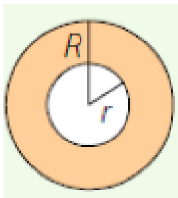
$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$
$$L = \frac{2\pi r \alpha}{360}$$

SEGMENTO CIRCULAR



$A = A_{sector} - A_{OAB}$

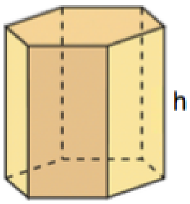
CORONA CIRCULAR



$A = A_{Grande} - A_{Pequeño}$

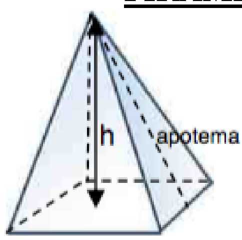
Poliedros

PRISMAS



$$V = A_{base} \cdot h$$
$$A = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

PIRÁMIDES

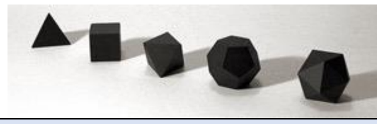


$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$
$$A = A_{lateral} + A_{base}$$

SÓLIDOS PLATÓNICOS

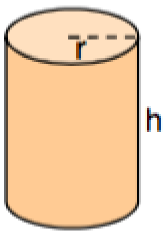
Sólido Platónico (caras polígonos regulares y cada vértice concurre con el mismo número de caras)

Tetraedro(4), Cubo(6), Octaedro(8), Dodecaedro (12), Icosaedro(20)



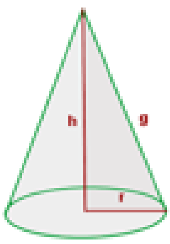
Cuerpos de Revolución

CILINDRO



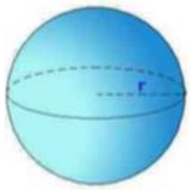
$$V = A_{base} \cdot h$$
$$A = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

CONO



$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$
$A = A_{Lateral} + A_{Base} =$
$\prod \cdot r \cdot g + \prod \cdot r^2$

ESPERA



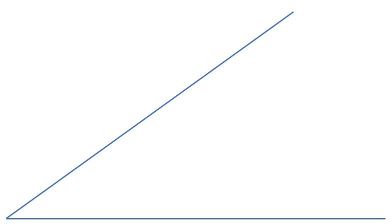
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$
$$A = 4\pi r^2$$

Reconoce tipos de polígonos, tipos triángulos, cuadriláteros, círculo, conceptos de rectas y ángulos, …

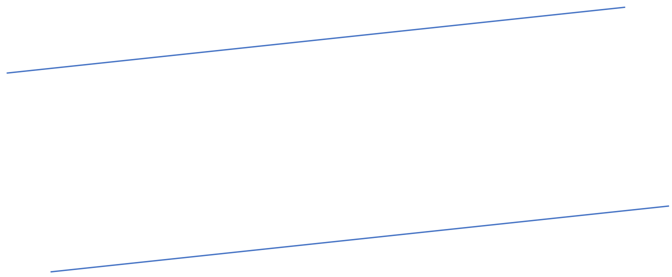
TEORÍA. Lugares geométricos.

1. Construye el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del siguiente segmento:

2. Construye el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del siguiente ángulo:



3. Dadas dos rectas paralelas r y s, calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas.



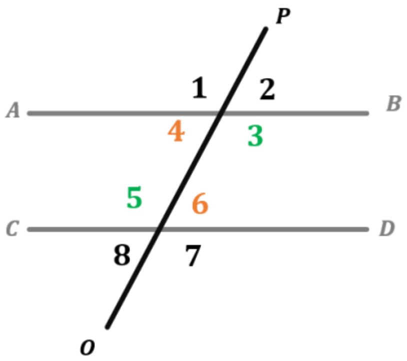
4. Cuando en una acampada se sientan alrededor del fuego lo hacen formando un círculo. ¿Por qué?

