1º Bach

CCNN

CUADERNILLO DE TRABAJO

Nombre:______________________________ Curso:______

MATEMÁTICAS

Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz

Profesor:

……………………………………………………………………………………………

Materiales utilizados:

Ejercicios y problemas diseñados por Daniel Hernández (IES Melchor de Macanaz)

Material Creative Commons "Matemáticas 1º Bach CCNN" (www.apuntesmareaverde.org.es)

UNIDADES DEL CURSO:

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES.					
PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

UNIDAD 2. ÁLGEBRA.					
PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

UNIDAD 3. NÚMEROS COMPLEJOS.					
PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

UNIDAD 4. TRIGONOMETRÍA.					
PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

UNIDAD 5. FUNCIONES. LÍMITES Y ASÍNTOTAS.					
PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

UNIDAD 6. CONTINUIDAD Y DERIVADAS.

PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

UNIDAD 7. ESTUDIO GLOBAL DE FUNCIONES.

PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

UNIDAD 8. GEOMETRÍA ANALÍTICA.

PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

UNIDAD 9. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.

PARTICIPACIÓN		**TRABAJOS**		**Observaciones:**	Nota Unidad
INFORMÁTICA		**EXAMEN**			

Agenda de tareas:

Fecha	Tareas a realizar

Fecha	Tareas a realizar

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
A1. Sentido de las operaciones	– Estrategias para operar con números reales: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados.

Resumen del tema:

Reconoce los distintos tipos de números y opera y resuelve problemas con ellos.

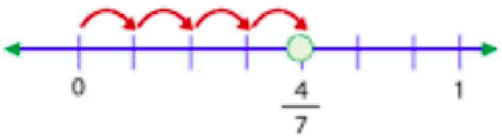
1. Tipos de números
- **Naturales** (N): 0, 1, 2, …
- **Enteros** (Z): 0, 1, 2, … y -1,-2, -3, …
- **Racionales** (Q): Fracciones ($\frac{a}{b}$ $con\ a, b\epsilon R$)
- **Irracionales** (I): No se pueden poner como fracción ($\pi, e, \sqrt{p}\ con\ p\ primo, 0´12345\ldots, 0´102030\ldots$)
- **Reales** (R): Racionales (Q) e irracionales (I)

2. Tipos de decimales
- **Decimales exactos (Q):** 1´23 , 2´7 , 3,845
- **Periódicos Puros (Q):** 1´666…=$1´\widehat{6}$, 0´2323…=$0´\widehat{23}$
- **Periódicos Mixtos (Q):** 1´366…=$1´3\widehat{6}$
- **Ni exactos ni periódicos (I -** Irracionales**)** $0´12345\ldots, 0´102030\ldots$

3. Representación de fracciones y decimales en la recta. (https://www.youtube.com/watch?v=UiJZwbqT06U)

Fracciones: El denominador indica el nº de partes iguales en que dividir la unidad y el numerador las que coger.

Ej: 4/7

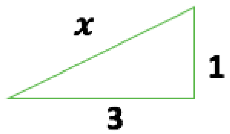


Nº decimales: Pasarlos a fracción y representar
- D.Exacto $1´2 = \frac{12}{10}$, $1´23 = \frac{123}{100}$
- P.Puro $1´\widehat{6} = \frac{16-1}{9}$, $1´\widehat{23} = \frac{123-1}{99}$
- P.Mixto $1´2\widehat{6} = \frac{126-12}{90}$, $1´6\widehat{23} = \frac{1623-16}{990}$

Nota: En la representación de fracciones, para dividir un segmento en partes iguales de forma exacta habría que usar el método de Thales. (**Vídeo:** https://www.youtube.com/watch?v=dqWRtHWI0-c)

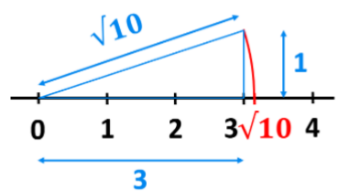
4. Representación de Irracionales del tipo $\sqrt{p}$ en la recta. Si conseguimos expresar p como suma de dos cuadrados enteros, $p = a^2 + b^2$, entonces por el Teorema de Pitágoras, podremos usar un triángulo rectángulo de lados a y b para representar $\sqrt{p}$. **Vídeo:** https://www.youtube.com/watch?v=npHXAFgPrOQ

Ejemplo 1. Representación de $\sqrt{10}$
Como $10 = 3^2 + 1^2$, si aplicamos el T. Pitágoras

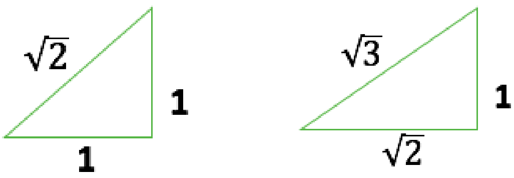


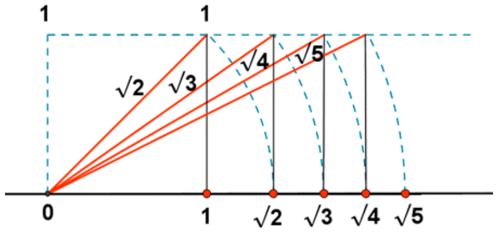
$x^2=3^2+1^2 \rightarrow x=\sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

Por tanto, podemos usar ese triángulo sobre la recta para representarlo



Ejemplo 2. Representación de $\sqrt{3}$
No podemos encontrar dos cuadrados enteros que sumen 3, pero sí que podemos expresar $3=(\sqrt{2})^2+1^2$. Por lo tanto, podemos representar $\sqrt{2}$ y utilizarlo como base de un triángulo rectángulo de altura 1 para representar $\sqrt{3}$





5. Aproximación y errores

- **Truncar a las décimas** (poner 0 desde las centésimas en adelante). Ej: 3,456 → 3,400
- **Redondear a las centésimas** (si la cifra siguientes es 5 o más subir una unidad a las centésimas y si es menor de 5 entonces truncar). Ej: 3,456 → 3,460
- **Error absoluto y error relativo**.

$E_a = \left|Valor_{aprox} - Valor_{real}\right|$; $E_r = \frac{E_a}{Valor_{real}}$

(https://www.youtube.com/watch?v=5cmpf8FNX2c)

6. Notación científica

Expresar un número en notación científica consiste en expresarlo como el producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Ejemplos:

a) 345678 = 3´45678 · 10^5 ← + - →

b) 0,000345 = 3´45· 10^{-4}

c) 345´6· 10^5 = 3´456· 10^7

(https://drive.google.com/file/d/0B-02ZNYAUZ9CXzRvU29Bc0pJNHM/view)

7. Propiedades de las potencias

1. $a^0=1$
2. Base negativa. $(-a)^{par}=a^{par}$; $(-a)^{impar}=-a^{impar}$
3. Exp. negativo. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$
4. Misma base. $a^n \cdot a^m=a^{n+m}$; $a^n : a^m=a^{n-m}$
5. Mismo exponente. $a^n \cdot b^n=(ab)^n$; $a^n : b^n=(a/b)^n$
6. Potencia de una potencia. $(a^n)^m=a^{n \cdot m}$

8. Definición de radical

$$\sqrt[n]{a}=b \leftrightarrow a=b^n$$

(a radicando y n índice)

Observaciones:

- Si a<0, entonces $\sqrt[n]{a}$ sólo existe con n impar.
- $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

9. Propiedades de los radicales

1. $\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$
2. $(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$
4. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

6. Suma de radicales

Descomponer radicandos y extraer factores

$\sqrt{50}+\sqrt{8}+\sqrt{12}=$

$\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^2\cdot 3}=$

$5\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=7\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=oQRf4lSIfY4&vl=es

Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=n4LBiSxHv94

10. Racionalizar (quitar raíces del denominador)

1. $\sqrt{a}$ **en el denominador**. Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{a}$. (Ej:$\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{7}$)

2. $\sqrt[n]{a^m}$ **en el denominador**. Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^b}$ con b lo que falta hasta n. (Ej:$\frac{3}{\sqrt[5]{7^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^3}\cdot\sqrt[5]{7^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^5}}=\frac{3\cdot\sqrt[5]{7^2}}{7}$)

3. $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ **en el denominador**. Usar el conjugado. (Ej:$\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\frac{3\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{7})}=\frac{3\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{-5}$)

https://www.youtube.com/watch?v=KTdBezXCjk0

Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ejercicios y problemas

11. Definición de Logaritmo

Si a>0 y a≠1, se llama logaritmo de base a de P, designándose $\log_a P$, al exponente al que hay que elevar a para obtener P. $\boldsymbol{log_a P = x \leftrightarrow a^x = P}$

Ejemplo: $\log_2 8 = 3$ (porque $2^3=8$) ; $\log_{10}10000=4$ (porque $10^4=10000$) // Notación: $\log=\log_{10}$ y $\ln=\log_e$

12. Propiedades de los logaritmos

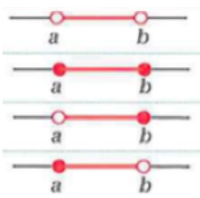
1. $P \neq Q \rightarrow \log_a(P) \neq \log_a(Q)$ (si además a>1 entonces $P < Q \rightarrow \log_a(P) < \log_a(Q)$)
2. $\log_a 1=0$
3. $\log_a a=1$
4. $\log_a(P\cdot Q) = \log_a(P)+\log_a(Q)$
5. $\log_a(P/Q) = \log_a(P)-\log_a(Q)$
6. $\log_a(P^n)=n\cdot\log_a(P)$
7. $log_a(\sqrt[n]{P})=\frac{log_a P}{n}$
8. Cambio de base. $log_a P=\frac{log_b P}{log_b a}$

Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=34zcIH6NQd4
Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=wdZ7Tl882vI

Intervalos. Inecuaciones.

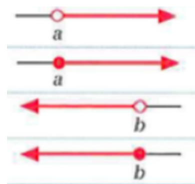
13. Intervalos

Abierto	(a,b)=$\{x \in R: a < x < b\}$	
Cerrado	[a,b]= $\{x \in R: a \leq x \leq b\}$	
Semiabierto	(a,b]= $\{x \in R: a < x \leq b\}$	
	[a,b)= $\{x \in R: a \leq x < b\}$	

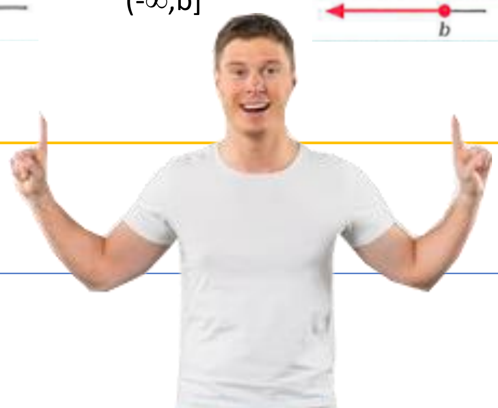


Semirectas

(a,∞)
[a, ∞)
(-∞,b)
(-∞,b]



Uniones e intersecciones de intervalos.
(https://www.youtube.com/watch?v=RyTk9OoQU38)



14. Inecuaciones de grado 1

- Grado1. Las inecuaciones de 1º grado se resuelven de forma similar a las ecuaciones de 1º grado pero con la diferencia de que **cuando pasamos multiplicando o dividiendo un número negativo de un miembro a otro, la desigualdad cambia de sentido**. Suelen tener muchas soluciones.

Ejemplo: $\frac{-2x+3}{2} \geq 7 \rightarrow -2x+3 \geq 14 \rightarrow -2x \geq 11 \rightarrow x \leq \frac{11}{-2} \rightarrow x \leq -5'5 \rightarrow (-\infty, -5'5]$

- Grado 1 con valor absoluto.

$|z| < 5 \rightarrow -5 < z < 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 5 \rightarrow Estudiar -5 < \frac{x-2}{3} < 5$

$|z| \leq 5 \rightarrow -5 \leq z \leq 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| \leq 5 \rightarrow Estudiar -5 \leq \frac{x-2}{3} \leq 5$

$|z| > 5 \rightarrow z < -5$ ó $z > 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| > 5 \rightarrow Estudiar\ \ la\ unión\ de\ \frac{x-2}{3} < -5\ ;\ \frac{x-2}{3} > 5$

$|z| \geq 5 \rightarrow z \leq -5$ ó $z \geq 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| \geq 5 \rightarrow Estudiar\ \ la\ unión\ de\ \frac{x-2}{3} \leq -5\ ;\ \frac{x-2}{3} \geq 5$

15. Inecuaciones de grado >1

- 2º Grado (https://www.youtube.com/watch?v=uRlK2Omifsg)

Igualar a 0 la ecuación, sacar las soluciones, hacer una tabla con esas soluciones y estudiar el signo.

Ejemplo: $x^2-5x+6 \leq 0$ → Resolver $x^2-5x+6=0$ → x=2 y x=3

2 3

$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3, \infty)$
+	-	+

(Sustituimos x=0 → $0^2-5\cdot0+6=6$ +) (Sustituimos x=2,5 → -) (Sustituimos x=4 → +)

Solución: como pone ≤ 0 → [2,3]

- Cociente de polinomios. Se hace de manera análoga al tipo anterior pero igualando numerador y denominador a 0. Con las soluciones obtenidas se hace la tabla con los signos. La solución nunca puede contener las soluciones del denominador.

Ejemplo: $\frac{x+1}{x^2-5x+6} > 0$ → Resolvemos x+1=0 y $x^2-5x+6=0$ → Soluciones: -1, 2 y 3

-1 2 3

$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3, \infty)$
-	+	-	+

2 y 3 no pueden incluirse en la solución. Como pone >0 → $(-1,2) \cup (3, \infty)$

Reconoce sucesiones monótonas y acotadas y entiende el concepto de límite de una sucesión.

16. Límites de sucesiones

Dada la sucesión $a_n = \frac{P_n}{Q_n}$, queremos calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$

- Si Orden P_n > Orden Q_n → Tiende a $\pm\infty$. Para saber el signo sustituir por un nº grande para ver el signo.
- Si Orden P_n < Orden Q_n → Tiende a 0.
- Si Orden P_n = Orden Q_n → Tiende al cociente de los números que acompañan a los monomios de mayor grado.

Para P_n o Q_n, tendremos en cuenta el siguiente orden (grado en polinomios) de crecimiento de menor a mayor

$$\log(x) \approx \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \approx x \approx x^2 \approx x^5 \approx 2^x \approx 7^x$$

Ejercicios Tema 1. Números Reales. Límites de Sucesiones

Reconoce los distintos tipos de números y opera y resuelve problemas con ellos.

TEORÍA. Algunas notaciones matemáticas y de Teoría de Conjuntos.

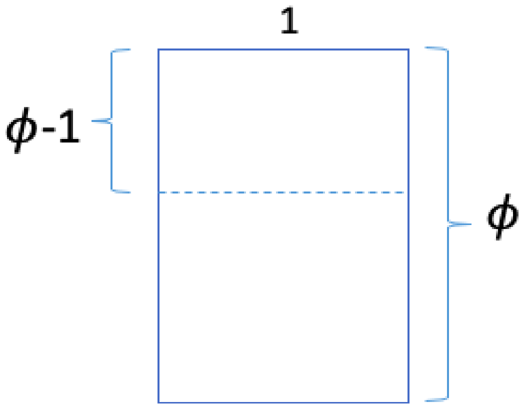
TEORÍA. Tipos de números. Tipos de decimales.

TEORÍA. Densidad del conjunto de los números reales

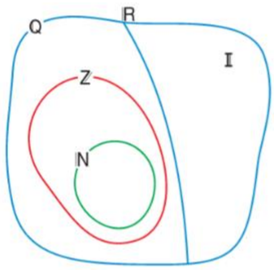
Ejercicios propuestos:

1. Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional (Idea: Plantéalo por reducción al absurdo suponiendo que es racional y elevando al cuadrado hasta llegar a una contradicción). Demuestra también que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.

2. Calcula el valor del número de oro ϕ teniendo en cuenta que el rectángulo de dimensiones $\phi : 1$ es semejante al rectángulo que resulta de suprimirle un cuadrado de lado 1.



3. Indica de qué tipos son los siguientes números incluyendo junto a cada uno de ellos las letras correspondientes (N,Z,Q,I,R): $\sqrt{7}$, 6 , 2´3 , $6{\acute{}}\hat{3}$, -$\sqrt{36}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{-5}$



4. Clasifica estos números: $\sqrt[3]{-1}$, $2{\acute{}}1\hat{3}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\frac{23}{4}$, $-\frac{28}{4}$

5. Clasifica estos números: -5, 0´16 , 7/5, $\sqrt{\frac{75}{3}}$, $\sqrt[3]{-7}$, -$\sqrt{5}$, $\frac{\pi}{3}$, $1{\acute{}}\hat{9}$

6. Indica cuales de los siguientes números son racionales e irracionales. En caso de racionales exprésalos en forma de fracción:

a) 3,11111…. b) 3,23 c) 4,343434… d) $\sqrt{27}$ e) $\sqrt{10}$ f) $\sqrt{8}$ g) $\sqrt{2,\hat{7}}$ h)0,70770777…

TEORÍA. Representa en la recta los siguientes números:

3 y -2 →

1/6 →

5/2 →

$1{\acute{}}\hat{6}$ →

$1'1\hat{2}$ →

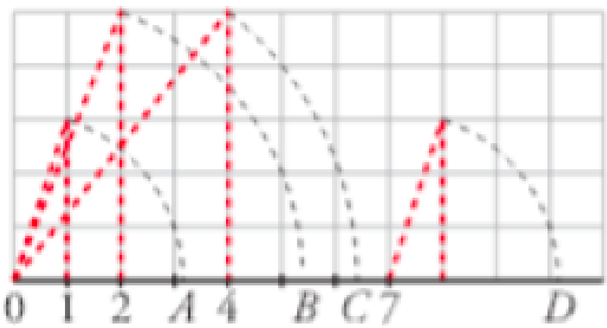
$1'1\widehat{16}$ →

$\sqrt{2}$ →

$\sqrt{3}$ →

$\sqrt{26}$ →

7. Indica que números irracionales representan los puntos A, B, C y D.



Aproximación y errores

TEORÍA. Redondeo y truncamiento. Error absoluto y error relativo

8. Halla los errores absoluto y relativo que cometemos al redondear y truncar a las décimas la expresión decimal del número 8/3.

9. Supongamos que medimos la altura de un lápiz y obtenemos 17 cm, cuando en realidad mide 16,8 cm. También medimos la distancia a Murcia desde Hellín y nos salen 88 km, cuando en realidad son 90 km. ¿En qué caso hemos cometido un mayor en la medición?.

Notación científica

TEORÍA. Notación científica

10. Expresa los siguientes números en notación científica y ordénalos de menor a mayor:

a) $3'38\cdot10^{13}$; $83'6\cdot10^{12}$; $555\cdot10^{11}$ b) $12,3\cdot10^{-5}$; $0,03\cdot10^{-4}$; $3100\cdot10^{-9}$

11. Expresa en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(600000:0,002)\cdot 0'5 \cdot 10^{8}$ b) $0'45\cdot10^{-2} + 12'3\cdot10^{-3} - 90\cdot10^{-1}$

12. Una gota de sangre de un milímetro cúbico contiene aproximadamente cinco millones de glóbulos rojos. Una persona que pesa 70 Kg. tiene aproximadamente 4,5 litros de sangre. ¿Cuál sería el número de glóbulos rojos que tiene esta persona? Expresa el resultado como un número de una cifra entera y una potencia de 10.

13. En España, el papel reciclado cada año equivale a 30 millones de árboles no talados. Expresa dicho número en notación científica.

14. El periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de un año, aproximadamente 365,25 días, y el periodo de Plutón es de $7,82\ 10^{9}$ segundos. a) Expresa en notación científica y en segundos el periodo de la Tierra. b) ¿Cuántos años terrestres tarda Plutón en dar una vuelta alrededor del Sol?.

Potencias

TEORÍA. Propiedades de las potencias.

15. Opera las siguientes expresiones utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{2^{-2}-3^{-2}}{2^{-1}-3^{-1}}$ b) $\frac{2^{3}\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-4}}{2^{-4}\cdot 2^{2}\cdot 3^{-2}}$ c) $\frac{5^{2}\cdot 4^{-2}\cdot 3^{7}}{25^{-2}\cdot 2^{3}\cdot 9^{3}}$ d) $\frac{42^{2}\cdot 10^{-2}\cdot 2^{7}}{3^{4}\cdot 2^{-3}\cdot 5^{-1}}$

16. Opera las siguientes expresiones utilizando las propiedades de las potencias:

a) $(3a^{-2}b^{3})^{-3}$ b) $(2^{-2})^{2}\cdot(-3)^{5}:(-6)^{-2}$ c) $\frac{(a^{-2})^{3}\cdot(-b)^{-4}}{(-ab)^{4}}$

Radicales

TEORÍA. Definición de radical. Propiedades.

17. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[15]{2^6}$ b) $\sqrt[20]{a^8}$ c) $\sqrt[4]{x^8}$ d) $\sqrt[12]{27}$ e) $\sqrt[6]{8}$ f) $\sqrt[4]{25}$

18. Reducir a índice común:

a) $\sqrt[3]{3^2}$ y $\sqrt[12]{3^5}$ b) $\sqrt[15]{2^4}$ y $\sqrt[6]{2^5}$

19. Simplificar:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ c) $(\sqrt[3]{\sqrt{5}})^4$ d) $\sqrt[5]{\left(\sqrt{7^{10}}\right)^2}$

20. Sin usar calculadora, indica cuál de los radicales $\sqrt[4]{3}$ o $\sqrt[3]{2}$ es mayor justificando tu respuesta.

21. ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?.

22. Opera y simplifica:

a) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[15]{2}$ c) $\sqrt[30]{5}\cdot\sqrt[12]{5^5}$ d) $\sqrt{8}\cdot\sqrt[4]{4}$ e) $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[8]{4}$ f) $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[6]{a}}$

g) $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[6]{a^3}}$ h) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{2}}$ i) $\frac{\sqrt[12]{30}}{\sqrt[18]{3}}$ j) $\frac{\sqrt[3]{x\cdot y}}{\sqrt[4]{x\cdot y}}$ k) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[8]{x^5}}$ l) $\frac{\sqrt[5]{2^3\cdot 3^4}}{\sqrt[6]{2^2\cdot 3^7}}$

23. Suma y simplifica:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}$ b) $\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{50}$ c) $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{48}$

TEORÍA. Racionalizar denominadores.

24. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{7}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ d) $\frac{7}{\sqrt[4]{3^3}}$ e) $\frac{2}{\sqrt[10]{7^7}}$ f) $\frac{5}{\sqrt[7]{3^2}}$

g) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ h) $\frac{7}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ i) $\frac{5}{\sqrt{5}-2}$ j) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ k) $\frac{\sqrt{2}}{2-5\sqrt{3}}$

Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ejercicios y problemas

TEORÍA. Definición de logaritmo.

TEORÍA. Propiedades de los logaritmos.

25. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ b) $\log_3 27$ c) $\log 0{,}001$ d) $\log_4 0{,}25$ e) $\log_2 0{,}125$ f) $\log_5 1$

g) $\log_5 125$ h) $\log 0{,}1$ i) $\ln e^3$ j) $\log_8 64$ k) $\log_5 \frac{1}{25}$ l) $\log_2 1024$

26. Calcula el valor de “x” en estas expresiones:

a) $\log_x 8=3$ b) $\log_x 1/25 = -2$ c) $\log_x 2 =1/2$ d) $\log_x 1/4 = 2$ e) $\log x = \log 24 - \log 3$

f) $\log 2^x=5$ g) $\log x^2= 6$ h) $\log_5 4x = 2$ i) $2^{3+x} = 80$ j) $\log x =2 \log 3 - 1/2 \log 36$

27. Sabiendo que $\log_2 A = 1{,}5$ y $\log_2 B = -0{,}5$, calcula sin utilizar la calculadora:

a) $\log_2\left(\frac{A}{8B}\right)$ b) $\log_2(A \cdot B)$ c) $\log_2\left(A^2 \cdot \sqrt{B}\right)$ d) $\log_2\left(\frac{\sqrt{A}}{4B^4}\right)$

28. Sabiendo que $\log_3 A = 1{,}2$ y $\log_3 B = 2{,}2$, calcula sin utilizar calculadora:

a) $\log_3\left(\sqrt[3]{\frac{A}{9B^2}}\right)$ b) $\log_3\left(\frac{A^3}{\sqrt[4]{B}}\right)$

29. Haz desaparecer el logaritmo de las siguientes expresiones y despeja “y”:

a) ln(y) = x – ln(3) b) ln(2y)=3x-ln(5)

30. Desarrolla estas expresiones:

a) $\log\left(\frac{A^4\sqrt[7]{B}}{10C^3}\right)$ b) $\log\left(\frac{\sqrt[3]{A^2}\cdot B^{-4}}{\sqrt{C}}\right)$

31. En una fábrica de TV, han detectado que el porcentaje de unidades defectuosas de un cierto año aumenta con el tiempo y viene dado por la fórmula de abajo. Calcula en cuánto tiempo será defectuosas el 50% de las TV.

$$\left(\left(\frac{12}{11}\right)^t - 1\right)\cdot 100$$

32. El inventor del ajedrez pidió como pago que se llenara cada cuadrito del tablero con el doble de trigo que el anterior. Si se comienza con 1 grano de trigo, ¿en que cuadrito se depositarán 4194304 granos de trigo?

33. Una matrioska es una muñeca que contiene otras cada vez más pequeñas en su interior. El volumen de cada muñeca es 2/3 de la anterior. Si la mayor ocupa 360 cm^3, ¿Cuántas muñecas hay si la menor ocupa 31,6 cm^3?

34. Calcula el tiempo que tengo que tener 2500€ al 6% de interés compuesto anual para obtener 1977,12€ de beneficio.

35. El crecimiento de un bosque viene dado por la función $F(t)= A \cdot (1+i)^t$ donde F es la madera que habrá dentro de t años, “A” la madera actual, e “i” la tasa de crecimiento anual. Si la tasa de crecimiento anual i=0,02 se mantiene constante, calcula el tiempo que tardará en duplicarse la madera del bosque.

Intervalos. Inecuaciones.

TEORÍA. Definición de los distintos tipos de intervalos.

36. Describe en forma de conjunto y representa los siguientes intervalos en la recta:

a) (2,5) b)[-3,4) c) (-∞,2) d) [-1, ∞) e) $\{x \in R: -2 < x \leq 3\}$ f) $\{x \in R: x \leq 4\}$

37. Inventa dos intervalos cuya unión sea (1,4] y otros dos intervalos cuya intersección sea [0,3).

38. Dados A=[-3,4] , B=(-3,2] , C=(-∞,-3) , D=[-4,3) , E=(-∞,0), F= (-3, ∞) , calcula

a) A∩B b)A∪B c) A∩C d) A∪C e) C∪D f) E∩F g) E∪F h) C∩F

TEORÍA. Distintos tipos de inecuaciones que vamos a estudiar.

39. Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

a) $\frac{2x-1}{3} < 7$ b) $\frac{x+4}{-2} \geq 7$ c) $\frac{-x-6}{4} \leq -2$ d) $\frac{-3x-1}{3} > \frac{x+1}{-2}$

40. Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|x| = 4$ b) $|x-2| = 4$ c) $|x| < 5$ d) $|x| \geq 5$ e) $|x-1| < 7$ f) $|x-3| > 2$

41. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\left|\frac{x-1}{5}\right| < 3$ b) $\left|\frac{-2x+4}{8}\right| \geq 4$ c) $\left|\frac{3x-6}{-5}\right| \leq 2$ d) $\left|\frac{-3x+4}{-2}\right| > 7$

42. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2-6x+12 \geq 0$ b) $x^2-5x+4 < 0$ c) $x^2-2x+1 > 0$ d) $x^2-9 \leq 0$

43. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x-1}{x+2} < 0$ b) $\frac{x^2-5x+6}{x+1} \geq 0$ c) $\frac{x-2}{x^2-5x+6} \leq 0$ d) $\frac{x^2-1}{x^2-4} > 0$

Reconoce sucesiones monótonas y acotadas y entiende el concepto de límite de una sucesión.

TEORÍA. Límite de una sucesión.

44. Indica cuál es el $\lim_{n\to\infty} a_n$ calculando además al menos 5 términos de cada una:

a) $a_n = \frac{2n}{-3n^2+n}$ b) $a_n = \frac{n^2}{2n^2+n}$ c) $a_n = \frac{3n^3}{2n^2+n}$ d) $a_n = \frac{\sqrt{n^2-5}}{5n+1}$

e) $a_n = \sqrt{\frac{5n^2}{2n^2+n}}$ f) $a_n = \frac{n^{10}}{10^n}$ g) $a_n = \frac{10000}{n}$ h) $a_n = \frac{3n}{\sqrt{2n^2+n}}$

UNIDAD 2. ÁLGEBRA

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
D1. Patrones	- Generalización de patrones en situaciones sencillas.
D2. Modelo matemático	− Ecuaciones, inecuaciones y sistemas: modelización de situaciones en diversos contextos.
D3. Igualdad y desigualdad	− Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones no lineales en diferentes contextos.
D5. Pensamiento computacional	− Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados. − Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.

Resumen del tema:

B2.C4.2. Resuelve ecuaciones (algebraicas o no algebraicas) y problemas de ecuaciones.

1. Polinomios

$P(x)= a_n x^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$

Grado del P(x) → n // T. Independiente → a_0

Operaciones con polinomios

Suma/Resta (P(x)±Q(x)) //

Producto (P(x) · Q(x)) // División (P(x) : Q(x))

https://www.youtube.com/watch?v=sqSzkXrbmtA

Valor numérico de P(x) en x=a

P(a) = Sustituir x por en a y operar

Raíz de un polinomio

x=a es raíz de un polinomio si P(a)=0

Regla de Ruffini para dividir entre x-a

Método para obtener cociente y resto de P(x): (x-a)

https://www.youtube.com/watch?v=Rp3LEbCfNFs

Teorema del resto

Resto de P(x):(x-a) es P(a). Si P(a)=0 →a raíz de P(x)

https://www.youtube.com/watch?v=8Av_OVd0snM

Teorema del factor

a es raíz de P(x) ⇔ (x-a) es un factor de P(x)

2. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios del menor grado posible. Si un polinomio no se puede factorizar entonces se dice que es irreducible. Los irreducibles son de grado 1 o 2.

$P(x)= (x-a)\cdot(x-b)\cdot\cdot\cdot(x^2+cx+d)\cdots\ldots$ https://www.youtube.com/watch?v=ozzalwEBhw0

Pasos para factorizar un polinomio P(x) https://www.youtube.com/watch?v=Kn15S7w4IA8

(1) Extraer factor común si es posible (esto se hace cuando no hay término independiente a_0)

(2) Si P(x) es de grado 1 o 2, entonces resolver directamente P(x)=0 para sacar las raíces.

(3) Si P(x) es de grado >2, entonces usar la Regla de Ruffini para buscar raíces enteras.

(4) A partir de las soluciones escribir el polinomio factorizado

3. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, es una fracción que tiene por denominador un polinomio.

Operaciones: $\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{R(x)}{T(x)}$; $\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{T(x)}$; $\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{T(x)}$

https://www.youtube.com/watch?v=fyoP9EWxZRE

4. Resolución de ecuaciones de grado ≥2

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ecuaciones incompletas

$ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x=0$; $x=-b/a$

$ax^2+c=0 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{-c}}{a}$

https://drive.google.com/file/d/1JCQIrHY39q827ifXvFZmGCXyULNe3-ut/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/14tMQGqYxF8whcRWrfyLdYXu2dgWebsJ6/view?usp=sharing

Ecuaciones Bicuadradas

$ax^4+bx^2+c=0 \rightarrow$ Cambio $y=x^2$. Resolver $ay^2+by+c=0$

Con las soluciones y_0 , y_1, despejar $x^2=y_0$; $x^2=y_1$

https://www.youtube.com/watch?v=GpsgWkhieC8

Ecuaciones de grado ≥3

Expresar P(x)=0 y factorizar utilizando Ruffini.

https://drive.google.com/file/d/1ewCcwIW7aA3qPmhWzEHHcupd6jUamRLq/view?usp=sharing

5. Ecuaciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{M(x)}{L(x)}$

(1) Calcular el m.c.m de los denominadores.
(2) Multiplicar todos los términos de la ecuación por el m.c.m eliminando los denominadores.
(3) Se resuelve la ecuación resultante.

6. Ecuaciones con radicales ($\sqrt{x+a}+b=cx$)

(1) Si hay un solo radical se aísla en un lado.
(2) Se elevan los dos miembros de la ecuación al índice de la raíz y se resuelve la ecuación.
(3) Se comprueba si las soluciones son válidas.
(4) Si hay más de un radical se repite el proceso.

https://www.youtube.com/watch?v=0kImG9PkGO0

7. Ecuaciones con valor absoluto

(1) Se aísla el valor absoluto en uno de los miembros de la ecuación.
(2) Se plantean dos ecuaciones

$$|f(x)| = g(x) \rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

(3) Comprobar que soluciones son válidas.

https://www.youtube.com/watch?v=R1d6zO8Iu3o

Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

8. Ecuaciones exponenciales (Ej: $2^x+2^{x+2}=10$)

(1) Se hace el cambio $y=a^x$.
(2) Se resuelve la ecuación queda tras el cambio (sin exponenciales).
(3) Con la solución, se deshace el cambio ($x=\log_a(y)$)

https://www.youtube.com/watch?v=JhENx5M2Cq4
https://www.youtube.com/watch?v=35yTEZfJqaI

9. Ecuaciones logarítmicas

(1) Se agrupan todos los logaritmos utilizando sus propiedades a cada lado de la igualdad.
(2) Se elimina el logaritmo y se resuelve la ecuación
(3) Se comprueban las soluciones obtenidas.

https://www.youtube.com/watch?v=g9tfN-oiG4s

Plantea, clasifica y resuelve sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas por el método de Gauss.

10. Sistemas de ecuaciones

Posibles casos al resolver un sistema de ecuaciones:

- Sistema Compatible Determinado (SCD) → Tienen una única solución
- Sistema Compatible Indeterminado (SCI) → Tiene infinitas soluciones (alguna ecuación se convierte en 0=0)
- Sistema Incompatible (SI) → No tiene soluciones (alguna ecuación se convierte en nº = 0)

<u>Resolución por Método de Gauss</u>

(1) Queremos transformar nuestro sistema en un sistema triangular. Para ello se escoge como primera ecuación y la primera incógnita aquella cuyos coeficientes sean los mejores para reducir el resto de incógnitas.

(2) Por reducción eliminamos la primera incógnita del resto de ecuaciones (2ª, 3ª, …)

(3) Ahora con la 2ª incógnita de la 2ª ecuación eliminamos por reducción la 2ª incógnita del resto (3ª, …)

(4) Así sucesivamente hasta obtener un sistema triangular. A partir de ahí se resuelven las ecuaciones en orden inverso, es decir, desde la última a la primera.

<u>Ejemplo:</u>

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ x+y+z=3 \\ x+4y+3z=8 \end{cases} \xRightarrow[a\,matriz]{Pasamos} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[\substack{1^a\,fila-2^a\,fila \\ 1^a\,fila-3^a\,fila}]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \xRightarrow[2\cdot 2^a fila+3^a fila]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Con lo que se nos queda el siguiente sistema triangular:

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ y=1 \\ -2z=-2 \end{cases}$$ → Resolvemos en orden inverso z=1 ; y=1 → x+2·1+1=4 → x=1

https://www.youtube.com/watch?v=Ix9hDqfNuIA

- Concepto de determinante – Regla de Cramer para resolver SCD.

Intervalos. Inecuaciones.

11. Intervalos
Abierto (a,b)=$\{x \in R: a < x < b\}$ Cerrado [a,b]= $\{x \in R: a \leq x \leq b\}$
Semiabierto (a,b]= $\{x \in R: a < x \leq b\}$ [a,b)= $\{x \in R: a \leq x < b\}$
Semirectas (a,∞) [a, ∞) (-∞,b) (-∞,b]
Uniones e intersecciones de intervalos. (https://www.youtube.com/watch?v=RyTk9OoQU38)

12. Inecuaciones de grado 1
- Grado1. Las inecuaciones de 1º grado se resuelven de forma similar a las ecuaciones de 1º grado pero con la diferencia de que **cuando pasamos multiplicando o dividiendo un número negativo de un miembro a otro, la desigualdad cambia de sentido**. Suelen tener muchas soluciones.

Ejemplo: $\frac{-2x+3}{2} \geq 7 \rightarrow -2x+3 \geq 14 \rightarrow -2x \geq 11 \rightarrow x \leq \frac{11}{-2} \rightarrow x \leq -5{\acute{}}5 \rightarrow (-\infty, -5{\acute{}}5]$

- Grado 1 con valor absoluto.

$|z| < 5 \rightarrow -5 < z < 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 5 \rightarrow Estudiar -5 < \frac{x-2}{3} < 5$

$|z| \leq 5 \rightarrow -5 \leq z \leq 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| \leq 5 \rightarrow Estudiar -5 \leq \frac{x-2}{3} \leq 5$

$|z| > 5 \rightarrow z < -5 \text{ ó } z > 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| > 5 \rightarrow Estudiar\ \ la\ unión\ de\ \frac{x-2}{3} < -5\ ;\ \frac{x-2}{3} > 5$

$|z| \geq 5 \rightarrow z \leq -5 \text{ ó } z \geq 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| \geq 5 \rightarrow Estudiar\ \ la\ unión\ de\ \frac{x-2}{3} \leq -5\ ;\ \frac{x-2}{3} \geq 5$

13. Inecuaciones de grado >1
- 2º Grado (https://www.youtube.com/watch?v=uRlK2Omifsg)
Igualar a 0 la ecuación, sacar las soluciones, hacer una tabla con esas soluciones y estudiar el signo.
Ejemplo: $x^2-5x+6 \leq 0$ → Resolver $x^2-5x+6=0$ → x=2 y x=3

2 3

(-∞,2)	(2,3)	(3, ∞)
+	-	+

(Sustituimos x=0 → $0^2-5\cdot0+6=6$ +) (Sustituimos x=2,5 → -) (Sustituimos x=4 → +)
Solución: como pone ≤0 →[2,3]

- Cociente de polinomios. Se hace de manera análoga al tipo anterior pero igualando numerador y denominador a 0. Con las soluciones obtenidas se hace la tabla con los signos. La solución nunca puede contener las soluciones del denominador.

Ejemplo:$\frac{x+1}{x^2-5x+6} > 0$ → Resolvemos x+1=0 y $x^2-5x+6=0$ → Soluciones: -1, 2 y 3

-1 2 3

(-∞,-1)	(-1,2)	(2,3)	(3, ∞)
-	+	-	+

2 y 3 no pueden incluirse en la solución. Como pone >0 → (-1,2)u(3, ∞)

Ejercicios Tema 2. Álgebra

.Resuelve ecuaciones (algebraicas o no algebraicas) y problemas de ecuaciones

1. Dado un cubo de lado x, escribe la expresión algebraica que representa la suma del perímetro de una de sus caras, del área de una de las caras y del volumen del cubo.

2. Determina el perímetro de un rectángulo, sabiendo que la longitud del lado mayor es cuatro veces la del lado menor. Determina también su área y su diagonal.

TEORÍA. Polinomios. Operaciones con polinomios.

TEORÍA. Valor numérico de un polinomio

TEORÍA. Raíz de un polinomio

TEORÍA. Regla de Ruffini para obtener el cociente y el resto de dividir P(x) entre (x-a)

TEORÍA. Teorema del resto

TEORÍA. Teorema del factor

TEORÍA. ¿Qué es factorizar un polinomio?. Procedimiento a seguir.

3. Dado $P(x)=x^3+ax-4$, calcula 'a' sabiendo que el resto de dividir $P(x):(x-2)$ es 8.

4. Halla el valor de m para que el polinomio $P(x)=2x^3-3mx^2+x+3$ sea divisible por $(x+1)$.

5. Encuentra un polinomio de 2º grado que tenga como término independiente -3 y cuyo valor numérico para x=2 sea 7 y para x=-2 sea 3.

6. Si el cuadrado de un polinomio es $x^4-10x^3+37x^2-60x+36$, ¿Cuál es dicho polinomio?.

7. Factoriza los siguientes polinomios:

a) x^3-5x^2+6x b) $5x^3-5$ c) $x^5+4x^4+5x^3+2x^2$ d) $x^3-4x^2+4x-16$ e) $4x^4-15x^2-5x+6$

8. Intenta factorizar $x^4+4x^3+8x^2+7x+4$. (Observación: dicho polinomio es divisible por x^2+x+1)

9. a) Construye un polinomio de grado 4 tal que posea tres raíces distintas.
b) Determina un polinomio de grado 4 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.
c) Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz.

TEORÍA. Fracciones algebraicas. Operaciones.

10. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}$ b) $\frac{3x}{2x-3}-6x$ c) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{5x}{x+2}$ d) $\frac{7x}{x+2}:\frac{1}{x^2-4}$

TEORÍA. Ecuaciones de 2º grado.