Relaciones angulares

5. Representa los siguientes ángulos:

Ángulo Nulo	Ángulo Recto	Ángulo Llano
Ángulo Completo	Ángulo Agudo	Ángulo Obtuso
Dos ángulos consecutivos	Dos ángulos adyacentes o suplementarios	Dos ángulos opuestos por el vértice
Dos ángulos complementarios	Dos ángulos correspondientes	Tres ángulos consecutivos que formen un ángulo recto

6. Responde a las siguientes preguntas:



a) Ángulos opuestos por el vértice:_________________________________

b) Ángulos correspondientes: _________________________________

c) Ángulos alternos internos: _________________________________

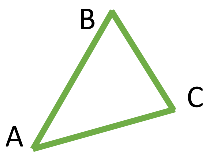
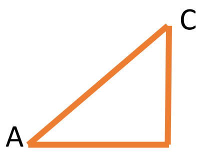
d) Ángulos alternos externos: _________________________________

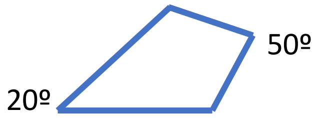
e) Si (1) = 115º, calcula:

(2)= ____ (3)= ____ (4)= ____ (5)= ____ (6)= ____ (7)= ____ (8)= _____

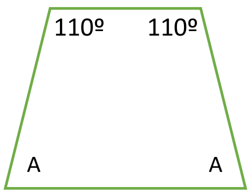
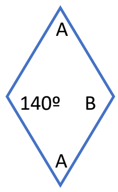
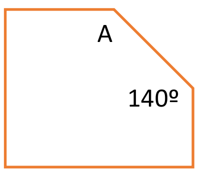
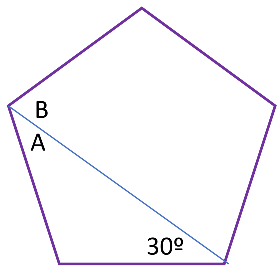
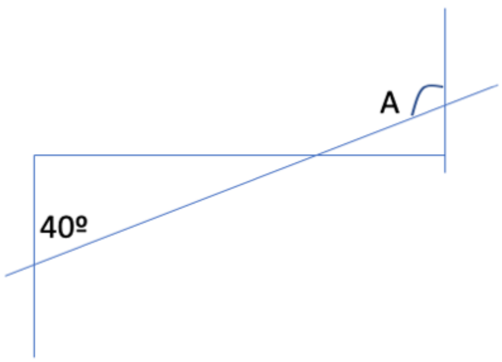
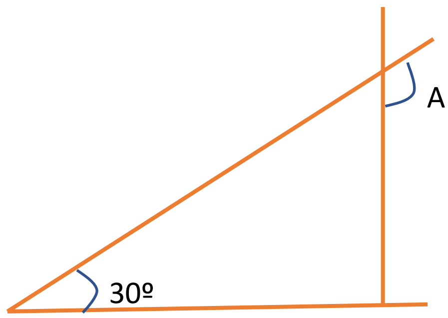
TEORÍA. Suma de los ángulos interiores de un polígono.

7. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Si dos de los ángulos interiores de un triángulo miden $\hat{A}$=40º y $\hat{B}$=65º. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?	
b) En un triángulo rectángulo, si $\hat{A}$=40º, ¿cuánto mide $\hat{C}$?	
c) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un rectángulo?	
d) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un pentágono regular?	
e) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un heptágono regular?	

f) ¿Cuánto miden los dos ángulos iguales de esta cometa? 	
g) ¿Es posible construir un cuadrilátero que tenga sólo 3 ángulos rectos?. Justifica tu respuesta.	

8. Calcula los valores de los ángulos desconocidos:

TEORÍA. Ángulos centrales e inscritos en la circunferencia.

a) Dibuja un ángulo central en una circunferencia.

b) Dibuja un ángulo inscrito en una circunferencia.

c) ¿Qué tienen en común todos los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco?.

d) ¿Cuánto mide un ángulo inscrito respecto al ángulo central que determina?.