TEORÍA. Ecuaciones 2º grado incompletas.

TEORÍA. Ecuaciones bicuadradas.

TEORÍA. Ecuaciones de grado >2.

TEORÍA. Ecuaciones con radicales.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$ b) $6+\sqrt{x}=x$ c) $6-\sqrt{x}=x$ d) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=7$

TEORÍA. Ecuaciones con valor absoluto.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $|3+5x|-x=6$ b) $|x^2-x-2|+2=x$

Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4^{3x} = 0{'}25^{3x+2}$ b) 2^{7-x^2}- = $\frac{1}{4}$ c) $\frac{9^{x+1}}{3^{x+2}} = 10$ d) $5^{x+3} = 130$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$ b) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 3$ c) $2\log(x) - \log(x-1) = 3\log(2)$ d) $4\log_2(x^2+1) = \log_2 625$

Plantea, clasifica y resuelve sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas

TEORÍA. Posibles soluciones de un sistema (SCD, SCI, SI). Sistemas lineales y no lineales. Distintas formas de resolución (sustitución, Gauss, Regla de Cramer)

15. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x+y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=90 \\ \log(x)+1=\log(y) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^{x-1}=8^{y+3} \\ \log(2x-y^2)=\log(2-y)+1 \end{cases}$

TEORÍA. Método de Gauss para la resolución de sistemas

16. Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 7x+2y-z=0 \\ 3x+5y+4z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ 5x-3y+z=3 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+2y-3z=1 \\ 5x-3y+2z=4 \\ 3x-3y+2z=2 \end{cases}$

TEORÍA. Cálculo de determinantes 2x2 y 3x3. Regla de Sarrus.

17. Calcula el determinante de las siguientes matrices:

a) A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) B = $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

TEORÍA. Regla de Cramer para SCD.

18. Analiza si los siguientes sistemas de ecuaciones son de Cramer y, en su caso, resuélvelos:

a) $\begin{cases} x - y + 5z &= 13 \\ 3x - 2y + z &= 12 \\ x + y + 2z &= 9 \end{cases}$ (S: (4,1,2)) b) $\begin{cases} x - y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 2 \\ x - y - z &= -3 \end{cases}$ (S: (1,2,2))

Problemas de sistemas de ecuaciones

19.Para recaudar dinero para el viaje de fin de curso, unos estudiantes han vendido camisetas, bufandas y gorras a 10, 5 y 7 euros respectivamente. Han recaudado en total 2980 euros. El número total de prendas vendidas ha sido 380. El número de camisetas vendidas fue el doble del número de gorras vendidas. Plantea y resuelve el correspondiente sistema de ecuaciones.

20. En un departamento de una empresa internacional trabajan 18 personas de tres nacionalidades: franceses, ingleses y alemanes. El número de empleados franceses es igual al doble del número que resulta al sumar el número de ingleses y alemanes. Y el número de alemanes es el doble del número de ingleses. Plantea y resuelve el sistema que permita obtener el número de trabajadores de cada nacionalidad.

21. Los alumnos de 2º de Bachillerato de un centro escolar votan entre los tres posibles destinos para el viaje de fin de curso: Roma, Londres y París. El número total de votos es 120. El número de alumnos que quieren ir a Roma es el triple de la diferencia entre los que quieren ir a París y los que quieren ir a Londres. El número de alumnos que quieren ir a Paris es la mitad de la suma de los que quieren ir a Roma y a Londres. Plantea y resuelve el correspondiente sistema de ecuaciones.

Problemas de álgebra

1. Un estudiante mete una parte de sus ahorros en un banco que le da un 3% de interés. El resto del dinero que es un 40% lo invierte en acciones de la bolsa que le dan un interés del 12%.

a) Determina el polinomio que expresa las ganancias en función de la cantidad de dinero invertida.

b) Si sus ahorros son 2300€, ¿Cuánto dinero ganará con la inversión?.

2. Una empresa de Hellín ha determinado que sus ingresos vienen dados por la expresión $I(x)=2200-40x+x^2$ con x el nº de unidades de producto vendidas y sus gastos en nóminas y seguros sociales vienen dados por $C(x)=3400-50x$.

a) Expresa la ganancia de la empresa G(x) en función del nº de unidades vendidas.

b) ¿Cuántas unidades tienen que vender para que no haya pérdidas?.

c) ¿Qué beneficio tendrán si venden 110 unidades?

3. Sumando siete unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿De qué número se trata?

4. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Escribe la expresión algebraica que resulta de aplicar el Teorema de Pitágoras y calcula la hipotenusa y los catetos.

5. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

6. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.

7. Unos pantalones le han subido en diciembre un 20% el precio, en enero se lo han bajado un 30% y en febrero se lo han vuelto a subir un 15%. Si el precio en febrero es de 51,13€. ¿Qué precio tenía a principios de diciembre antes de la primera subida?. ¿Qué porcentaje le han aplicado en total desde diciembre a febrero?.

8. Tenemos dos tipos de baldosas rectangulares, unas rojas de 30x40 cm y otras verdes de 20x50 cm. Si para cubrir una habitación elegimos las rojas necesitamos 40 baldosas menos que si elegimos las verdes. ¿Qué superficie tiene la habitación?.

9. Dos grifos llenan un deposito de 1000 litros en 1 hora y 12 minutos. Por separado, el primero tardaría 1 hora más que el segundo en llenar el depósito. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno por separado?.

10. Una balsa se llena en 5 horas utilizando su toma habitual y en 20 horas utilizando una manguera. ¿Cuánto tardará en llenarse si se usan la toma habitual y la manguera a la vez?

11. Un granjero espera obtener 36€ por vender una cierta cantidad de huevos. Por el camino se le rompen 4 docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta el precio de la docena en 0,45€. ¿Cuántas docenas tenía al principio?.

12. Un grupo de amigos se gastan 135€ en una cena. Aprovechando un despiste se escapan 4 de los amigos, con lo que para poder pagar la cuenta ahora tienen que poner 12€ más cada uno de los amigos que quedan. ¿Cuántos amigos eran al principio?.

13. Calcula las dimensiones de un rectángulo de perímetro 28 cm y diagonal 10 cm.

14. Un triángulo equilátero tiene un área de 30 m^2. ¿Cuánto mide su lado?.

15. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €.Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca .¿Cuánto vale cada cosa?

16. Las **tres cifras** de un número suman 24. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 198; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.

17. Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 66 €. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5 €.

18. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano. La suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

B2.C1.2. Inecuaciones

Repasar los ejercicios 39, 40, 41, 42 y 43 del tema 1.

UNIDAD 3. Números Complejos.

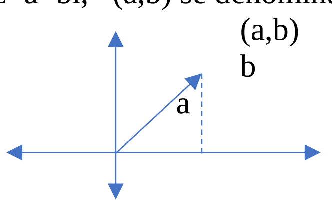
Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
A2. Relaciones	– Los números complejos como soluciones de ecuaciones polinómicas que carecen de raíces reales.

Resumen del tema:

1. Definiciones
i=$\sqrt{-1}$, por lo tanto $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{a}\cdot i$
- **Nº Complejo:** z=a+bi, con a,b reales.
a se llama parte real y b se llama parte imaginaria.
- **Imaginario puro:** bi (no tiene parte real, a=0)
Diremos que un complejo z es real si b=0.
- **Complejo opuesto**: -a-bi
- **Complejo conjugado:** a-bi

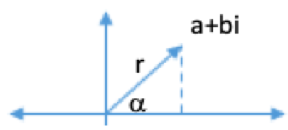
2. Teorema fundamental del Álgebra
Toda ecuación polinómica de grado n tiene n soluciones complejas. Además dichas soluciones van en parejas ya que si z es solución entonces $\bar{z}$

3. Representación gráfica de complejos
z=a+bi, (a,b) se denomina afijo.



4. Operaciones con nºs complejos en forma binómica (z=a+bi)
- Suma: (a+bi)+(c+di)=(a+c) + (b+d)i
- Resta: (a+bi)-(c+di)=(a-c) + (b-d)i
- Producto: (a+bi)·(c+di)=(ac-bd) + (ad+bc)i
- División: (a+bi)/(c+di) → Quitar el complejo del denominador multiplicando por el conjugado c-di

5. Forma polar y forma trigonométrica
Forma polar: z= r_α , r es el módulo y α el argumento
Forma trigonométrica: z= r(cosα+ isenα)



r=$\sqrt{a^2+b^2}$

6. Paso de una forma a otra
- Binómica a polar: z= r_α, r=$\sqrt{a^2+b^2}$, α=$tag^{-1}(\frac{b}{a})$
- Polar a binómica: z=a+bi, a=rcosα, b=rsenα
- Binómica/polar a trigonométrica: z=r(cosα+

7. Operaciones en polares
- Producto: $r_\alpha \cdot s_\beta = (r\cdot s)_{\alpha+\beta}$
- Potencia: $(r_\alpha)^n = r^n{}_{n\alpha}$
- Cociente: $r_\alpha : s_\beta = (r:s)_{\alpha-\beta}$
- Raíz n-ésima: $\sqrt[n]{r_\alpha} = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha}{n}+\frac{360k}{n}}$, k=1,2,…, n-1

8. Fórmula de Moivre
$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)$

Ejercicios Tema 3. Números Complejos

TEORÍA. Definición de número complejo. Algunos conceptos.

TEORÍA. Representación de números complejos en el eje cartesiano.

1. Hallar x e y para que se cumpla que $2+xi=y-3i$.
2. Obtener las soluciones complejas de la ecuación $z^2-4z+13=0$.
3. Calcula i^2, i^3, i^4, i^5, i^6,… . ¿Ves que se repite algo cíclicamente?. Calcula i^{101}.
4. Comprobar que $2+3i$ y $2-3i$ son soluciones de $z^2-4z+13=0$.
5. Obtén un polinomio cuyas soluciones sean $3i$ y $-3i$.
6. Obtén las soluciones reales y complejas de la ecuación $x^3=-8$.

TEORÍA. Operaciones con números complejos.

7. Calcula:

   a) (6-3i)-(3-i)-3(4-2i) b) (2-4i)·(3-5i) c) $\frac{2+3i}{3-5i}$

8. Comprueba que $\frac{5+10i}{3-4i}+\frac{2-i}{i}=-2$.
9. Representa gráficamente z_1=3+2i, z_2=2+5i y z_1+z_2 . Comprueba que z_1+z_2 es la diagonal de un paralelogramo de lados z_1 y z_2 .
10. ¿Cuánto debe valer "x" para que $(4-xi)^2$ sea imaginario puro.
11. Calcula a y b de forma que $(a+bi)^2$=6+8i
12. Calcula el valor de "a" para que $(2a-3i)^2$ sea imaginario puro.
13. Calcula el valor de "x" para que (2-4i)(5+xi) sea un número real.
14. Halla dos números complejos conjugados sabiendo que su suma es 8 y la suma de sus módulos es 10.

TEORÍA. Números complejos en forma polar.

Paso de forma binómica a forma polar

Paso de forma polar a forma binómica.

15. Pasar a forma polar los números complejos $z_1=-2+2\sqrt{3}i$, $z_2=-2$, $z_3= 2i$.
16. Pasar a forma binómica los números complejos $z_1=5_{225º}$, $z_2=4_{0º}$.
17. Escribe en forma polar los siguientes números complejos: a) 5-12i , b) $\sqrt{3}$ + i , c) 1 – i , d) 3+4i , e) -4i
18. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos: a) $2_{120º}$, b) $3_{30º}$, c) $4_{180º}$, d) $5_{90º}$, e) $6_{240º}$

TEORÍA. Operaciones en forma polar. Formula de Moivre

19. Dados los complejos $z_1=4_{60º}$ y $z_2=3_{140º}$. Calcula: a) $z_1 \cdot z_2$, b) z_1^5 , c) z_2^4 , d) z_1/z_2
20. Comprueba que $(1+i)^{16}=256$.
21. Calcula $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{30}$

TEORÍA. Raíz n-ésima de un número complejo.

22. Representa las raíces cúbicas de 4i.
23. Resuelve $z^4+\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)=0$

UNIDAD 4. TRIGONOMETRÍA

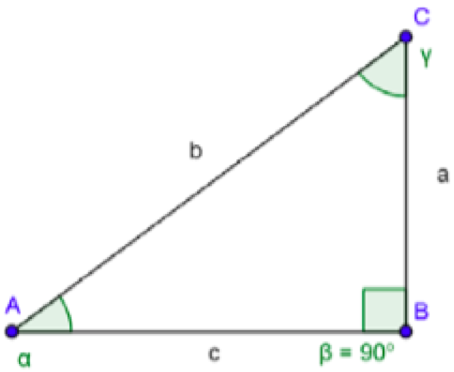
Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
B1. Medición	– Cálculo de longitudes y medidas angulares: uso de la trigonometría.

Esquema:

- Unidad 4
  - Razones Trigonométricas
    - seno, coseno, tangente; $sen^2x+cos^2x=1$; $1+tg^2x=1/cosx$
    - Relaciones de ángulos en la Xircunferencia Goniométrica (r=1)
  - Resolución de Triángulos
    - **Triángulos Rectángulos** Def.Razones, T.Pitágoras
    - **Tríangulo cualquiera** Teorema Seno, Teorema Coseno
  - Fórmulas y Ecuaciones Trigonométricas
    - Fórmulas Trigonométricas (sen(a+b), sen(a-b), sen(2a),sen(a/2), sen A + sen B, ...)
    - Ecuaciones Trigonométricas
  - Radianes. Representación de funciones trigonométricas

Resumen del tema:

1. Razones trigonométricas y algunas relaciones importantes.



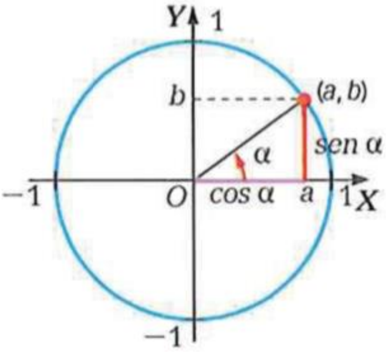
$\text{sen}(\alpha)=\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}=\dfrac{a}{b}$

$\cos(\alpha)=\dfrac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}=\dfrac{c}{b}$

$\text{tag}(\alpha)=\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}=\dfrac{a}{c}$

- **T^{ma} Fundamental Trigonometría:** $\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$
- **Otras fórmulas**: $\text{tag}(\alpha)=\text{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$; $1+\text{tag}^2(\alpha)=1/\cos^2(\alpha)$
- **Otras definiciones**:
  $\sec(\alpha)=1/\cos(\alpha)$; $\text{cosec}(\alpha)=1/\text{sen}(\alpha)$; $\text{cotag}(\alpha)=1/\text{tag}(\alpha)$
- **Teorema de Pitágoras**: $b^2=a^2+c^2$

2. Circunferencia Goniométrica y relación entre ángulos de distintos cuadrantes.
Circunferencia *goniométrica*: circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas. Al situar un ángulo α en dicha circunferencia, este la corta en un punto P de coordenadas P(cos(α),sen(α)).

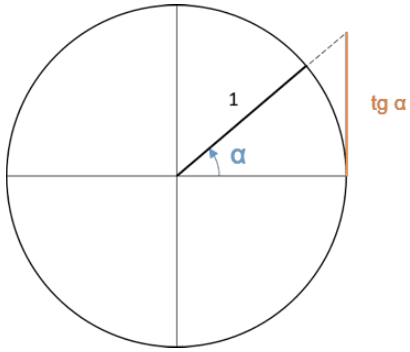


$(a, b) = (\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$

Como la hipotenusa del triángulo mide 1:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{1} = b \qquad \cos\alpha = \dfrac{a}{1} = a$

Representación de la tangente



Relaciones entre ángulos de distintos cuadrantes:
1º y 2º cuadrante (α y 180-α - Suplementarios) ; 1º y 3º cuadrante (α y 180+α) ;
1º y 4º cuadrantes (α y -α) ; 1 cuadrantes (α y 90-α - Complementarios) ; Ángulos >360º

3. Resolución de triángulos
- **Triángulos rectángulos**. Teorema de Pitágoras, razones trigonométricas y Teorema Fundamental ($\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)=1$)
- **Triángulos en general.**
• Método de las tangentes.
• Teorema del seno.

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

• Teorema del coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(A)$$

4. Radián.
Se llama **radián** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.

Cómo la longitud de una circunferencia es 2πR,
2∏ radianes ----------------------- 360º
1 radián ----------------------- x
Los grados se usan en resolución de triángulos y en problemas trigonométricos. Los radianes se utilizan más en la representación y estudio de las funciones trigonométricas.

5. Fórmulas Trigonométricas.

Razones Trigonométricas del ángulo suma a+b

sen (a+b) = sen(a)·cos(b) + cos(a)·sen(b)

cos (a+b) = cos(a)·cos(b) - sen(a)·sen(b)

$$\text{tag}(a+b)=\frac{tag(a)+tag(b)}{1-tag(a)tag(b)}$$

Razones Trigonométricas del ángulo doble

sen (2a) = 2·sen(a)·cos(b)

cos (2a) = $\cos^2(a) - \text{sen}^2(a)$

$$\text{tag}(2a)=\frac{2tg(a)}{1+tg^2(a)}$$

Razones Trigonométricas del ángulo diferencia a-b

sen (a-b) = sen(a)·cos(b) - cos(a)·sen(b)

cos (a-b) = cos(a)·cos(b) + sen(a)·sen(b)

$$\text{tag}(a-b)=\frac{tag(a)-tag(b)}{1+tag(a)tag(b)}$$

Razones Trigonométricas del ángulo mitad

$$sen\,\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$tg\,\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

Sumas y diferencias de senos y cosenos

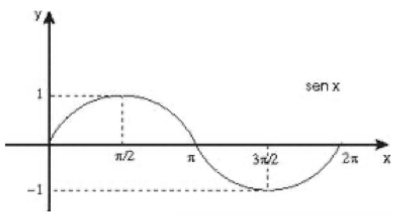
$$\boxed{\text{sen}\,A+\text{sen}\,B=2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

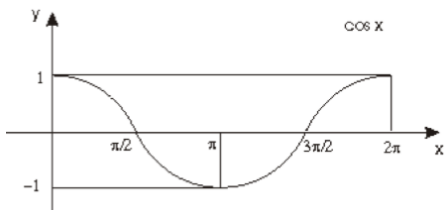
$$\boxed{\text{sen}\,A-\text{sen}\,B=2\cos\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}}$$

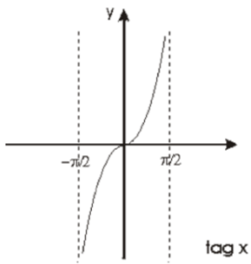
$$\boxed{\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\boxed{\cos A-\cos B=-2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}}$$

6. Funciones trigonométricas







7. Ecuaciones Trigonométricas

Hacer cambios de variable, usar el Teorema Fundamental de la Trigonometría, …

(i) $\text{sen}^2(x)-\text{sen}(x)+2=0$

(ii) $\cos^2(x)+\text{sen}(x)=1/2$

(iii) $\cos^2(x)-3\text{sen}^2(x)=0$

(iv) $2\cos(x)=3\text{tag}(x)$

(v) $\text{sen}(2x) \cdot \cos(x)=1$

Ejercicios Tema 4. Trigonometría

Resuelve problemas geométricos utilizando trigometría

TEORÍA. Razones trigonométricas.

TEORÍA. Teorema fundamental de la trigonometría.

TEORÍA. Otras fórmulas.

TEORÍA. Tabla de razones trigonométricas más habituales

1. ¿Existe un ángulo "x" tal que $\operatorname{sen}x=1/2$ y $\cos x=1/4$? ¿Puede valer el seno de un ángulo 1/8?.
2. Calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α:

   a) $\operatorname{sen}\alpha=1/4$ y α del primer cuadrante; b) $\operatorname{sen}\alpha=-1/3$ y α del tercer cuadrante.

TEORÍA. Circunferencia goniométrica. Signos según el cuadrante. Relaciones entre cuadrantes.

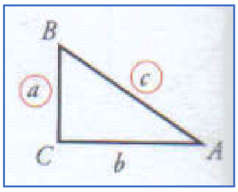
3. Sabiendo que sen 35º = 0,57 ; cos 35º = 0,82 ; tag 35º =0,70, calcula las razones trigonométricas de 55º, 125º, 145º, 215º, 235º, 305º y 325º sin usar la calculadora.
4. Si sec α = -2 y α no pertenece al tercer cuadrante calcular el resto de las razones trigonométricas.
5. Dibuja un ángulo cuyo seno sea el doble que su coseno.
6. Si un ángulo está situado en el tercer cuadrante. ¿Qué signo tienen: la cotangente, la cosecante y la secante de ese ángulo?.

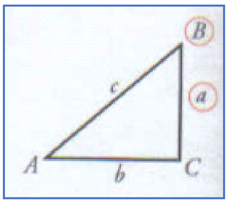
Problemas

Triángulos rectángulos → Razones trigonométricas – Teorema de Pitágoras
Triángulos generales → Método de las tangentes, teorema del seno y teorema del coseno

7. En un tramo de carretera la inclinación es del 5 % (sube 5 m en 100 m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100 m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?
8. a) En un triángulo rectángulo, un cateto a=11 cm y la hipotenusa c=20 cm . Halla los demás elementos.

   b) En un triángulo rectángulo, un ángulo $\hat{B}$=50º y un cateto a=15 cm. Hallar los demás elementos.

a) 

b) 

TEORÍA. Método de las tangentes

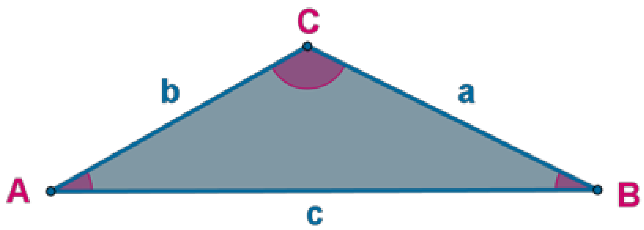
9. Desde un punto vemos el punto más alto de una torre con un ángulo de 30 grados y al acercarnos 5 metros se ve con un ángulo de 40 grados. Calcular la altura de la torre.
10. Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?
11. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?

TEORÍA. Teorema del seno.

TEORÍA. Teorema del coseno.

12. En un triángulo conocemos dos de sus ángulos y un lado: A = 55º, C = 98º, a = 7'5 cm. Resuélvelo.
13. Un triángulo tiene de lados 3, 5 y 7. Calcula sus ángulos.
14. Dado el siguiente triángulo, calcula los elementos que faltan en cada caso**:**

    a) A =45º, b=50 m, a=40 m
    b) B =30º, a=5 cm, b=3 cm
    c) A =45º, C=60º, b=20 m
    d) C =45º , b=10m, c=6 m
    e) C= 40º, a=7 m , b=22 m
    f) a=5 cm, b=4 cm, c=4 cm



15. Dos amigos están en una playa a 150 m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50º y el otro con un ángulo de 38º. ¿Qué distancia hay desde cada uno de ellos a la cometa?.

16. Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127º. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km. ¿Podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde? (nudo=milla/hora; milla=1850 m).

17. Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60º En la misma dirección pero formando un ángulo de 30 º vuela una perdiz a 100 m de altura. Si el buitre quiere comerse la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150 m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están?.

Conoce las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, del ángulo doble, del ángulo mitad, de la suma y de la diferencia de otros dos

TEORÍA. Concepto de radián

18. Expresa en radianes las siguientes medidas: 60 º, 120 º, 225 º, 330 º.

19. Expresa en grados sexagesimales: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{10\pi}{6}$ radianes.

20. ¿Cuánto suman (en radianes) los ángulos de un triángulo? ¿Cuánto mide un ángulo recto en radianes?

TEORÍA. Fórmulas trigonométricas.

21. Demuestra que: a) $1+tg^2(a) = sec^2(a)$ b) $1+cotg^2(a) = cosec^2(a)$

22. Demuestra que $\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{sen(a+b)+sen(a-b)} = \frac{1}{tg(a)}$

23. Demuestra que $\frac{2sen(a)-sen(2a)}{2sen(a)+sen(2a)} = \frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}$

24. Demuestra que $2tg(a)\cdot sen^2(a/2) + sen(a) = tg(a)$

25. Demuestra que $(sen(a)+cos(a))^2 - (sen(a)-cos(a))^2 = 4\,sen(a)cos(a)$

26. Demuestra que $cos(a+60º) - cos(a+120º) = cos(a)$

27. Demuestra que $sen(a)\cdot cos^2(a) + sen^3(a) = sen(a)$

28. Demuestra que $tg(a+45º) - tg(a-45º) = \frac{2+2tg^2(a)}{1-tg^2(a)}$

29. Demuestra que $\frac{sen(x)}{1+\cos(x)} + \frac{sen(x)}{1-\cos(x)} = \frac{2}{sen(x)}$

30. Demuestra que $\frac{\cos(a)+sen(a)}{\cos(a)-sen(a)}\cdot\cos(2a) = 1 + sen(2a)$

31. Demuestra que $sen(3a) = 3\,sen(a) - 4\,sen^3(a)$

Resuelve ecuaciones e identidades trigonométricas

TEORÍA. Algunas ideas para resolver ecuaciones trigonométricas.

32. Resuelve las siguientes ecuaciones:

    a) sen(2x)=1/2 b) $\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$ c) 2sen(x)=cos(x) d) sen(2x) = tg(x)

33. Resuelve las siguientes ecuaciones:

    a) tg(x) = $-\sqrt{3}$ b) $\cos^2(x) = 1$ c) $tg^2(x)$-tg(x)=0 d) $2sen^2(x)+3\cos(x)=3$

34. Resuelve la ecuación cos (x+30º) = sen(x)

35. Resuelve la ecuación cos(3x)+cos(x)=0 (Pista: Usar la fórmula cos(A)+cos(B)=2cos($\frac{A+B}{2}$) cos($\frac{A-B}{2}$))

36. Resuelve la ecuación sen(5x)-sen(3x)=0. Utiliza la fórmula de transformar resta de senos en producto.

37. Resuelve las siguientes ecuaciones:

    a) 2tg(x)-3cotg(x)-1=0 b) $\cos^2(x) - 3sen^2(x) = 0$

    c) sen(2x+60º)+sen(x+30º)=0 d) $sen^2(x) - \cos^2(x) = 1/2$

38. Resuelve al ecuación 4cos(2a)+3cos(a)=1.

39. Resuelve sen(180º-a) = cos(270º-a) + cos(180º)

40. Resuelve sen(45º-a) + $\sqrt{2}\, sen(a) = 0$

UNIDAD 5. FUNCIONES, LÍMITES Y ASÍNTOTAS.

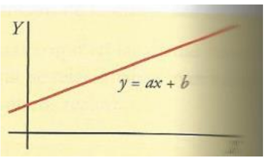
Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
D2. Modelo matemático	− Relaciones cuantitativas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas.
D4. Relaciones y funciones	− Análisis, representación gráfica e interpretación de relaciones. − Propiedades de las distintas clases de funciones, incluyendo, polinómicas, exponenciales, irracionales, racionales sencillas, logarítmicas, trigonométricas y a trozos: comprensión y comparación.
B2. Cambio	− Límites a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica.

Resumen del tema:

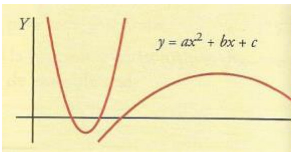
Concepto de función

Funciones elementales:

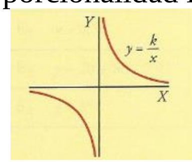
Lineales



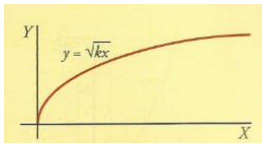
Cuadráticas



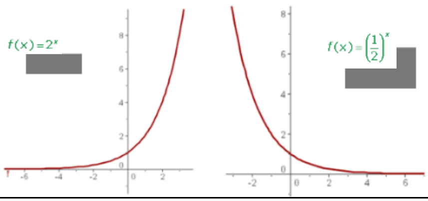
Proporcionalidad inversa



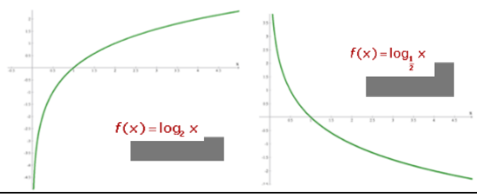
Radicales



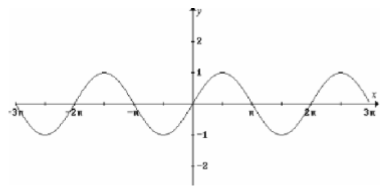
Exponenciales



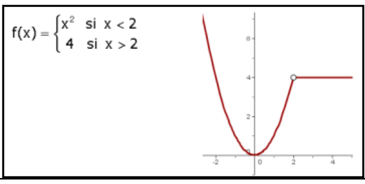
Logarítmicas



Trigonométricas (sen(x),cos(x),tg(x))



Funciones definidas a trozos



- Entender qué es y cuales son los intervalos de cada trozo.
- Hay que saber representarlas y al revés.
- Expresar una función con valor absoluto como función a trozos

Composición de funciones
Saber calcular g o f y f o g

Función inversa
Dada y=f(x), escribir x=f(y) y despejar “y”.

Dominio y recorrido de una función

	Dominio	Recorrido
Funciones polinómicas P(x)	R	Rectas (R), Parábolas (desde vértice),…
Funciones Racionales P(x)/Q(x)	R- {raíces de Q(x)}	Calcular la inversa si es posible
Funciones Radicales $\sqrt{Q(x)}$	Estudiar la inecuación $Q(x) \geq 0$	Calcular la inversa si es posible
Funciones exponenciales a^x	R	(0,+∞)
F. Logarítimicas $\log_a(Q(x))$	Estudiar la inecuación $Q(x) > 0$	Calcular la inversa si es posible
Funciones Trigonométricas	R	Pensarlo gráficamente

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES	limf(x)+g(x)=limf(x)+limg(x)	limf(x)·g(x)=limf(x)·limg(x)	limg(f(x))=g(limf(x)) Ej: lim log(x^2)=log(lim(x^2))
	limf(x)/g(x)=limf(x)/limg(x)	lim(nº f(x))=nº limf(x)	
LÍMITES LATERALES	Para que exista un límite tiene que existir su límite por la izquierda y por la derecha y además coincidir.		

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$	
$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \neq \infty$	**Hay una asíntota horizontal en y=c.**
Si f(x)= $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q polinomios	(1) Si Grado P > Grado Q → Tiende a $\pm\infty$. Para saber el signo sustituir por un número grande para ver el signo. (2) Si Grado P < Grado Q → Tiende a 0. (3) Si Grado P = Grado Q → Tiende al cociente de los números que acompañan a los monomios de mayor grado. https://youtu.be/icZDdqfHAUo
Si f(x)= $\dfrac{g(x)}{h(x)}$, con g y h funciones	- Si g(x) crece más rápido que h(x) tiende a ∞ y si es al revés tiende a 0. -Orden de algunas funciones: $\log(x) \approx \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \approx x \approx x^2 \approx x^5 \approx 2^x \approx 7^x$
$\infty - \infty$	-Resolver la expresión si se puede (Ej: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x+3} - 2x$) -Si es la diferencia de dos funciones, dependerá del orden de cada una. -Si hay raices y los grados son los mismos multiplicar por el conjugado numerador y denominador (Ej: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$). https://youtu.be/XSflUKZbvpE
a^{∞}, con a$\neq$1	-Si a>1 tiende a ∞ y si 0<a<1 tiende a 0.
1^{∞}	Usar la fórmula $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$ https://youtu.be/39Q1ZwI9cFY
$\dfrac{0}{0}$	-Resolver para convertirlo en otro tipo de indeterminación. (Ej: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} : \dfrac{1}{x+1}$)

LÍMITES CUANDO $x \to -\infty$
Usar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$ https://youtu.be/bQVo28zy27k

LÍMITES CUANDO $x \to a$	
$\dfrac{k}{0}$, con $k \neq 0$	-Hay que estudiar los límites laterales para ver si salen + ó – infinito. Izq→ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$; Dcha→ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ **-Hay una asíntota vertical en x=a.** https://youtu.be/yoAPeT7_mq8
$\dfrac{0}{0}$	-Descomponer numerador y denominador y simplificar. https://youtu.be/UtB_d6ZS_wg -Si aparecen raíces, multiplicar por el conjugado. https://youtu.be/0M6wB158APQ
$\infty - \infty$	-Operar con la función para cambiar de indeterminación. (Ej: $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^2}{x-3} - \dfrac{x}{x^2-9}$)
1^{∞}	-Resolver usando el número "e".
REGLA DE L´HOPITAL	$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Representa funciones elementales y estudia sus propiedades locales y globales.

TEORÍA. Definición de función.

Ejemplo gráfico

TEORÍA. Dominio de una función.

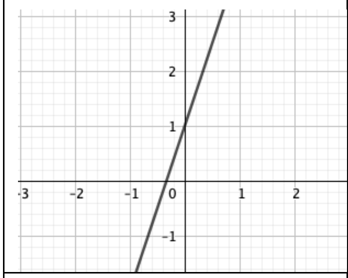
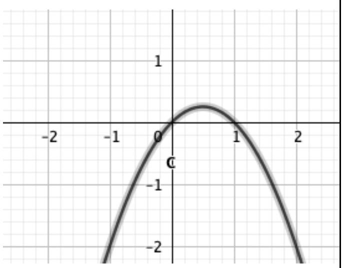
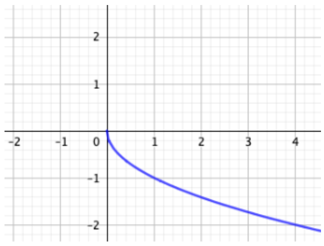
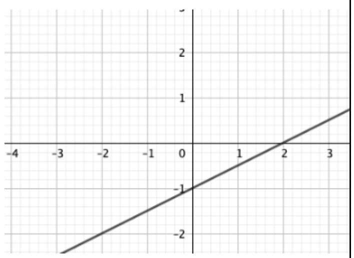
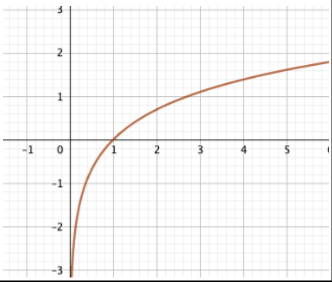
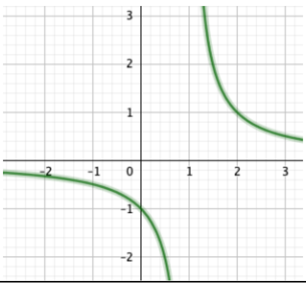
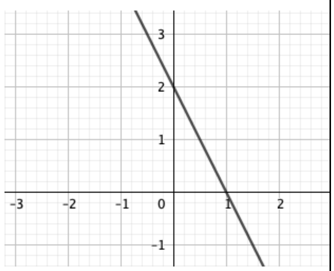
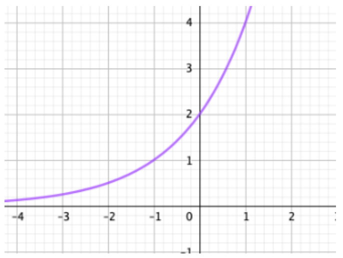
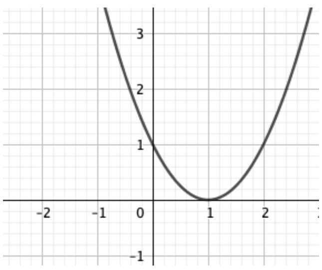
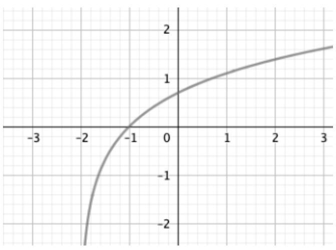
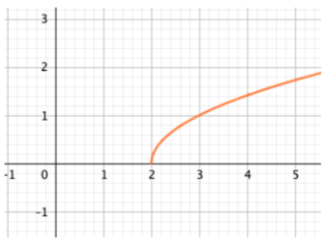
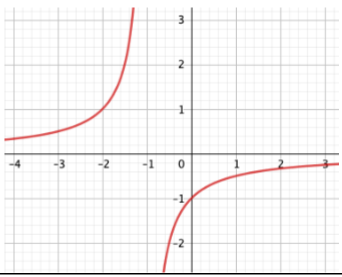
TEORÍA. Recorrido de una función.

TEORÍA. Funciones elementales.

Lineales y=k Dom(f)=	Cuadráticas y= ax+b Dom(f)=	Polinómicas y= ax^2+bx+c Dom(f)=	Racionales y=P(x) Dom(f)=
Racionales y=1/x Dom(f)=	Exponenciales y=√x Dom(f)=	Logarítmicas y=2^x Dom(f)=	Trigonométricas y=log(x) Dom(f)=
Racionales y=sen(x) Dom(f)=	Exponenciales cos(x) Dom(f)=	Logarítmicas y=tg(x) Dom(f)=	

1. Coloca las siguientes funciones debajo de su dibujo:

Lineales	Cuadráticas	Proporcionalidad Inversa	Radicales	Exponenciales	Logarítmicas
y=3x+1	y=-x^2	y= $\frac{1}{x+1}$	y=$\sqrt{x+1}$	y=2^{x+1}	y=log(x)
y=-2x+2	y=x^2-2x+1	y= $\frac{1}{x-1}$	y=$\sqrt{x-2}$	y=2^{x-1}	y=log(x+2)
y=(1/2)x-1	y=-x^2+x	y= -$\frac{1}{x+1}$	y=-$\sqrt{x}$	y=(1/2)^x	y=-log(x)

			
y=	y=	y=	y=
			
y=	y=	y=	y=
			
y=	y=	y=	y=

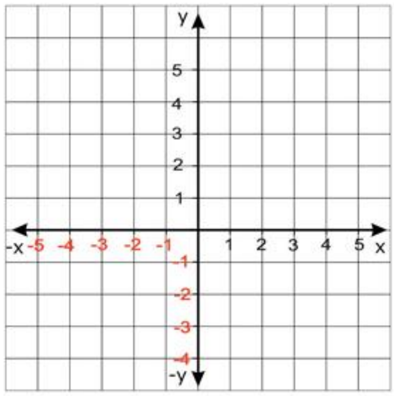
TEORÍA. Transformación de funciones

2. Representa estas funciones:

   a) y= $\frac{1}{x-2}$ b) y= $\frac{1}{x+2}$ c) y= -$\frac{1}{x+2}$ d) y= $\frac{1}{x+2}$ +2

TEORÍA. Funciones a trozos.

Representa gráficamente:



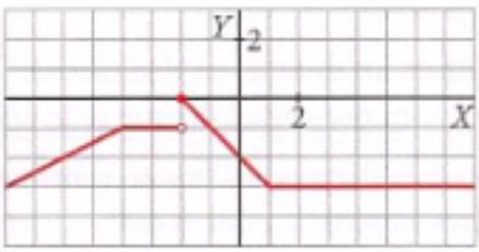
3. Representa la función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-3,0) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [0,3] \\ 4 & x \in (3,7) \end{cases}$$

4. Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x < 1 \\ x^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

5. Escribe la expresión gráfica que corresponde a la siguiente gráfica:

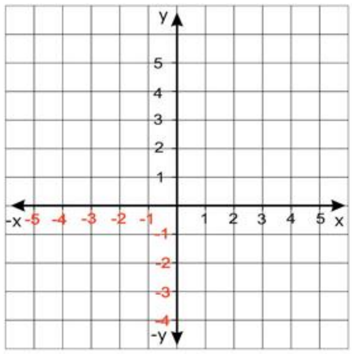


TEORÍA. Función parte entera y función parte decimal (ejemplos de funciones a trozos).

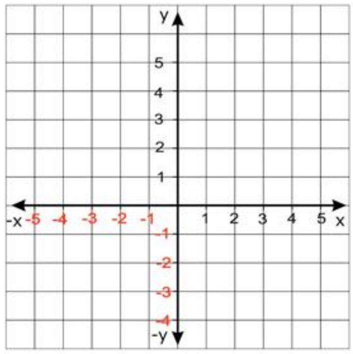
TEORÍA. Función valor absoluto.

Expresa como una función a trozos y representa gráficamente:

a) $f(x)=|x+1|$



b) $f(x)=|x^2-5x+6|$



Realiza composiciones de funciones y cálculo de funciones inversas.

TEORÍA. Composición de funciones

6. Dadas $f(x)=x^2-5x+6$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=sen(x)$, $l(x)=x+3$. Calcular $g(f(x))$, $f(g(2))$, $f(h(x))$, $h(l(x))$, $l(h(x))$.

TEORÍA. Función inversa.