9. Dibuja y Justifica basándote en las propiedades del ejercicio anterior que todo ángulo inscrito en la circunferencia cuyos lados pasen por los extremos de un diámetro es un ángulo recto (mide 90º).

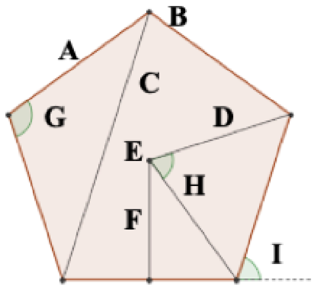
10. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?.

TEORÍA. Polígonos. Elementos y tipos.

a) ¿Qué es un polígono? ____

b) ¿Qué es un polígono regular? ____

c) Indica como se llama a cada uno de los elementos de un polígono:



A:__________________ B:___________________ C:____________________

D:__________________ E:___________________ F:____________________

G:__________________ H:___________________ I:____________________

d) Dibuja y escribe lo que caracteriza los siguientes tipos de triángulos:

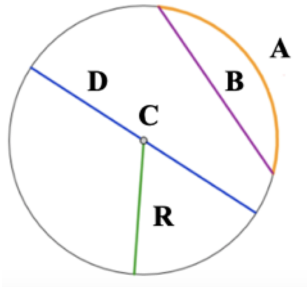
Triángulo escaleno	Triángulo isósceles	Triángulo equilátero
Triángulo Acutángulo	Triángulo Rectángulo	Triángulo obtusángulo

e) Dibuja los cuadriláteros indicados en la siguiente tabla:

Paralelogramos (lados paralelos 2 a 2)			
Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
Trapecios (sólo 2 lados paralelos)			**Trapezoides**
Trapecio rectángulo	Trapecio isósceles	Trapecio escaleno	

TEORÍA. Circunferencia y círculo.

a) Indica como se llama a cada uno de los elementos de la circunferencia.

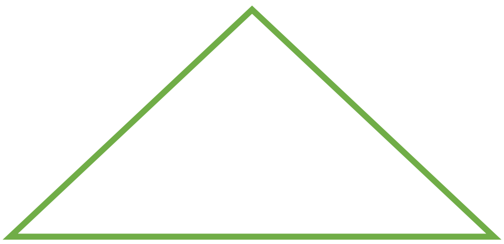


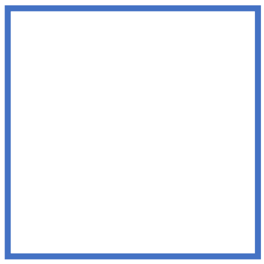
A: ____________________________ B: ________________________________

C: ____________________________ D: ________________________________

R: ____________________________

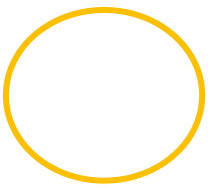
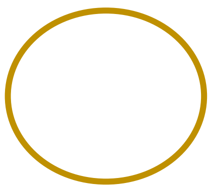
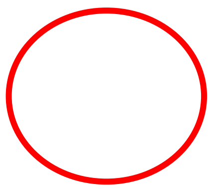
b) Representa una circunferencia inscrita en el triángulo y circunscrita en el cuadrado.





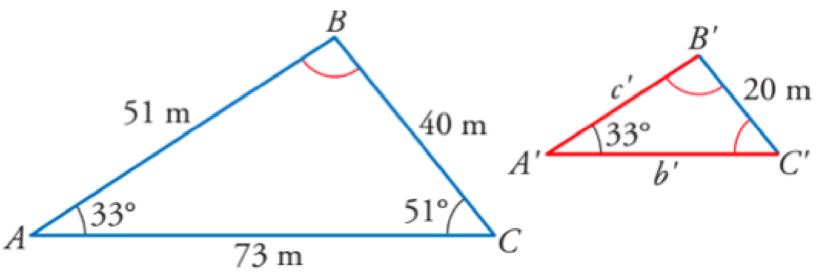
c) Dibuja lo indicado en cada recuadro.

a) Un sector circular	b) Una corona circular

c) Una recta secante	b) Una recta tangente	Una recta exterior
		

TEORÍA. Polígonos semejantes. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza de triángulos.