7. Comprueba que las funciones y=2x , y=x/2 son funciones inversas.
8. Comprueba que las funciones y=2x+4 , y=x/2 - 2 son funciones inversas.
9. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

   a) y=3x+2 b) y=$x/4$ +3 c) y=$\frac{3x-1}{x}$ d) y=$\frac{2x-1}{3x+3}$ e) y= 3^{x+1} f) y= log(x-2)

10. Descomponer y=$2x^2$-4 en dos ramas para hallar sus inversas.

Conoce las operaciones con funciones y las aplica en el cálculo de dominios.

TEORÍA. Dominio de las funciones elementales.

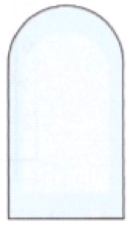
Funciones	Dominios
Polinómicas (P(x)) Exponenciales (2^x) Sen(x), Cos(x)	
Racionales P(x)/Q(x)	
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	
Logarítmos $\log_a$(Q(x))	

11. Calcula el dominio de las siguientes funciones

a) y= $\sqrt{x^2-4}$ b) y=$\sqrt{x-4}$ c) y=$\sqrt{2-x}$ d) y=$\frac{2x+1}{3x-1}$ e) y=$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

f) y=x^4-4x+1 g) y=$\frac{1}{x^2-9}$ h) y=log(x-5) i) y=log (x^2-5x+6) j) y=$\frac{x}{\log(x^2+16)}$

Estudia y analiza funciones en contextos reales.



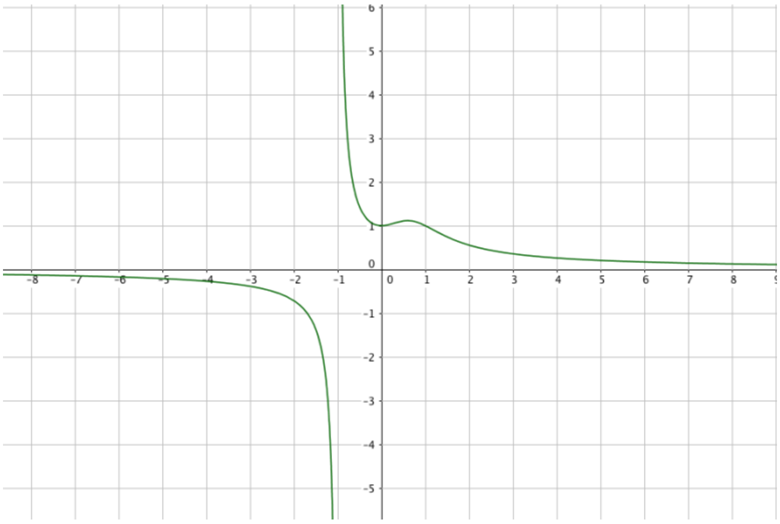
12. Se quiere hacer una ventana con forma de rectángulo añadiéndole un semicírculo sobre el lado menor en la parte superior. Si el perímetro del rectángulo es 8 m, escribe el área de la ventana en función del lado menor del rectángulo. Indica cuál es su dominio y su recorrido.
13. Una feria ganadera está abierta entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función $N(t)=-20t^2+Bt+C$, donde t es la hora de visita. Sabiendo que a las 17h se alcanza el máximo de 1500 visitantes, calcula B y C.
14. El coste de producción de un modelo de batidora es $C(x)=x^2/4 +35x +25$ y el precio de venta $V(x)=50-(x/4)$ con x el número de unidades producidas. Escribe la función B(x) de beneficio total y halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones.

TEORÍA. Idea intuitiva de límite.

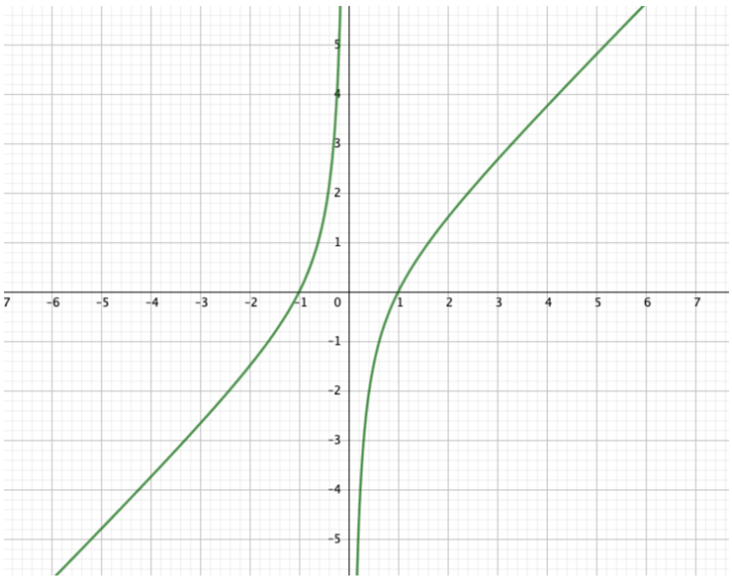
TEORÍA. Límites cuando x→c. Límites cuando x->∞

15. Dada esta función, indica cuanto valdrá cada uno de estos límites



a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$= b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$= c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$= d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$= e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$=

16. Dada esta función, indica cuanto valdrá cada uno de estos límites



a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$= b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$= c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$= d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$= e) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$=

17. Se ha realizado un estudio sobre el crecimiento del número de orugas en un bosque y se ha llegado a la conclusión de que el número de individuos viene dado por la función f(x) = $500\cdot 2^x$, donde x indica los años y f(x) el número de orugas.

a) ¿A qué cantidad se acerca el número de orugas si estamos próximos a los 3 años? ¿Y a los 5 años? .

b) Si no se pone ningún remedio, ¿qué ocurre con el número de orugas a largo plazo?.

18. Supongamos que tras realizar un estudio demográfico de una población albaceteña obtenemos que el número de habitantes viene dado por la función f(x)=$\frac{6400x+3000}{2x+2}$, donde x es el nº de años transcurridos.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?¿Y dentro de 2 años?

b) Suponiendo que la función es válida para todo el tiempo, ¿Crees que la población crecería indefinidamente o se estabilizaría en torno a un determinado número de habitantes?

19. Se ha comprobado en una empresa textil que los ingresos medidos en millones de euros vienen dados por la función I(x)= $\frac{5x}{x+4}$ y los gastos por la función G(x)= $\frac{3x+6}{x^2+2}$ con x el nº de años desde que se creó.

a) ¿Cuántos gastos tuvieron inicialmente al crear la empresa?

b)¿Qué ingresos y que gastos tuvieron el primer año?¿Y el segundo año?

c) El beneficio de la empresa será la diferencia entre ingresos y gastos. ¿Se puede decir que la empresa será rentable con el paso de los años?¿Tiende a estabilizarse el beneficio de la empresa?

LÍMITES EN FUNCIONES A TROZOS

TEORÍA. Propiedades de los límites.

TEORÍA. Límites laterales.

20. Estudiar para estas funciones cuál es el límite en el punto que se pasa de un trozo a otro:

$$\text{a) } f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 0 \\ x+1 & \text{si } x<0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x<0 \\ x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \quad \text{c) } f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } x\geq 0 \\ x+2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<1 \\ -3x-2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \quad \text{e) } f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 3-x & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \quad \text{f) } f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-1 \\ 1 & \text{si } -1<x<0 \\ x^2-2 & \text{si } x>0 \end{cases} \quad \text{h) } f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<2 \\ -x^2+4x-2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases} \quad \text{i) } f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x>1 \\ -2x+1 & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

21. Expresa la función $f(x)=|x^2-1|$ como una función a trozos y calcula su límite cuando x tiende a 1 y -1.

22. Calcula el límite de $f(x)=\frac{x-2}{|x-1|}$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

23. Calcula los valores de "a" y "b" para que exista el $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y exista el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si\ x\leq -2 \\ x-5 & si -2<x<1 \\ bx & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

LÍMITES CUANDO $x\to\infty$

TEORÍA. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, con P(x) y Q(x) polinomios.

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}$ 25) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+x}{2x^2-6x}$ 26) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2}{x^5+1}$ 27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-2x+1\right)$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)$ 29) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$ 30) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^5+x^2}{2x^2-1}$ 31) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$

TEORÍA. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

TEORÍA. Asíntota horizontal. ($\lim_{x\to\infty} f(x) = L$)

32) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\log(x)}$ 33) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$ 34) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{2^x}$ 35) $\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{3e^x-1}$

Indeterminación ∞-∞

TEORÍA. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ (Indeterminación)

Caso 1: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x+3} - 2x$

Caso 2: $\lim_{x\to\infty} 2^x - \ln(x)$

Caso 3: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x} - x$

36) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x+3} - 2x$ 37) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x+1} - 2x^2$ 38) $\lim_{x\to\infty} 2^x - x^2$ 39) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x} - x$

40) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$ 41) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ 42) $\lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt{x^2-2x}$

a^∞, **con a** $\neq 1$

43) $\lim_{x\to\infty} 2^x$ 44) $\lim_{x\to\infty} (\frac{2}{3})^x$ 45) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{x^2}$ 46) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{5^x}$

Indeterminación 1^∞

Dos opciones: 1) Utilizar $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 2) Fórmula $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$

45) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x^2}$ 46) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{x-5}$ 47) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$ 48) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x+1}{X+2}\right)^{\frac{1}{X-1}}$

49) Calcula:

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1)^{x-3}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^x$ c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^x$ d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x-1}$ e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{2x}\right)^{4x}$

f) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3}\right)^{x^3-1}$ g) $\lim_{x\to 6} \left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{1/x-6}$ h) $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{x+3}{3-x^2}\right)^{-x}$

50. Calcula el valor de “a” (a≠0) para que se verifiquen estas igualdades:

(i) $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+5x}{x^2+1}\right]^{ax} = e^{-5}$ (ii) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax} = e$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

51) $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{\frac{1}{x+1}}$

LÍMITES CUANDO $x \to -\infty$

TEORÍA. Cálculo de límites cuando x→-∞

52) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+x\right)$ 53) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^2+x\right)$ 54) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2}$ 55) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{x^2}$ 56) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot 2^x$

LÍMITES CUANDO $x \to a$

57) $\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2-6x+1\right)$ 58) $\lim\limits_{x\to5}\left(\sqrt[3]{x^2+2}-x\right)$ 59) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$

Caso $\frac{k}{0}$ - Estudiar los límites laterales

TEORÍA. Asíntota vertical. ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{k}{0}$)

60) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2}{x-3}$ 61) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3}{2x-6}$ 62) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x+4}{x^2-1}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

TEORÍA. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

63) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$ 64) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-6x+9}{x^2}$ 65) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}$ 66) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ 67) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

Indeterminación ∞-∞

68) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2}{x-3} - \frac{x}{x^2-9}$ 69) $\lim_{x\to 2} \frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x-2}$

Vídeo 1. Asíntotas.

V1.1. Incluye a continuación 3 ejes de coordenadas con los 3 tipos de asíntotas que se pueden calcular.

V1.2. Calcula las asíntotas verticales de la función y=$\frac{2x+1}{x-1}$

V1.3. Calcula las asíntotas horizontales de la función y=$\frac{2x+1}{x-1}$

V1.4. Calcula las asíntotas oblicuas de la función y=$\frac{x^2}{x+1}$

V1.5. Realiza en una hoja aparte el ejemplo que se incluye al final del vídeo haciendo el estudio completo de las asíntotas (Verticales, Horizontales y Oblicuas)

ASÍNTOTAS

TEORÍA. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

70) Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a) f(x) = $\frac{3x}{1-x}$ b) f(x) = $\frac{3x^2}{x^2-1}$ c) f(x) = $\frac{x^2+4}{x^2-9}$ d) f(x) = $\frac{2x}{1-x^2}$ e) f(x) = $\frac{x^2}{x+5}$

f) f(x) = $\frac{4x^2+1}{x^3-4x}$ g) f(x) = $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ h) f(x) = $\frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}$ i) f(x) =$\sqrt{x^2-1}$ j) f(x) = $x \cdot 3^x$

71) Determina el valor de "a" para que la función f(x) = $\frac{2x+5}{ax+8}$ tenga una asíntota vertical en x=4.

72) Determina el valor de "a" para que la función f(x) = $\frac{ax^2+2}{bx^2+ax+1}$ tenga una asíntota vertical en x=2 y una asíntota horizontal en y=1.

73) Sea $f(x) = \frac{ax^2-2x}{x^2+ax-5}$. Determina el valor de "a" para que la recta x=-1 sea una asíntota vertical de f(x).

74) Sea $f(x) = \frac{-20x+4}{ax+10}$. Determina el valor de "a" para que la recta x=2 sea una asíntota vertical de f(x). Para el valor de "a" obtenido, estudia si tiene una asíntota horizontal.

75) Sea $f(x) = \frac{4x^2}{wx^2-3}$. Determina el valor de "w" para que tenga una asíntota horizontal en y=12.

76) La función $f(x) = \frac{px^2+1}{x+1}$ tiene como asíntota oblicua la recta y=-2x+2. Determina el valor de "p" y estudia si la función corta a dicha asíntota oblicua para ese valor de "p".

UNIDAD 6. CONTINUIDAD Y DERIVADAS

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
B2. Cambio	− Continuidad de funciones: aplicación de límites en el estudio de la continuidad. − Derivada de una función: definición a partir del estudio del cambio en diferentes contextos. Cálculo y aplicación de derivadas de funciones usuales.

Resumen del tema:

Se dice que **una función f(x) es continua** en un punto x=a si y sólo si se cumplen estas 3 condiciones: 1. $\exists f(a)$ 2. $\exists\ lim_{x\to a^-} f(x) = lim_{x\to a^+} f(x) = lim_{x\to a} f(x)$ 3. $lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$	**Tipos de discontinuidad:** - **Discontinuidad evitable**. No existe f(a) ó existe pero no coincide con el límite.(Falla 1 o Falla 3) - **Discontinuidad de salto o de 1ª especie**.(Falla 2) • Salto finito: no coinciden los laterales y son finitos. • salto infinito: algún límite lateral es infinito. - **Discontinuidad esencial o de 2ª especie**. Cuando no existe algún límite lateral

Derivabilidad

Definición de derivada.	**Condición de derivabilidad:** Para que una función sea derivable en un punto x=a tiene que existir el límite de la derivada en dicho punto, es decir, existir el límite por la izquierda y por la dcha.
$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	**Nota:** Toda función derivable es continua

Función simple		Función compuesta (varias funciones)	
$f(x)= K$	$f'(x)= 0$		
$f(x) = x$	$f'(x)= 1$		
$f(x) = x^n$	$f'(x)= n\, x^{n-1}$	$g(x) = (f(x))^n$	$g'(x)= n\, (f(x))^{n-1} f'(x)$
$f(x) = \sqrt{(x)}$	$f'(x)= \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$g(x) = \sqrt{f(x)}$	$g'(x)= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$f(x) = \sqrt[n]{(x)}$	$f'(x)= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	$g'(x)= \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x)= e^x$	$g(x) = e^{f(x)}$	$g'(x)= e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$f(x) = a^x$	$f'(x)= a^x \ln a$	$g(x) = a^{f(x)}$	$g'(x)= a^{f(x)} \cdot \ln a\, f'(x)$
$f(x)= \ln x$	$f'(x)= \frac{1}{x}$	$g(x) = \ln f(x)$	$g'(x)= \frac{1}{f(x)} f'(x)$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x)= \frac{1}{x} \log_a e$	$g(x) = \log_a f(x)$	$g'(x)= \frac{1}{f(x)} \log_a f(x)$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x)= \cos x$	$g(x) = \operatorname{sen} f(x)$	$g'(x)= \cos f(x)\, f'(x)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x)= -\operatorname{sen} x$	$g(x) = \cos f(x)$	$g'(x)= -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x)= 1+\operatorname{tg}^2 x= \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$g(x) = \operatorname{tg} f(x)$	$g'(x)= (1+\operatorname{tg}^2 x) \cdot f'(x)$
$f(x)=\operatorname{arcsen} x$	$f'(x)= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g(x)=\operatorname{arcsen} f(x)$	$g'(x)= \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g(x)=\arccos f(x)$	$g'(x)= \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$f(x)= \operatorname{arctg} x$	$f'(x)= \frac{1}{1+x^2}$	$g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$	$g'(x)= \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

Operaciones con la derivada

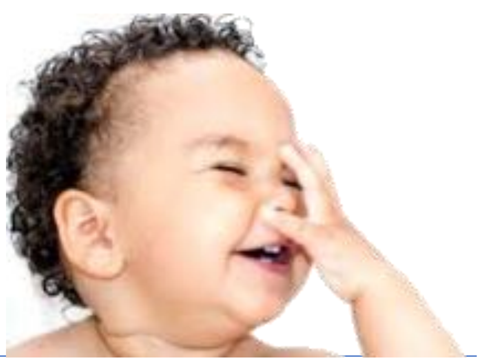
DERIVADA DE LA SUMA:
$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA FUNCIÓN:
$D(k\, f(x)) = k \cdot f'(x)$

PRODUCTO DE FUNCIONES:
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

COCIENTE DE FUNCIONES :
$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

REGLA DE LA CADENA (COMPOSICIÓN DE FUNCIONES):
$D(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$



Vídeo 2. Continuidad

V2.1. Incluye a continuación la definición de continuidad que aparece en el vídeo.

V2.2. Indica los distintos tipos de discontinuidad que aparecen en el vídeo explicando que condiciones que tienen que fallar en la definición para que se den.

V2.3. Estudia la continuidad de las siguientes funciones tal y como se explica en el vídeo.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 4 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq 2 \\ \dfrac{2}{x-2} & si \quad x>2 \end{cases}$$

EJERCICIOS DE CONTINUIDAD

1) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

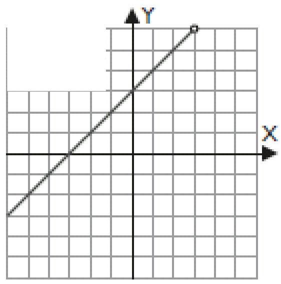
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ \ x<2 \\ 2x & si\ \ x>2 \\ 1 & si\ \ x=2 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2^x-2 & \text{si } x\le 1 \\ L\,x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

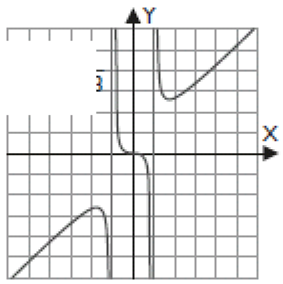
$$f(x)=x^2 \quad si \quad x\le 2$$

2) Indica en qué puntos hay discontinuidades y clasifícalas de las siguientes funciones.

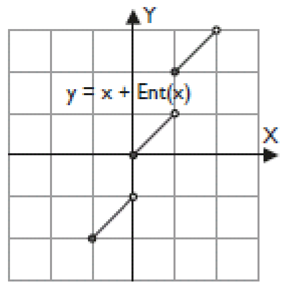
a)



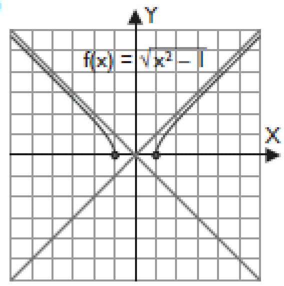
b)



c)



d)



3) Estudia la continuidad de las siguiente funciones. Al no ser una función a trozos, estudia primero el dominio y mira que pasa con la continuidad en los puntos que no están en el dominio.

a) f(x)=$\dfrac{3x^2-x-8}{x-1}$ b) f(x)=$\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

Sol: a) x=1 D.Salto Inf., b) x=0 D.Salto Inf, x=-1 D. 2ª especie

4) Determina los valores de a,b,c y d en las siguientes funciones para que sean continuas:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-1 & si\ x<0 \\ ax+b & si\ 0\le x<1 \\ \frac{2ax+1}{b} & si\ x\ge 1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} cx+d & si\ x<-1 \\ 1-x & si\ -1\le x<1 \\ cx+d & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

Soluciones: a=0 , b=-1 , c=-1 , d=1

5) Calcula, en cada caso, el valor de “k” para que f(x) sea continua en todo R.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x\le 3 \\ x+k & x>3 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 6-x/2 & x<2 \\ x^2-kx & x\ge 2 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-x}{x} & x\ne 0 \\ k & x=0 \end{cases}$

Soluciones: a) k=2 , b) k=-1/2 , c) k=-1

Vídeo 3. Definición Derivada. Cálculo

V3.1. Después de ver el video, comprueba que la derivada de $f(x)=x^2$ en x=a es f'(a)=2a.