11. Sabiendo que estos 2 triángulos son semejantes, calcula los lados y ángulos que faltan:



B=

A´= B´= C´=

b´= c´=

12. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

	¿Semejantes?	Justificación:
a) Triángulo con un ángulo de 80º y otro de 40º. Y otro con un ángulo de 80º y otro de 60º.		
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.		
c) Triángulo con *A* = 30º, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. Triángulo con *A'*= 30º, *b'* = 3,5 cm, *c'* = 4,5 cm		
d) Triángulo con *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *Triángulo con a'* = 10 cm, *b'* = 12,5 cm, *c'* = 24,5 cm		

13. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) Triángulo 1: a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. Triángulo 2: a' = 6 cm, b' = 4 cm, ¿c'?
b) Triángulo 1: A = 45º, b = 8 cm, c = 4 cm. Triángulo 2: A' = 45º, b' = 16 cm, ¿a'?

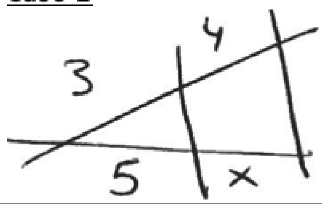
14. Un triángulo tiene lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?.

15. Sergio mide una altura de 152 cm y mirando al sol tiene una sombra de 90 cm. Si un árbol en ese mismo momento tiene una sombra de 2´70 m. ¿Qué altura tendrá? .

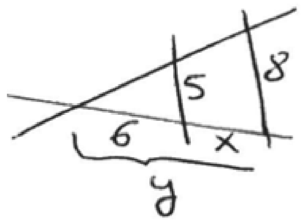
TEORÍA. Teorema de Tales.

16. Calcula el valor de “x” en los siguientes triángulos en posición de Thales:

Caso 1

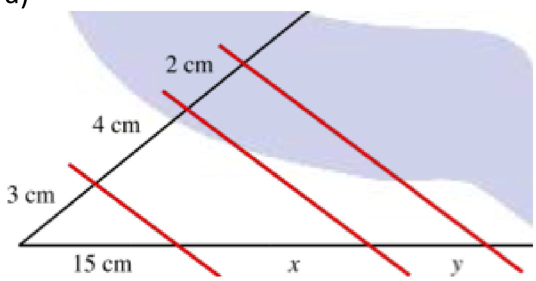


Caso 2

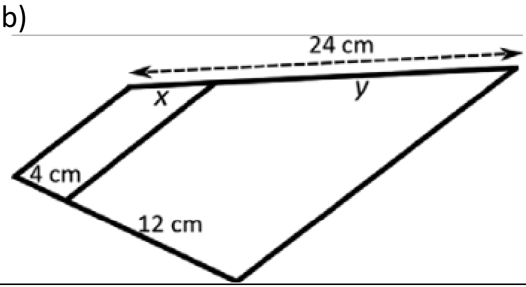


17. Usando el Teorema de Tales calcula el valor de “x” e “y”.

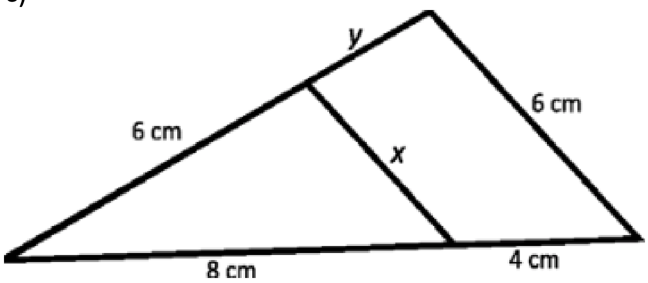
a)



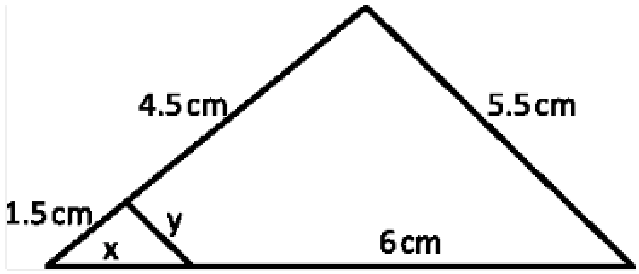
b)



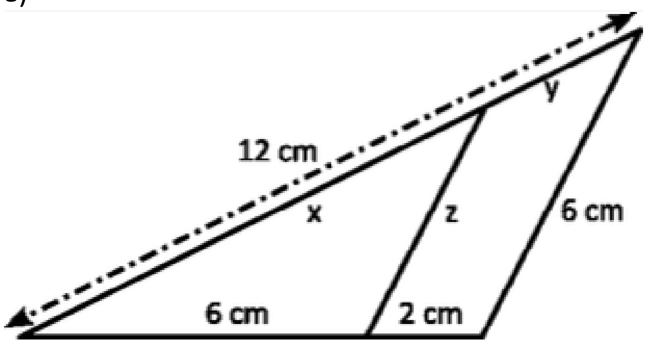
c)



d)



e)

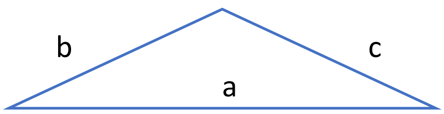


18. Un poste muy alto se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 6 metros. Ponemos una barra de 120 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 90 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

TEORÍA. Teorema de Pitágoras.

19. Queremos encargar una barandilla de hierro para una escalera de 3 peldaños de 40 cm de largo y 20cm de alto. Cuánto medirá de arriba a abajo, siendo esta la medida que necesita.

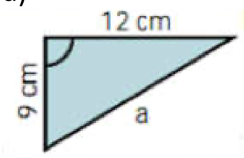
20. Indica si los siguientes triángulos son rectángulos, acutángulos u obtusángulos justificando tu respuesta:



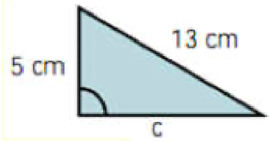
a) a=15, b=10, c=11
b) a=37, b=12, c=35
c) a=30, b=23, c=21
d) a=25, b=20, c=15
e) a=11, b=10, c=7

21. Calcula el lado desconocido de los siguientes triángulos rectángulos:

a)



b)



c)

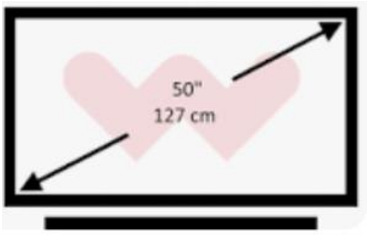
22. Se cae un poste de 14,5 m de alto sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que le golpea?

23. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.

24. Calcula la altura de un triángulo equilátero de 14 cm de lado.

25. Una portería de fútbol mide 7,32 m de ancho por 2,44 m de alto. El punto de penalti está a 10 metros. Calcula la distancia que recorre el balón en: a) Un tiro directo a la base del poste. b) Un tiro directo a la escuadra.

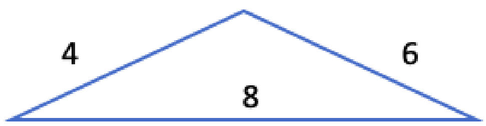
26. Las televisiones se miden en pulgadas (1 pulgada son 2,54 cm). Una televisión de 50 pulgadas tiene una diagonal de 50 pulgadas. Sabiendo que la proporción de las teles panorámicas es 16:9 (largo/alto). Calcula el largo y el alto de esa televisión.



Plantéalo usando un sistema:

Plantéalo usando semejanzas entre 2 triángulos:

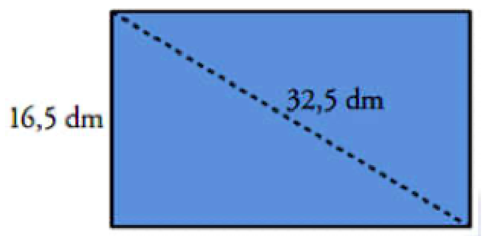
27. En un triángulo de lados 4, 6 y 8 cm respectivamente, calcular la altura sobre el lado mayor.