V3.2. Completa la siguiente tabla de derivadas con la información del vídeo.

f(x)= K	f'(x)=	f(x) = e^x	f'(x)=	f(x) = cos x	f'(x)=
f(x) = x	f'(x)=	f(x) = a^x	f'(x)=	f(x) = tgx	f'(x)=
f(x) = x^n	f'(x)=	f(x)= lnx	f'(x)=	f(x)=arcsenx	f'(x)=
f(x) = $\sqrt{(x)}$	f'(x)=	f(x) = $\log_a x$	f'(x)=	f(x)=arccosx	f'(x)=
f(x) = $\sqrt[n]{(x)}$	f'(x)=	f(x) = sen x	f'(x)=	f(x)= arctgx	f'(x)=

Vídeo 4. Reglas de derivación

V4.1. Calcula los siguientes ejemplos que aparecen resueltos en el vídeo.

a) Regla del producto.

f(x)= x·sen(x) → f'(x)=

b) Regla del cociente

f(x)= $\frac{x}{sen(x)}$ → f'(x)=

c) Regla de la cadena.

f(x)= $sen(ln(x^2))$ → f'(x)=

Vídeo 5. Condición de derivabilidad.

V5.1. Escribe a continuación un ejemplo de una función que sea continua y no sea derivable.

V5.2. ¿Es posible encontrar una función derivable y que no sea continua?

Derivadas

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2+3x+1$	b) $f(x)=3x^3+5x^2+3x$	c) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$	d) $f(x)=2^x+3^x+e^x$
e) $f(x)=\ln(x)+\log_2(x)$	f) $f(x)=sen(x)+\cos(x)$	g) $f(x)=tg(x)+arcsen(x)$	h) $f(x)=arcos(x)+arctg(x)$
i) $f(x)=5sen(x)+3\ln(x)$	j) $f(x)=x\cdot sen(x)$	k) $f(x)=x^2\cdot\cos(x)$	l) $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$
m) $f(x)=\frac{x^2+x}{x-1}$	n) $f(x)=\frac{x}{e^x}$	ñ) $f(x)=\frac{sen(x)}{\ln(x)}$	o) $f(x)=\frac{arcsen(x)}{\cos(x)}$
p) $f(x)=\sqrt{3x^2+2x}$	q) $f(x)=e^{x^2+1}$	r) $f(x)=\ln(\cos(x))$	s) $f(x)=\ln(sen(\cos(x)))$
t) $f(x)=\sqrt{sen(x^2)}$	u) $f(x)=\sqrt[3]{arctg(x^2)}$	v) $f(x)=3^{\ln(2x+1)}$	w) $f(x)=\frac{tg(2x)}{3^{3x+1}}$
x) $f(x)=\sqrt{\ln(\cos(x^2-3x))}$		y) $f(x)=x^2\cos(3x)-\frac{1}{x}$	

Soluciones del ejercicio 6:

a) $f'(x)=2x+3$	b) $f'(x)=9x^2+10x+3$	c) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$	d) $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3+e^x$
e) $f'(x)=1/x+1/x\cdot\log_2 e$	f) $f'(x)=\cos(x)-sen(x)$	g) $f'(x)=\frac{1}{cos^2(x)}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	h) $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}$
i) $f'(x)=5\cos(x)+3/x$	j) $f'(x)=sen(x)-x\cos(x)$	k) $f'(x)=2x\cos(x)-x^2sen(x)$	l) $f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{ln^2(x)}$
m) $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x+1}$	n) $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$	ñ) $f'(x)=\frac{\cos(x)\ln(x)-\frac{sen(x)}{x}}{ln^2(x)}$	o) $f'(x)=\frac{\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}+arcsen(x)sen(x)}{cos^2(x)}$
p) $f'(x)=\frac{6x+2}{2\sqrt{3x^2+2x}}$	q) $f'(x)=e^{x^2+1}\cdot 2x$	r) $f'(x)=-\frac{sen(x)}{\cos(x)}=-tg(x)$	s) $f'(x)=\frac{1}{sen(\cos(x))}\cdot\cos(\cos(x))(-sen(x))$
t) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{sen(x^2)}}\cdot\cos(x^2)2x$	u) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{arctg(x^2)\hat{}2}}\cdot\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x$	v) $f'(x)=3^{\ln(2x+1)}\ln(3)\cdot\frac{1}{2x+1}\cdot 2$	w) $f'(x)=\frac{\frac{2}{cos^2(2x)}\cdot 3^{3x+1}-tg(2x)\cdot 3^{3x+1}\ln(3)\cdot 3}{(3^{3x+1})^2}$
x) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln(\cos(x^2-3x))}}\cdot\frac{1}{\cos(x^2-3x)}(-sen(x^2-3x))(2x-3)$		y) $f'(x)=2x\cdot\cos(3x)-x^2\cdot sen(3x)\cdot 3+\frac{1}{x^2}$	

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a)f(x)=$e^{2x}+(e^x)^2+e^{x^2}$	b) f(x)= $sen\left(\frac{\pi}{3}\right)-3\ln(\sqrt{2})$	c) f(x)= arsen(cos(x))	d) f(x)=$\frac{x^2+2x+1}{x+1}$
e)f(x)=$sen(\sqrt{\ln(2x+1)^3})$	f)f(x)=-x^2cosx+2xsenx+2cosx	g)f(x)=$\frac{5^x}{ln5}$	h) f(x)=$\frac{sen(x)\cdot\cos(x)}{tg(x)}$
i) f(x)=$(sen(x)+cos(x))^2$	j) f(x)= $(x^2+3x)e^{sen(x)}$	k) f(x)=arcos(x^3)	l) f(x)= arcsen($\sqrt{1-x}$)
m) f(x)=$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	n) f(x)= x^5+5^x	ñ) f(x)= $\frac{3^x\cdot e^x}{1+\ln(3)}$	o) f(x)= $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$
p) f(x)= $sen^2(x)+cos^2(x)$	q) f(x)=$2^{\sqrt{x}}$	r) f(x)= x·ln(x)-x	s) f(x)= $\frac{x^2+2x+3}{x}$
t) f(x)= $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	u) f(x)=$arctg(\sqrt{x})$	v) f(x)=$\ln(e^{x^2+3x})$	w) f(x)=x^x
x) f(x)= x^{2x}		y) f(x)= $\sqrt[x]{x}$	

Soluciones del ejercicio 7:

a)f'(x)=$e^{2x}\cdot 2+2e^xe^x+e^{x^2}\cdot 2x$	b)f´(x)=0	c) f´(x)=-1	d) f´(x)=1
e)f'(x)=$\frac{3\cos(\sqrt{\ln(2x+1)^3})}{(2x+1)\sqrt{\ln(2x+1)^3}}$	f) f´(x)=x^2sen(x)	g) f´(x)= 5^x	h) f´(x)=-2sen(x)cos(x)
i) f'(x)=2cos^2(x)-2sen^2(x)	j)f´(x)=$e^{sen(x)}$[cos(x)·(x^2+3x)+2x+3]	k) f´(x)=$\frac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$	l) f´(x)=$\frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$
m) f´(x)=$\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$	n) f'(x)=$5x^4+5^x\ln(5)$	ñ) f'(x)= $3^x\cdot e^x$	o) f'(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
p) f'(x)= 0	q) f'(x)= $2^{\sqrt{x}}\cdot\ln(2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$	r) f'(x)=ln(x)	s) f'(x)=$\frac{x^2-3}{x^2}$
t) f'(x)=$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	u) f'(x)=$\frac{1}{(1+x)\cdot 2\sqrt{x}}$	v) f'(x)= 2x+3	w) f'(x)=(1+ln(x))·x^x
x) f'(x)= (1+ln(x))·2x^{2x}		y) f'(x)=$\frac{1-\ln(x)}{x^2}\cdot\sqrt[x]{x}$	

Vídeo 6. Interpretación geométrica de la derivada. Cálculo de pendientes de rectas tangentes a una función en un punto.

V6.1. ¿Cuál es la conclusión de la interpretación geométrica de la derivada?.

V6.2. ¿Qué pendiente tendrá la función f(x)=x^2-5x+6 en el punto x=4?.

V6.3. Indica que valor de “a” en f(x)= ax^2+5x+1 hace que la recta tangente a f(x) en x=1 tenga pendiente 6.

Cálculo de la recta tangente

8) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-5x+6$ en el punto de abscisa $x=2$.(Sol: $y=-1(x-2)$)

9) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=-x^2+2x+5$ en el punto de abscisa $x=-1$.(Sol: $y-2=4(x+1)$)

10) Calcula los valores a, b y c de la función $f(x)= ax^2+bx+c$, sabiendo que pasa por el punto (0,5) y tiene un punto de tangente horizontal en (2,-3). (Sol: $c=5$, a y b solución del sistema $4a+2b+5=-3$, $4a+b=0$)

11) Halla el valor de x en el que las tangentes a las curvas $y=-3x^2-2x+5$ e $y=-x^2+6x$ sean paralelas. (Sol: Paralelas→ misma pendiente → $-6x-2=-2x+6$ →$x=-2$)

Vídeo 7. Crecimiento y curvatura de una función

V7.1. Escribe a continuación las condiciones que aparecen al principio del vídeo y que son necesarias para hacer el estudio del crecimiento de una función usando la derivada.

V7.2. Realiza el estudio del crecimiento de la función $f(x)=x^2+4x+1$, tal y como aparece en el vídeo.

V7.3. Realiza el estudio del crecimiento de la función $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x+7$, tal y como aparece en el vídeo.

V7.4. Realiza el estudio de la curvatura de la función $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x+7$, tal y como aparece en el vídeo.

Estudiar el crecimiento de las siguientes funciones determinando los extremos relativos

12. a) $y=x^2-5x+6$ b) $y=x^3-3x$ c) $y=\frac{x+1}{x+5}$ d) $y=x^4-4x^2$ e) $y=4\sqrt{x^2+2x}$

Sol: a) Decrece $(-\infty,2'5)$, Min x=2,5, Crece $(2'5,\infty)$ // b) Crece $(-\infty,-1)$, Max x=-1, Decrece $(-1,1)$, Min x=1, Crece $(1,\infty)$ c) Crece $(-\infty,\infty)$ // d) Decrece $(-\infty,-\sqrt{2})$, Min $x=-\sqrt{2}$, Crece $(-\sqrt{2},0)$, Max x=0, Decrece $(0,\sqrt{2})$, Min $x=\sqrt{2}$, Crece $(\sqrt{2},\infty)$ // e) Dominio $(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$, Decrece en $(-\infty,-2]$ y Crece en $[0,\infty)$, No hay max. y min.

Estudiar la curvatura de las siguientes funciones

13. a) $y=x^4-6x^2$ b) $y=\ln(x+1)$ c) $y=3x^2-2x+1$ d) $y=x^3-3x^2$ e) $y=\sqrt{x}$

Sol: a) Conc.Arriba $(-\infty,-1)$, P.I. x=-1, Conc.Abajo $(-1,1)$, P.I. x=1, Conc.Arriba $(1,\infty)$ // b) Conc. Abajo en $(-1,+\infty)$ (Después del estudio de la curvatura hay que tener en cuenta el dominio) // c) Conc.Arriba $(-\infty,\infty)$
d) Conc.Abajo $(-\infty,1)$, P.I. x=1, Conc.Arriba $(1,\infty)$ // e) Tener en cuenta el dominio. Conc.Abajo $[0,\infty)$

Vídeo 8. Problemas de optimización

V8.1. Incluye la resolución del siguiente problema tal y como aparece en el vídeo:
"Dado un rectángulo de perímetro 12 unidades, ¿cuáles serán sus dimensiones para que tenga área máxima?."

Problemas de optimización

14. Hallar dos números cuya suma es 18, sabiendo que el producto de uno por el cuadrado del otro es máximo. (Sol: $P(x)=x(18-x)^2$ → Los números son 6 y 12.)

15. Tomamos un rectángulo de perímetro 8 unidades, ¿cuáles serán sus dimensiones para que tenga área máxima?. (Sol: $A(x)=x(4-x)$ → Área máximas si es cuadrado de lado 2).

16. Tomamos un rectángulo de área 4 unidades, ¿cuáles serán sus dimensiones para que el perímetro sea mínimo? (Sol: $P(x)=2x+8/x$ → Perímetro mínimo si es un cuadrado de lado 2)

17. Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

18. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material.

19. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000m3 de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que: El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado ¿Qué dimensiones debe tener el depósito? ¿Cuál es el precio de dicho depósito? (2,5 puntos) (Sol.: Mínimo si L = 10 m y H = 10 m; P = 60000 €)

20. Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. (Sol.: Trozo1: 72 m L(base) = 18 m)
Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es π r2.

21. Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad (volumen).
¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal? (Sol: r=$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$, h=$\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$)

22. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.(Sol: x+y=1 , S(x)=$\pi(\frac{x}{2\pi})^2 + (\frac{1-x}{4})^2$, El mínimo se alcanza en x=$\frac{2\pi}{8+2\pi}$)

Vídeo 9. Regla de L´Hopital

V9.1. Enuncia a continuación la Regla de L´Hopital tal y cómo aparece en el vídeo.

V9.2. Calcula $lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$

V9.3. Calcula $lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x-12}{x^2+3x-18}$

Regla de L´Hopital (para cuando sepáis derivar)

23. Calcula estos límites utilizando la Regla de L´Hopital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{\text{tg } x}$ c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x-a}$

Sol: a) 1 , b) 1 , c) cos(a)

24. Halla los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{3\,senx}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\ln x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan g\, x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3-2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)Ln(x-2)$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4x}-\dfrac{2}{xe^x}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + sen\, x)^{1/x}$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3-1)^{1/x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} x^{sen\, x}$

25. Calcula utilizando la regla de L´Hôpital: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(\cos x)}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-}(\tan x \cdot Lnx)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{sen}-\dfrac{1}{x}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^x$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^2 3x}{3x^2}$

26. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-senx}{sen\, x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+x^3)}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{senx}}{1-\cos x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

EJERCICIOS PROPUESTOS DE PAEG

JUNIO 2017

1A. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

Sol: a=-1, b=8

2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

Sol: x=1, Dimensiones: 3x6x1

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$ **(1,25 puntos por límite)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

Sol: a) 3 , b)1

SEPTIEMBRE 2017

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 6x + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

Sol: k=1/e

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

Sol: x=4, h=2

JUNIO 2016

1A. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in \mathbb{R}$, se pide:
a) Determinar el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3. **(1,25 puntos)**
b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. **(1,25 puntos)**

Sol: a) a=0, b) Max. en x=-2 y Min. en x=0. Crece (-inf,-2)u(0,inf) y decrece (-2,0)

SEPTIEMBRE 2016

1A. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de $1000m^3$ de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que:

- El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado
- El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado

¿Qué dimensiones debe tener el depósito?
¿Cuál es el precio de dicho depósito? **(2,5 puntos)**

Sol: x=10, h=10 y coste C(10)=60000€

1B. Dada la función

$$f(x) = 2xe^{1-x}$$

se pide:
a) Estudiar si tiene asíntotas horizontales **(1.25 puntos)**
b) Calcular sus puntos de inflexión. **(1,25 puntos)**

Sol: a) A. Horizontal por la derecha en y=0. No tiene nada más, b) P.Inflexión en (2,4/e)

JUNIO 2015

1A. Dada la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$:
a) Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto (0,2) y que en dicho punto tiene un extremo relativo. **(1,5 puntos)**
b) Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo. **(1 punto)**

1B. Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4} \qquad \textbf{(1,25 puntos por cada función)}$$

2B. Dada la función $f(x) = (x+1)e^{2x}$, se pide:
a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1,25 puntos)**

SEPTIEMBRE 2015

1A. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen} x}}, \qquad \lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen} x}} \qquad \textbf{(1,25 puntos cada límite)}$$

Nota: $\tan x$ denota a la tangente de x.

2A. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(0,5 puntos)**

PAEG – Curso 11/12 - Junio

1A. Dada la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ tiene pendiente -3
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1, 2)$.

(2,5 puntos)

Sol: Se obtienen las ecuaciones -2a+b=-6, 6+2a=0, a+b+c=1 → Resolverlas…

PAEG – Curso 11/12 - Junio

1B. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración? **(1,25 puntos)**
b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito? **(1,25 puntos)**

Sol: a) $N'(t) = \frac{2e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2}$, ver que N(t) es creciente en $[0,+\infty)$ y su mínimo es t=0 con 20% concentración
b) Calcular límite en el infinito de N(t)

PAEG – Curso 11/12 - Septiembre

1B. Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{2x+6},$$

calcula los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 0$. **(2,5 puntos)**

PAEG – Curso 10/11 - Junio

1A. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblícuas de $f(x)$. (1,25 puntos)

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x)$. (1,25 puntos)

PAEG – Curso 09/10 - Junio

1B. La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2+2t)e^{-t}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0,3]$ se alcanza la velocidad máxima? (1,25 puntos)

b) Calcula $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido. (1,25 puntos)

PAEG – Curso 09/10 - Septiembre

1A. a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+\operatorname{sen} x}{2x-x^2} & \text{si } x<0 \\ bx+c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$

para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$, y además sea continua y derivable en $x = 1$. (2 puntos)

2A. a) Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$. (1 punto)

UNIDAD 7. ESTUDIO GLOBAL DE FUNCIONES

Saberes que se van a evaluar en esta unidad
Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características.

Representación de Funciones

1. Dominio – Dom(f)	- Polinomios , Dom(f)=R - Cocientes de funciones, Dom(f)=R-{puntos donde se hace cero el denominador} - Funciones Radicales, Dom(f)={Puntos donde la parte radical sea >=0, excluyendo donde sea cero el denominador (si hay)} - Otras funciones elementales: Exponencial (a^x), Logaritmos ($\log_a(x)$), Trigonométricas, Valor absoluto, parte entera, …
2. Puntos de Corte	x=0 → y=… (Corte con el eje OY) y=0 → x=… (Corte con el eje OX)
3. Simetrías	f(x)=f(-x) → Función PAR (Simétrica respecto al eje OY) f(x)=-f(-x) → Función IMPAR (Simétrica respecto al origen de coordenadas)
4. Continuidad	Estudiar los tipos de discontinuidades en los puntos que no están en el dominio o en el caso de funciones a trozos en donde se pase de una función a otra.
5. Asíntotas	Asíntotas Verticales. $\lim_{x\to a} f(x)=\frac{k}{0}$ Hay que estudiar los límites laterales para ver si salen + ó – infinito. Izq→ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$; Dcha→ $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$
	Asíntotas Horizontales. $\lim_{x\to\infty} f(x)=c\neq\infty$
	Asíntotas Oblicuas (m= $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y n= $\lim_{x\to\infty} f(x)-mx$)
6. Crecimiento. Extremos relativos	- Hay que calcular f´(x)=0 y despejar x. De esta manera obtenemos los candidatos a máximos y mínimos relativos. - Después estudiamos la inecuación f´(x)>0 para saber el crecimiento representando una tabla de signos.
7. Curvatura. Puntos de Inflexión	- Hay que calcular f´´(x)=0 y despejar x. De esta manera obtenemos los candidatos a Puntos de Inflexión. - Después estudiamos la inecuación f´´(x)>0 para saber la curvatura representando una tabla de signos.
8. Tabla de valores y representación.	Completamos nuestra información con una tabla de valores y procedemos a representar nuestra función.

1. Realiza el estudio global de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

b) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

2. Realiza el estudio global de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ e) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ f) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

UNIDAD 8. GEOMETRÍA ANALÍTICA

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
A1. Sentido de las operaciones.	− Adición y producto escalar de vectores: propiedades y representaciones. − Estrategias para operar con vectores.
A2. Relaciones	− Conjunto de vectores: estructura, comprensión y propiedades.
C1. Formas geométricas de 2 dimensiones.	− Objetos geométricos de dos dimensiones propiedades y atributos. − Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el plano.
C2. Localización y sistemas de representación	− Relaciones de objetos geométricos en el plano. − Expresiones algebraicas de objetos geométricos.
C3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.	− Representación de objetos geométricos mediante herramientas digitales. − Modelos matemáticos en la resolución de problemas en el plano. − Conjeturas geométricas en el plano: deducciones y la demostraciones. − Modelización de posición y el movimiento de objetos mediante vectores.

Resumen del tema:

1. Vectores.

- Un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado determinado por dos puntos A y B. A se denomina **origen** y B **extremo**.

- Las coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las del origen.

$$\overrightarrow{AB} = B-A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

- Un vector queda determinado por su módulo, dirección y sentido.

Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ → Su módulo $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

- Algunos conceptos: vector iguales, vectores libres, vector fijo, vectores opuestos, vector unitario (módulo 1, $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$)

2. Operaciones con vectores.

- Suma/Resta de vectores // Producto vector y nº
- Si “a” y “b” son números y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores, $a\vec{u}+b\vec{v}$ es una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son Linealmente Dependientes si existe $a\vec{u}+b\vec{v}=0$ con $a\neq 0$ ó $b\neq 0$. En el plano, los vectores L.Dependientes son vectores paralelos.
- $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son Linealmente Independientes si cualquier C.Lineal = 0 → sus coeficientes =0
- Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ L.Indep. forman una base. Un punto y una base forman un Sist.Referencia.