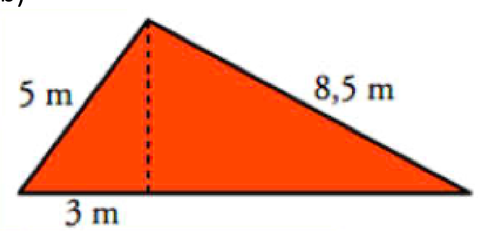
TEORÍA. Perímetros y áreas sobre figuras planas.

28. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:

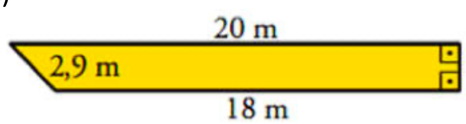
a)



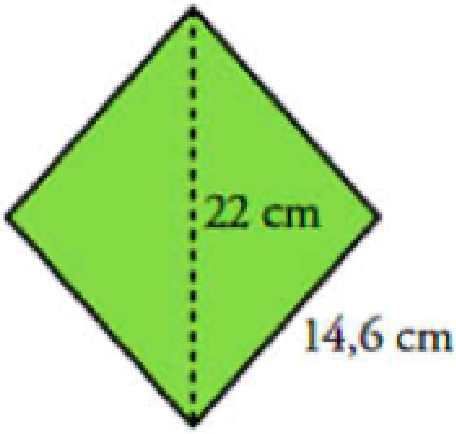
b)



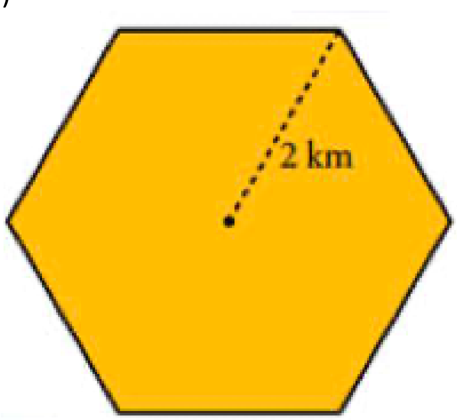
c)



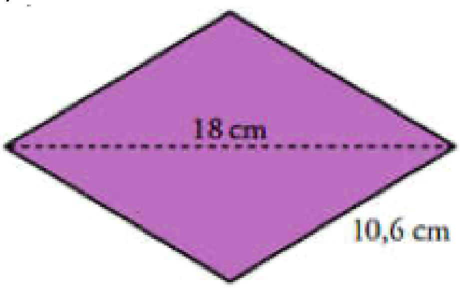
d)



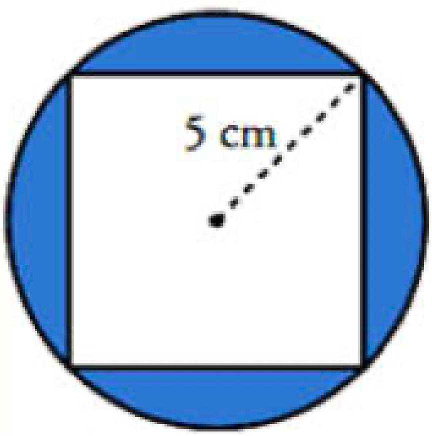
e)



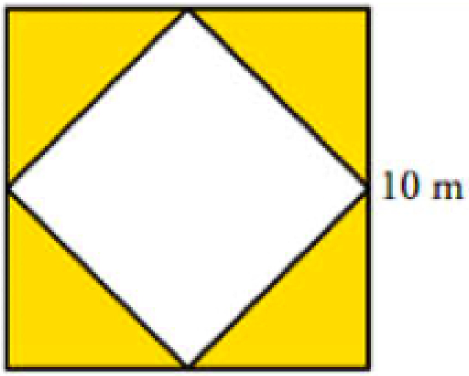
e)