3. Producto escalar de 2 vectores.

- Producto Escalar → $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}})$
- Expresión analítica del producto escalar

$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ → $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

- Vectores ortogonales o perpendiculares $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- Vectores ortonormales = ortogonales + unitarios
- ¿Cómo construir un vector ortogonal?

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ entonces $(-u_2, u_1)$ es ortogonal.

- ¿Cómo calcular el ángulo de 2 vectores?

Despejar $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ de la fórmula del producto escalar.

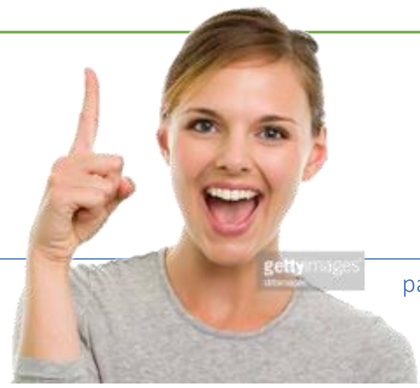
4. Conceptos de paralelismo y perpendicularidad.

- $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos → Proporcionales → $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ entonces $k\cdot(u_2, u_1)$ es paralelo.

- $\vec{u}$ y $\vec{v}$ perpendiculares → $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ → $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ entonces $(-u_2, u_1)$ es perpendicular.



5. Algunos cálculos:

- Punto Medio de un segmento $\overline{AB}$ → M=(A+B)/2
- Comprobar si 3 puntos A, B y C están alineados → $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser paralelos.
- Calcular el simétrico de A respecto a M. Poner A´=(x,y) y calcular $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA'}$.
- Coordinadas del Baricentro de un triángulo de vértices A, B y C → G=$\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

6. Ecuaciones de la recta en el plano. Dado un punto A(a_1,a_2) y un vector $\vec{v}$(v_1,v_2)

- Ec. Vectorial → $(x,y) = (a_1,a_2) + t\cdot(v_1,v_2)$
- Ec. Paramétrica → $\begin{cases} x = a_1 + t\cdot v_1 \\ y = a_2 + t\cdot v_2 \end{cases}$
- Ec. Continua → $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}$
- Ec. Punto-pendiente → $y-a_2=m\cdot(x-a_1)$, con $m=\frac{v_2}{v_1}$
- Ec. Explícita → y=mx+n
- Ec. General o implícita → Ax+By+C=0

<u>Observaciones importantes:</u>

- Si nos dan 2 puntos C y D, cogemos uno de ellos y el vector $\overrightarrow{CD}$.
- $m=\frac{v_2}{v_1}$; $\vec{v}=(1,m)$;
- En la Ec. General o implícita, (A,B) es un vector perpendicular a $\vec{v}$

<u>Paralelismo y perpendicularidad de rectas</u>

Rectas r y s de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelas → $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$; $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$ $\begin{cases} r: A_1x+A_2y+A_3=0 \\ s: B_1x+B_2y+B_3=0 \end{cases}$; $m_r = m_s$

Rectas r y s de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares → $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; $\vec{u}(-A_2,A_1)$, $\vec{v}(A_1,A_2)$; $m_s=-\frac{1}{m_r}$

7. Posición relativa de rectas.

Posiciones	Vectores directores	Pendientes	Ecuación general
Paralelas	$\frac{u_2}{u_1}=\frac{v_2}{v_1}$	$m=m'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$
Coincidentes	$\frac{u_2}{u_1}=\frac{v_2}{v_1}$	$m=m'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$
Secantes	$\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{v_2}{v_1}$	$m\neq m'$	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$

Ángulo de 2 rectas

El ángulo que forman los 2 vectores de las rectas.

$$\cos(\widehat{uv})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

8. Distancia entre: a) Dos puntos, d(P,Q)=$|\overrightarrow{PQ}|$ b) P(x_0,y_0) y recta r:Ax+By+C=0 → d(P,r)=$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

c) Dos rectas. Distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra recta.

Ejercicios Tema 8. Vectores y rectas en el plano

Producto escalar para normalizar vectores, ortogonalidad o la proyección de un vector Expresión analítica del producto escalar, módulo y coseno del ángulo que forman

TEORÍA. Coordenadas de un vector. Concepto de vector.

TEORÍA. Clases de vectores.

TEORÍA. Operaciones con vectores (suma, resta y producto por un escalar).

TEORÍA. Combinación lineal de dos vectores.

TEORÍA. Vectores L. Dependientes y L. Independientes. Base.

1. Dados los vectores $\vec{u}$=(2,1), $\vec{v}$ =(1,4) y $\vec{w}$=(5,6) . Determinar:

   a) Si $\vec{u}$ y $\vec{w}$ forma una base. b) Expresa $\vec{w}$ como combinación líneal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

2. Si un vector $\vec{w}$ tiene coordenadas (3,5) en la base canónica. ¿Qué coordenadas tendrá en la base $\vec{u}$=(1,2) y $\vec{v}$ =(2,1)?

TEORÍA. Sistema de referencia.

TEORÍA. Definición de producto escalar de dos vectores.

TEORÍA. Expresión analítica del producto escalar.

TEORÍA. Coordenadas de un vector. Concepto de vector.

TEORÍA. Vectores ortogonales o perpendiculares. Vectores normales. ¿Cómo comprobar si dos vectores son ortogonales?. Calcular un vector ortogonal a otro.

TEORÍA. Ángulo que forman dos vectores.

3. Dado el vector $\vec{v}$ =(9,12). Calcula las coordenadas de:
   a) Un vector $\vec{u}$ unitario y de la misma dirección que $\vec{v}$.
   b) Un vector $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{v}$ y con el mismo módulo.
   c) Un vector $\vec{x}$ de módulo 5 y ortogonal a $\vec{v}$.
4. Dados $\vec{u}(3, n)$ y $\vec{v}(-2, m)$, calcula el valor de n y m para que se cumpla:
   a) $|\vec{u}| = 5$ b) $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$ y $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ c) $\vec{u}$ forme 45º con el vector $\vec{w}(1,1)$

5. ¿Cuáles de los siguientes vectores forman una base?

   a) $\vec{u}(3,-1)$ y $\vec{v}(1,3)$ b) $\vec{u}(2,6)$ y $\vec{v}(2/3,2)$

6. Inventa un vector paralelo y otro perpendicular a:

   a) $\vec{u}(3,-1)$ b) $\vec{u}(-2,0)$ c) $\vec{u}(-4,-4)$

7. Calcula "k" para que estos vectores sean ortogonales:

   a) $\vec{u}(6,k)$ y $\vec{v}(-1,3)$ b) $\vec{u}(5,-1)$ y $\vec{v}(k,2)$

8. Halla "m" para que el vector $\vec{u}(3,k)$ sea unitario.

9. Dado el vector $\vec{u}(-5,k)$, calcula "k" de modo que:

   a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4,-2)$.

   b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$

10. Halla un vector de módulo 50 perpendicular $\vec{u}(8,6)$.

11. Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(3,2)$ y $\vec{v}(1,-5)$

TEORÍA. Algunos cálculos: punto medio de un segmento, comprobar si 3 puntos están alineados, simétrico un punto respecto a otro, …

Obtiene las ecuaciones de una recta, identificando elementos característicos.
Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas.
Calcula distancias entre puntos, de un punto a una recta y entre dos rectas.

TEORÍA. Ecuaciones de la recta.

12. Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(2,1) y B(-3,6).
13. Obtener la ecuación implícita de la recta a partir de la Ec. Paramétricas $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$
14. Obtener la Ec. Paramétricas de la recta a partir de la recta y=2x+1.
15. Obtener las ecuaciones Paramétricas e Implícita de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{0}$

16. Halla las ecuaciones Paramétricas, Continua, Explícita e Implícita que pasa por:

    a) A(-2,-2), B(4,4) b) A(3,0) y B(0,4)

17. Dada la recta r: 3x-4y+5=0.

a) Obtén 2 puntos P y Q de la recta. // b) Comprueba si el vector PQ es perpendicular a (3,-4)

c) Escribe en forma paramétrica. // d) Escribe ecuación explícita y comprueba que (1,m) es paralelo a PQ.

TEORÍA. Paralelismo y perpendicularidad de rectas.

18. Dada la recta r: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. a) Halla una recta paralela que pase por P(3,5) , b) Halla una recta perpendicular pase por P(3,5).

19. Dada la recta r: 2x-4y+5=0. a) Halla una recta en forma paramétrica perpendicular a r y que pasa por P(-1,2), b) Halla una recta en forma explícita que sea paralela a r y que pase por P(0,0).

20. Dada la recta $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{2}$. Indica cuál de estas rectas es paralela a ella:

    a) 2x+5y-4=0 b) 2x-5y+1=0 c)5x+2y=0 d) y=-5/2x+1 e) y=2/5x-3

21. Dada la recta x-2y+4=0, indica cuál de estas rectas es perpendicular a ella:

a) y=2x+1 b) y= - 2x+3 c) y=x/2d) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$

22. Dada $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$.

    a) Halla una recta en forma Continua que sea perpendicular a r y que pase por P(2,3).

    b) Halla una recta en forma implícita que sea paralela a r y pase por P(0,3).

    c) Halla una recta en forma explícita que sea perpendicular a r y pase por P(-4,0).

TEORÍA. Ángulo entre dos rectas

Ejemplo:

TEORÍA. Distancias (Punto-Punto, Punto-Recta, Recta-Recta)

23. Calcula el ángulo que forman: a) $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ y 3: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$,

    b) r: 2x+3y-10=0 , s: 3x-4y+4=0 , c) r: y=4x-1 y s:y=-2x+3

24. Calcula "k" de modo que la distancia entre los puntos A(3,k) y B(4,-3) sea 2.

25. Halla la distancia de O(0,0) y P(-2,3) a las rectas: a) 3x-4y+5=0 , b) 3x-4=0 , c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

26. Halla la distancia entre: a) r: y=-2/3x+1 , s: $\frac{1-x}{3} = \frac{y+1}{2}$, b) r: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$, s: 2x+y-5=0

UNIDAD 9. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Saberes que se van a evaluar en esta unidad	
B1. Medición	− La probabilidad como medida de la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios.
E2. Incertidumbre	− Estimación de la probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa. − Cálculo de probabilidades: regla de Laplace y técnicas de recuento.
E1. Organización y análisis de datos	− Organización de datos procedentes de v.bidimensionales: distribución conjunta y distribuciones marginales y condicionadas. Análisis de la dependencia estadística. − Estudio de la relación entre dos variables (regresión lineal y cuadrática: valoración grafica de la pertinencia del ajuste). Diferencia entre correlación y causalidad. − Coeficientes de correlación lineal y de determinación. − Calculadora, hoja de cálculo o software específico en el análisis de datos.
E3. Inferencia	− Análisis de muestras unidimensionales y bidimensionales con h.tecnológicas.

Resumen estadística unidimensional:

1. Población, muestra e individuo.

- Población: Conjunto de todos los elementos que se estudian.
- Muestra: Subconjunto de la población elegido para realizar el estudio estadístico.
- Individuo: Cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

¿Cuándo coger muestra en vez de población?
En poblaciones muy numerosas, poblaciones difíciles de controlar (Ej: personas de un aeropuerto) y cuando el proceso es muy caro.

¿Cómo seleccionar una muestra?
Se debe escoger la muestra aleatoriamente (al azar) de forma que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos.

Tipos de muestras aleatorias:
- Muestra aleatoria simple: se van sacando individuos al azar.
- Muestra aleatoria sistemática: Se ordena la muestra, se saca un individuo al azar y el resto se van sacando mediante saltos iguales.
- Muestra aleatoria estratificada: se divide la muestra en grupos homogéneos llamados estratos (Ej: estratos por edad) y se saca una muestra aleatoria simple de cada estrato.

Una muestra con el tamaño adecuado y además aleatoria se dice que es representativa

2. Variables estadísticas. Tipos.

Una variable es una característica que se quiere estudiar. Las clasificamos en 3 tipos:
- Cualitativas: no toman valores numéricos (Ej: color de ojos)
- Cuantitativas discretas: toman valores numéricos aislados (Ej: Número de hijos)
- Cuantitativas continuas: toman valores numéricos en un intervalo (Ej: Altura)

3. Fases de un estudio estadístico. Hay 6 fases:
1. Saber qué queremos estudiar.
2. Selección de las variables a estudiar.
3. Recogida de los datos.
4. Organización de los datos en tablas.
5. Representación y tratamiento de los datos.
6. Interpretación y análisis.

4. Tabla de frecuencias absolutas y relativas

Los datos recogidos de cada variable se recuentan y se representan en tablas de frecuencias.
- Frecuencia absoluta nº de veces de cada dato
- Frecuencia relativa es división entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra.

Ejemplo: Nº TV en cada casa

Muestra: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3

Variable(X)	Frec.Absoluta(f_i)	Frec.Relativa(h_i)
1	2	2/10
2	5	5/10
3	3	3/10

5. Medidas centrales. Nos indican un valor central en torno al que se distribuyen los datos

Media aritmética:La media o promedio es la suma de los datos divida entre el nº de datos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Cálculo de la media en tabla de frecuencias:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
x_1	f_1	
x_2	f_2	
…	…	
x_n	f_n	

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{n}$$

Mediana: Es el valor que deja el 50% de los datos por debajo de él.

Cuartiles:Q_1, Q_2, Q_3 son los valores que dejan el 25%, 50% y 75% respectivamente por debajo de él.

Moda: Es el dato que más se repite.

6. Medidas de dispersión. Nos indican la separación de los datos en torno a la media.

Rango o Recorrido: Diferencia entre el dato mayor y el dato menor.

Varianza: Es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$var(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Se puede calcular de forma más corta:

$$var(x) = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}{n} - \bar{x}^2$$

Cálculo de varianza en tabla de frecuencias:

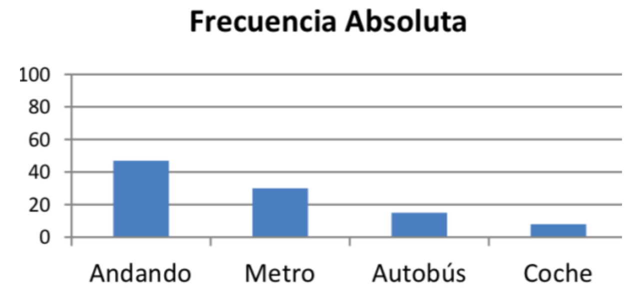
x_i	f_i	$x_i^2 \cdot f_i$
x_1	f_1	
x_2	f_2	
…	…	
x_n	f_n	

Var(x)=
$$\frac{{x_1}^2 \cdot f_1 + {x_2}^2 \cdot f_2 + \ldots + {x_n}^2 \cdot f_n}{n} - \bar{x}^2$$

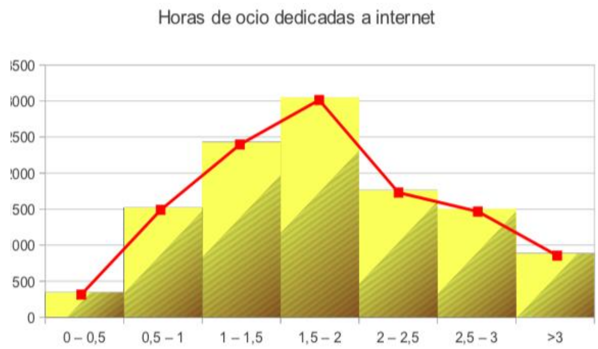
Desviación típica: Raiz cuadrada de la varianza. $\sigma = \sqrt{var(x)}$

7. Gráficos estadísticos.
Vamos a estudiar 3 tipos de representaciones de tablas de frecuencias:

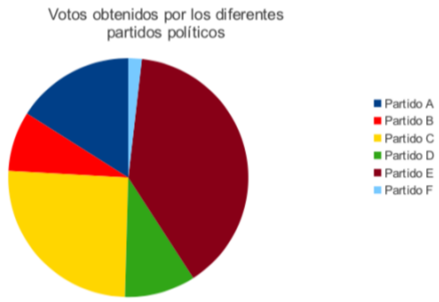
1. Diagrama de rectángulos.
Para variables cualitativas o cuantitativas discretas se llama Diagrama de Barras. Para cuantitativas continuas se llama Histograma.
En el eje horizontal se representan los valores de la variable y el eje vertical las frecuencias.
Ejemplo: Diagrama de barras de una muestra sobre formas de transporte de estudiantes



2. Polígono de frecuencias (diagrama de líneas).
Se utiliza para variables cuantitativas discretas y continuas con el fin averiguar la tendencia. Se construye uniendo lo puntos medios de las barras de diagramas de barras o histogramas.



3. Diagrama de sectores
Se representan sectores circulares cuyo ángulo es proporcional a la frecuencia absoluta.



Resumen estadística bidimensional:

1. Tablas de contingencia.

Hay muchas veces en la vida en las que es necesario un estudio simultaneo conjunto de 2 variables. En estos casos se representan mediante una tabla de doble entrada que se denomina tabla de contingencia. Se pueden representar en ella frecuencias absolutas y frecuencias relativas.

x_i/y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	…	n_i
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	…		
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	…		
x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	…		
x_4	…	…	…	…		
…						
n_j						

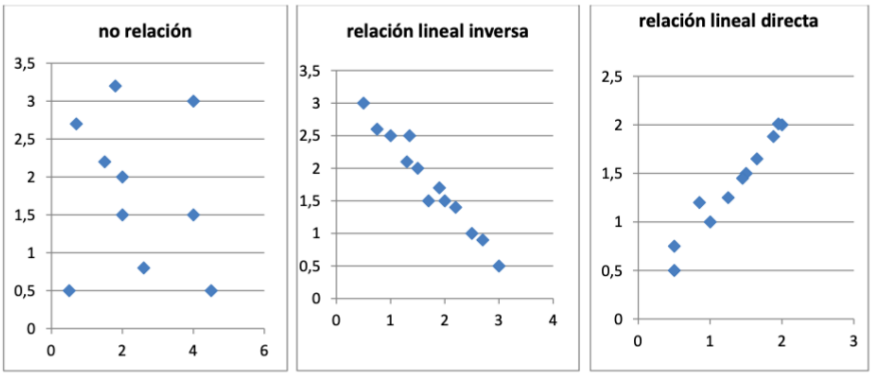
A partir de ella se pueden obtener:

- Distribuciones marginales de X y de Y. Son las tablas de cada variable por separado y permiten estudiar sobre ellas parámetros estadísticos como la media aritmética y la varianza.
- Distribuciones condicionadas. Son tablas de frecuencias de una variable pero condicionadas a un valor concreto de la otra variable.

Diremos que dos variables X e Y son independientes cuando su frecuencia relativa conjunta es igual al producto de las frecuencia marginales ($f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} = \frac{n_i}{n} \cdot \frac{n_j}{n} = f_i \cdot f_j$) . También se dice que son independientes cuando todas sus frecuencias relativas condicionadas son igual a sus marginales ($f_{i(j)} = f_i$ para todo j y $f_{j(i)} = f_j$ para todo i)

2. Correlación y recta de regresión

Supongamos que tenemos una distribución bidimensional al estudiar dos variables X e Y de una misma población. Si tenemos una muestra bidimensional (x_1,y_1) , (x_2,y_2), … , (x_n,y_n) podemos esos pares de valores como las coordenadas de puntos y representarlos en el plano cartesiano. A esta representación se le denomina nube de puntos o diagrama de dispersión.



La correlación nos va a permitir medir si hay relación entre la 2 variables estudiadas. Diremos que hay más relación entre ellas cuando la nube de puntos se aproxime más a una recta (que llamaremos recta de regresión). Dependiendo de la pendiente de esa recta diremos que ha relación directa o inversa.

Coeficiente de Correlación $r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

$$\begin{cases} Covarianza \quad \sigma_{XY} = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{X}\bar{Y} \,,\ \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} \,,\ \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} \\ Desv.Típica\ de\ X \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{X}} \\ Desv.Típica\ de\ Y \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{Y}} \end{cases}$$

Recta de regresión de Y sobre X (predecir la Y) → $y - \bar{Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \cdot (x - \bar{X})$

Recta de regresión de X sobre Y (predecir la X) → $x - \bar{X} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} \cdot (y - \bar{Y})$

Probabilidad.

1. Experimento aleatorio. Espacio muestral. Sucesos.

EXPERIMENTO ALEATORIO Un fenómeno o experiencia se dice aleatorio cuando al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado. Si por el contrario, se puede predecir el resultado de una experiencia antes de realizarla, se dice que el experimento es determinista.