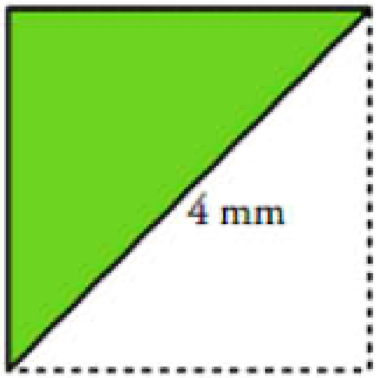
f)



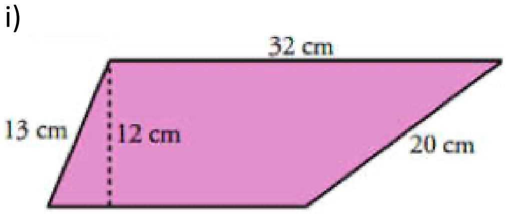
g)



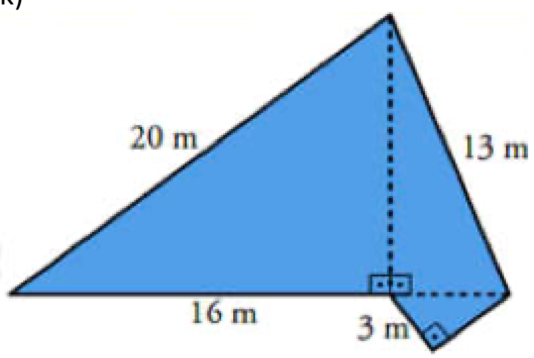
h)



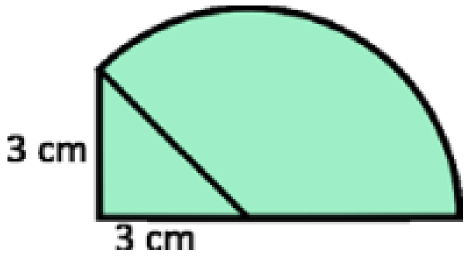
i)



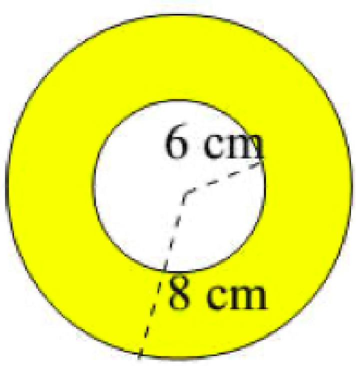
k)



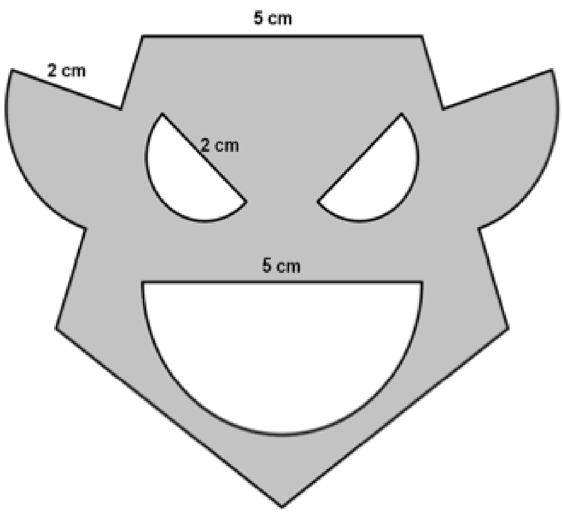
l) (Pista: para calcular el ángulo del sector circular ten en cuenta que el triángulo es isósceles).



m)



n) Calcula el área:



29. **Problema de investigación**. Queremos cubrir el plano con polígonos regulares de área 100 cm^2 .

a) Justifica porque las únicas opciones posibles de recubrir el plano son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono.

b) Calcula cuál de estas tres figuras tiene menor perímetro teniendo las tres un área de 100 cm^2. ¿Qué animal aplica este resultado?

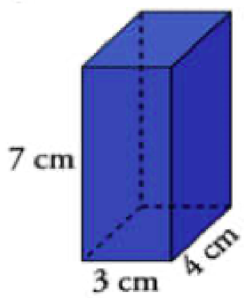
TEORÍA. Clasificación de poliedros y cuerpos de revolución.

30. Dibuja las siguientes figuras:

a) Prisma pentagonal	b) Pirámide hexagonal	c) Prisma cuadrangular
d) Tetraedro (pirámide triangular con triángulos regulares iguales)	e) Cubo	f) Pirámide cuadrangular
g) Cilindro	h) Cono	i) Esfera

TEORÍA. Área y volumen de prismas

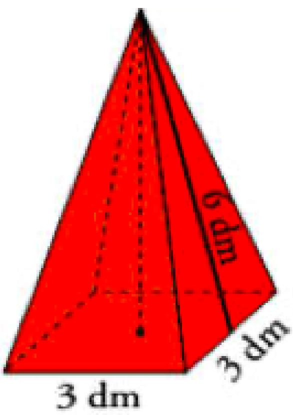
31. Calcula el área y el volumen de un prisma de base rectangular de 3 cm x 4 cm y altura 7 cm.



32. Busca en casa un cartón de leche con forma de prisma como el de la imagen. Toma con una regla sus medidas de ancho, largo y alto y calcula el área y volumen que tiene.

TEORÍA. Área y volumen de pirámides

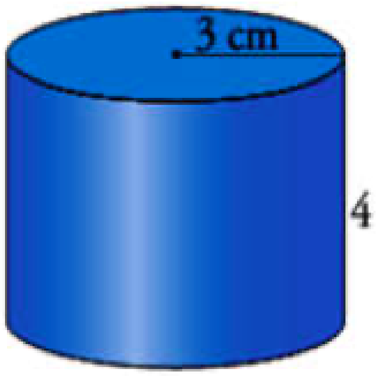
33. Calcula el área y el volumen la siguiente pirámide.



34. La Gran Pirámide de Keops (situada a las afueras del Cairo) es, además de la mayor de las pirámides de Egipto, la más antigua de las siete maravillas del mundo y la única que aún perdura. Fue ordenada construir por el faraón Keops de la cuarta dinastía del Antiguo Egipto. Tiene una base cuadrada de 57 metros y una altura de 138 metros aproximadamente. Vamos a calcular que volumen ocupa su interior.

TEORÍA. Área y volumen de cilindros

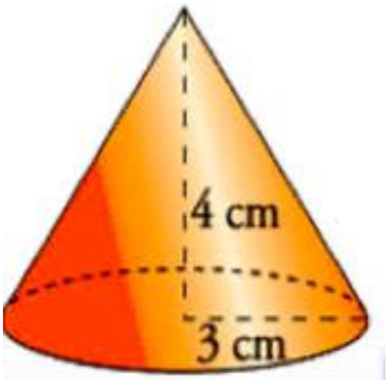
35. Calcula el área y el volumen la siguiente cilindro.



36. Calcula cuántos litros de bebida le caben a un vaso cilíndrico de radio 4 cm y de altura 12 cm.

TEORÍA. Área y volumen de conos

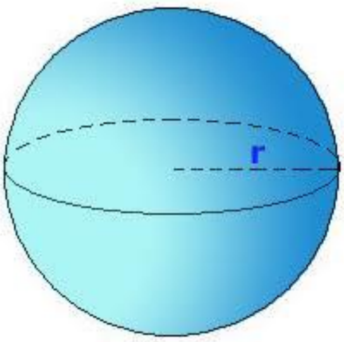
37. Calcula el área y el volumen la siguiente cono.



38. Calcula cuántos mililitros de helado le caben a un cucurucho de radio 3 cm y de altura 10 cm.

TEORÍA. Área y volumen de la esfera

39. Calcula el área y el volumen la siguiente esfera de radio 8 cm.



40. Calcula líquido le cabe en su interior a una pelota de 10 cm de radio.