ESPACIO MUESTRAL es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y se representa por Ω o E.

SUCESO ALEATORIO Es un suceso que ocurrirá o no dependiendo del azar.

SUCESO ELEMENTAL Cada elemento del espacio muestral E se llama suceso elemental.

El conjunto formado por todos los sucesos del espacio muestral se llama ESPACIO DE SUCESOS S. Es decir, el espacio de sucesos está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral.

Si la experiencia aleatoria: lanzar una moneda $E = \{c, x\}$, el espacio de sucesos $S = \{\emptyset, \{c\}, \{x\}, \{c, x\}\}$

2. Tipos de sucesos

Suceso elemental formado por un solo elemento $A = \{3\}$

Suceso compuesto: formado por dos o más elementos $B = \{3, 5\}$

Suceso imposible es aquel que nunca se realiza, se representa por $\emptyset$.

Suceso seguro es el que se realiza siempre, Ω o E.

Suceso contrario o complementario de A y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza A. Sea $E = \{3, 4, 7, 8\}$ siendo $A=\{3\}$, el suceso contrario a A sería $\bar{A} = \{4, 7, 8\}$.

E

3. Operaciones con sucesos

Suceso unión de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando lo hacen A ó B (o ambos). Se representa por A U B

Suceso intersección de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza a la vez el suceso A y el suceso B. Se representa por A ∩ B.

Diferencia de sucesos: A – B (se lee A menos B) es el suceso formado por los todos los casos de A que no son de B. $A - B = (A \cap \bar{B})$

Sucesos incompatibles: dos sucesos, A y B, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún caso común. Es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$. Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

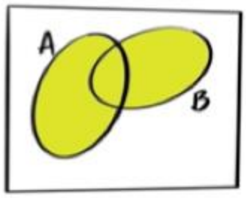
Sucesos compatibles: dos sucesos A y B son compatibles si pueden obtenerse simultáneamente. Es decir
$A \cap B \neq \emptyset$.

Algunas propiedades importantes

- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$
- Leyes de Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

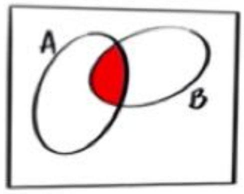
Continuación (Operaciones con sucesos)

UNIÓN DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama unión de A y B y se representa por $A \cup B$, al suceso formado por todos los elementos de A y/o de B.



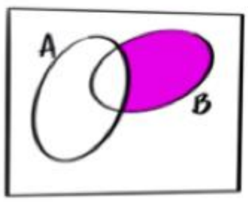
$A \cup B$

INTERSECCIÓN DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama suceso intersección de A y B y se representa por $A \cap B$, al suceso que está formado por todos los elementos de A y de B simultáneamente.

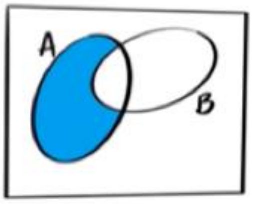


$A \cap B$

DIFERENCIA DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama suceso diferencia de A y B y se representa por $A \setminus B$ o $A-B$, al suceso $A \cap \overline{B}$. O sea, $A \setminus B$ está formado por todos los elementos de A que no están en B.

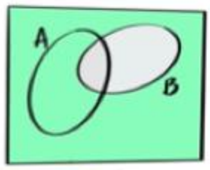


$B-A=B \setminus A$



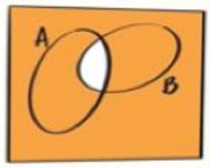
$A-B=A \setminus B$

COMPLEMENTARIO Dado el suceso A se llama suceso complementario de A, $\overline{A}$, al suceso formado por los elementos de E que no están en A.

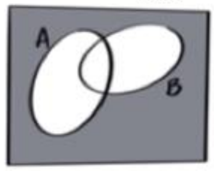


$\overline{B}$

$\overline{A \cap B}$



$\overline{A \cup B}$



SUCESOS INCOMPATIBLES Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman sucesos incompatibles. Un suceso y su contrario son siempre incompatibles.

$A \cap B = \emptyset$.

4. Frecuencia Absoluta y relativa de un suceso A

Se llama **FRECUENCIA ABSOLUTA** f_a de un suceso A al número de veces que se verifica A al realizar el experimento un número determinado de veces.

Se llama **FRECUENCIA RELATIVA** f_r de un suceso A al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento: $f_r = \frac{f_a}{n}$, siendo n el número de veces que se repite el experimento.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse hacia un número, a medida que el número de pruebas del experimento aleatorio crece indefinidamente: $\lim f_r(S) = P(S)$. A este número lo llamamos PROBABILIDAD DEL SUCESO S.

Propiedades

- $0 \le f_r(A) \le 1$
- $f_r(E) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

5. Definición axiomática de probabilidad

Se puede definir la probabilidad como una función P que a cada suceso A le asigna un número real P(A) que cumple 3 axiomas:

Axioma 1: La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral es 1. $P(E) = 1$

Axioma 2: Cualquiera que sea el suceso A, su probabilidad es un número no negativo. $P(A) \geq 0$

Axioma 3: Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PROPIEDADES

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si A y B son dos sucesos tales que $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

6. Regla de Laplace

LEY DE LAPLACE

Si los resultados de una experiencia aleatoria son casos equiprobables, la probabilidad de un suceso A es $P(A) = \dfrac{\text{nº casos favorables a } A}{\text{nº casos posibles}}$

7. Diagrama de árbol

Es una forma de organizar el planteamiento de un problema de probabilidad de manera que el experimento se va ramificando a medida que se van sucediendo las pruebas (lanzamientos, extracciones, tiradas, …).

Sobre cada rama se va anotando la probabilidad de que el suceso correspondiente se produzca. Finalmente, la probabilidad de llegar a un determinado resultado es el producto de todas las probabilidades de las ramas que llevan a ese resultado.

8. Probabilidad condicionada

Se llama PROBABILIDAD CONDICIONADA DEL SUCESO A RESPECTO DEL SUCESO B a la probabilidad de A sabiendo que ocurrió B, la denotaremos por $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ siempre que } P(B) \neq 0$$

De lo anterior se deducen claramente las relaciones siguientes

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Si fuesen tres sucesos $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$

Dos sucesos A y B se dicen INDEPENDIENTES si $P(B) = P(B|A)$

Tambien se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

9. Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia nos servirán de apoyo en la aplicación de la probabilidad condicionada. Estas tablas, de fácil manejo, nos permiten calcular una probabilidad condicionada fácilmente.

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º B	60	65	125
2º B	50	55	105
Total	110	120	230

10. Teorema de la probabilidad total

Tenemos n sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Entonces,

$P(S) = P(A1 \cap S) + P(A2 \cap S) + \ldots + P(An \cap S) =$
$P(A1).P(S/A1) + P(A2).P(S/A2) + \ldots\ldots + (An).P(S/An)$

11. Teorema de Bayes (Prob. A "posteriori")

Tenemos n sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Entonces,

$$P[A_i / S] = \frac{P(A_i) \cdot P(S/A_i)}{P(A_1) \cdot P(S/A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)}$$

12. Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio. Si los resultados son finitos o infinitos numerables , la variable aleatoria se denomina discreta. Si los resultados son infinitos, la variable aleatoria es continua.

13. Variable aleatoria discreta

Función de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores x1, x2,..., xn ,se llama función de probabilidad o función de masa, a aquella función que hace corresponder a cada valor de la variable con su probabilidad. $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$

Ejemplo

X = resultado de lanzar un dado. La función de probabilidad es:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Propiedades de la función de probabilidad

a) $p_i \geq 0$ b) $\sum p_i = 1$

Esperanza y varianza de la v.a

Esperanza $\mu = E[X] = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

Varianza $\sigma^2 = \sum_{I=1}^{i=n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$

Ejemplo

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
$x_i p_i$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	21/6
$x_i^2 p_i$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	91/6

$E(X) = 21/6$

$Var(X) = 91/6 - (21/6)^2 = 105/36 = 2{,}92$

Función de distribución

Es la función acumulada $F(x)=P(X \leq x)$

Ejemplo

X=lanzar un dado

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
F(x)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

14. Modelos probabilísticos discretos.

14.1 Modelo Bernoulli. Experimento aleatorio con 2 posibles resultados: éxito (1) o fracaso (0). X variable aleatoria con 2 valores, 0 fracaso y 1 éxito para un suceso A.

$P(x=0)=1-p=q$, $P(x=1)=p$

$X \sim Bern(p)$

x	0	1
Probab.	1-p=q	p

$E(X) = p$

$Var(X) = p - p^2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

14.2 Modelo Binomial. Consiste en repetir n veces un experimento Bernoulli de parámetro p en las mismas condiciones de independencia. La variable X = nº veces que ocurre con éxito el suceso A será una binomial de parámetros n y p. X≅B(n,p). X={0,1,2,3,…}

$$X \sim Bin(n,p)$$

$$P(X=a)=\binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a} \quad \text{donde } \binom{n}{a}=\frac{n!}{a!\,(n-a)!}$$

$$E(X)=np$$
$$Var(X)=np(1-p)=np\cdot q$$

Ejemplo

El 20% de un determinado pueblo ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Definimos X=nº de personas que estan viendo el programa ~ Bin(10, 0.20) donde p=0,2 es la probabilidad de éxito (ver concurso de tv). Rec(X)={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

a Calcula la probabilidad de que ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X=8)=\binom{10}{8}\cdot 0{,}2^8\cdot(1-0{,}2)^2 = \underline{0{,}000074}$$

b Calcula la probabilidad de que más de ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>8)=P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}2^9(1-0{,}2)^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}(1-0{,}2)^0 = 0{,}000004+0{,}0000001$$
$$=\underline{0{,}0000041}$$

c Calcula la probabilidad de que algunas de las diez personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>0)=1-P(X\leq 0)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}2^0(1-0{,}2)^{10}=1-0{,}11=\underline{0{,}89}$$

c Calcular la media y la varianza $E(X)=10\cdot 0{,}20=\underline{2}$ $Var(X)=10\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=\underline{1{,}6}$

15. Variable aleatoria continua.

Una **variable aleatoria** es continua cuando puede tomar un número infinito de valores en la recta real.La distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua se llama **distribución de probabilidad continua.** En una distribución continua la probabilidad de un valor concreto es cero. En este caso, las probabilidades que calculamos están siemprea asociadas a intervalos: P(a ≤ X ≤ b)

Función de distribución → Es la función acumulada F(x)=P(X≤x)

Función de probabilidad o función de densidad → f(x)=F´(x) → F(x)=$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Propiedades

a) f(x) ≥ 0 b) $P(a \leq\leq x \leq b)$= F(b)-F(a) c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ d) P(X=a)=0

Esperanza y varianza de la v.a

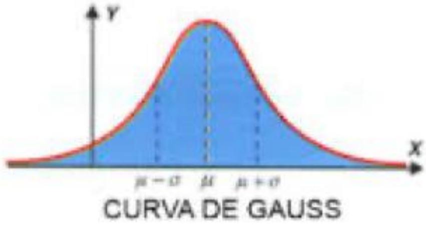
Esperanza μ **= E [X]** =$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ // **Varianza** σ^2 = $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$

16. Modelos probabilísticos continuos: Normal.

Diremos que una distribución de probabilidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, y lo representaremos por N(μ; σ) cuando la representación gráfica de su función de densidad es una curva positiva continua, simétrica respecto a la media, de máximo en la media, y que tiene 2 puntos de inflexión, situados a ambos lados de la media (μ − σ y μ + σ respectivamente).

Definición. Una variable aleatoria continua, con media μ y con desviación típica σ, es una variable normal si su función de densidad,

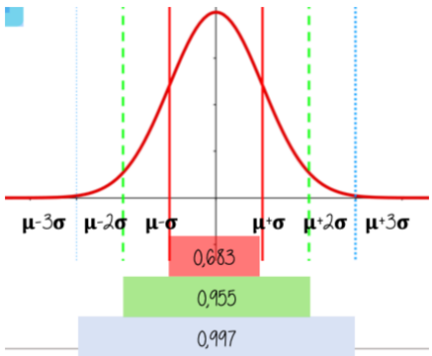
f : R → R, es : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



Propiedad. P(a ≤ X ≤ b) = P(a < X < b) = $\int_a^b f(x)dx$

Regla 68-95-99

$$\text{Si } X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow \begin{cases} P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0{,}683 \\ P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0{,}955 \\ P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0{,}997 \end{cases}$$



Normal tipificada N(0,1)

$$\text{Si } X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

EJERCICIOS DE ESTADÍSTICA

1. Para hacer un estudio sobre las preferencias sobre 2 modelos de impresoras 3D de reciente fabricación, se consideraron las ventas de un distribuidor durante 25 días.

Ventas Modelo Impresora A (X): 0 2 2 2 1 3 3 3 3 4 4 2 3 3 3 3 2 3 2 4 2 2 3 3 3
Ventas Modelo Impresora B (Y): 2 1 2 2 3 1 1 1 2 0 1 1 1 1 1 2 2 1 1 1 2 2 2 2 1

a) Completa la siguiente tabla de contingencia de frecuencias absolutas y las correspondientes distribuciones marginales de la X y de la Y.

x_i/y_i	0	1	2	3	4	n_i
0						
1						
2						
3						
4						
n_i						

x_i	n_i

y_i	n_i

b) Calcula la media y la varianza de las distribuciones marginales del apartado a).

c) Completa la siguiente tabla de contingencia de frecuencias relativas y las correspondientes distribuciones marginales de la X y de la Y. Mirando esas tablas, ¿podrías decir si las variables X e Y son independientes?.

x_i/y_i	0	1	2	3	4	n_i
0						
1						
2						
3						
4						
n_i						

x_i	n_i

y_i	n_i

d) Escribe la tabla de frecuencias de la X condicionada a que la Y=3 ó 4 y escribe la tabla de frecuencias de la Y condicionada a que la X=1.

e) Mirando las tablas de frecuencias relativas del apartado c) responde a las siguientes preguntas:
e.1) ¿Qué porcentaje de días se ha vendido 1 unidad del modelo A y 3 unidades del modelo B?
e.2) ¿Qué porcentaje de días se han vendido 3 unidades del modelo B?
e.3) ¿Qué porcentaje de los días se han vendido 2 unidades del modelo A?.
e.4) ¿Qué porcentaje de los días se han vendido más unidades del modelo B que del modelo A?.

2. Tenemos la siguiente distribución bidimensional: (1, 10), (2,17), (3,30), (4,28), (5,39), (6,47) donde X mide los gastos (en miles de euros) de publicidad de un producto) e Y mide las ventas conseguidas (miles de euros). Estudia si hay relación entre la 2 variables y en caso positivo calcula la recta de regresión y utilízala para saber si se invierten 10000€ en publicidad cuántas ventas se esperan obtener.

EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

Espacio muestral. Suceso aleatorio. Espacio de sucesos. Tipos de sucesos.

1.- Determina el conjunto de todos los sucesos de los siguientes experimentos aleatorios

a) Al lanzar una moneda y anotar el resultado, determina el espacio muestral y el conjunto de sucesos S

b) Al lanzar un dado de quiniela y anotar el resultado, determina espacio muestral y conjunto de sucesos S

2.- Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras de un dado con forma de tetraedro. Lo dejamos caer y anotamos el número de la cara inferior:

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres que sean no elementales

c) ¿Cuántos sucesos tiene este experimento?

Operaciones con sucesos

3.- Consideramos el experimento "lanzar un dado" y los sucesos A = $\{1,2,3,4\}$, B = $\{1,3,5\}$, C = $\{2,4\}$

a) Obtener los conjuntos A U B, A ∩ B, $\bar{A}$, $\bar{B}$

b) Obtén los conjuntos $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan

c) Calcula B U C y B ∩ C, y razona los resultados.

4.- En el lanzamiento de un dado se define los sucesos A = "obtener un resultado par", B = " obtener un resultado mayor que 4" y C =" obtener 1". Calcula:

a) A U B b) A ∩ B c) $\overline{A \cup B}$ d) $\overline{A \cap B}$ e) A ∩ $\bar{B}$ (Sol.: a) $\{2,4,5,6\}$ b) $\{6\}$ c) $\{1,3\}$
d) $\{1,2,3,4,5,6\}$ e) $\{2,4\}$)

5.- Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos A = " sale al menos dos cruces" y B = " sale alguna cara". Calcula los sucesos (A U B) , (A ∩ B), (A – B) y (B – A)

(Sol.: A U B = " XXX, CXX, XCX, XXC, CCC, CCX, CXC, XCC"; A ∩ B = " CXX, XCX, XXC"; A – B = A ∩ $\bar{B}$ = " XXX"; B – A = B ∩ $\bar{A}$ = " CCC, CCX, CXC, XCC"

Regla de Laplace

6.- En el lanzamiento de un dado, calcular las probabilidades:

a) A = "obtener un número par" b) B = "obtener un resultado mayor que 4"

c) C = "obtener múltiplo de 3 " d) D = "obtener un resultado menor que 3"

7.- En una baraja de 40 cartas, hallar:

a) P[as] b) P[oros] c) P[figura] (Sol.: a) 0,1; b) 0,25; c) 0,3)

8.- Se lanzan dos dados. Se pide:

a) Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen sea múltiplo de tres.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?

(Sol.: a) P(A) = 12 /36 = 1/3 b) P(B) = 1/3)

9.- María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado. Si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

a) Calcule la probabilidad de que gane Laura, asociado al experimento.

b) Probabilidad de que gane María. (Sol.: a) P(gana Laura) = 1/6; b) P(gana María) = 1/6)

10.- En el experimento aleatorio de estudiar las familias de tres hijos por el sexo de dichos hijos consideramos los siguientes sucesos:

A = " el hijo mayor es varón" B = "los tres hijos tienen igual sexo" C = "ningún hijo es varón"

Encuentra los elementos de los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades: E; A; B; C; $A \cap B$; $A \cap C$; $\bar{B}$

(Sol.: P[E] = 8/8= 1; P[A] = 4/8= 1/2 ; P[B] = 2/8 = 1/4 ; P[$A \cap B$] = 1/8; P[$A \cap C$] = 0; P[$\bar{B}$] = 6/8 = 3/4)

11.- En una joyería hay dos alarmas. La probabilidad de que se active la primera es 1/3, de que se active la segunda es 2/5 y de que se activen las dos a la vez es 1/15. ¿Cual es la probabilidad de que se active alguna de las dos? ¿Y de que no se active ninguna de ellas? (Sol.: P($A_1 \cup A_2$) = 2/3; P(no sea active ninguna) = 1/3)

Diagrama de árbol

12.- En una urna hay 4 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se sacan 2 bolas de la urna, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas? ¿Y la de que ambas sean iguales? (Nota: Realiza un diagrama de árbol)

(Sol.: P (extraer dos bolas rojas) = 1/36; P (extraer dos bolas iguales) = 5/18)

13.- Se tiene una bolsa con 7 bolas verdes y 5 rojas, de la que se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean verdes? ¿Y de que sean del mismo color? (Sol.: a) P (3 V) = 0,1591 b) P[3 V o 3 R] = 9/44 ≅0,2045)

Probabilidad condicionada

14.-- Al extraer una carta de la baraja española, se consideran los siguientes sucesos: B = " obtener bastos", F="obtener una figura" y R ="obtener rey".

a) Halla la probabilidad P(R/F) (Sol.: P(R/F) = 1/3)

b) Comprobar si los sucesos B y F por un lado, y R y F, por otro, son o no independientes. (Sol.: B y F independientes; R y F son dependientes)

15.- a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que P(A) = 0'5, que P(B) = 0'4 y que P($A \cup B$) = 0'8, determine P(A/B).

b) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que P(C) = 0'3, que P(D) = 0'8 y que C y D son independientes, determine P($C \cup D$).

(Solución a) P(A/B) = 0'25 b) C y D son independientes, determine P($C \cup D$) = 0'86)

16.- Tenemos una bolsa con bolas de colores numeradas. Si se extrae una bola al azar, calcula la probabilidad:

a) de que el número sea par con la condición de que sea del color verde

b) de que el número sea par con la condición de que sea del color rojo

(Sol.: a) P[par/verde] = $\frac{P[par\ y\ verde]}{P[verde]} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$; b) ½)

17.- Se lanzan dos dados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 10?

b) Si la suma de puntos ha sido 7, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un tres? (Sol.: P(A) = 3 /36 = 1 /12 . b) En este caso, el suceso B/A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. . Por tanto, P(B/A) = 2/ 6 = 1/ 3)

18.- Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 negras. De ellas se extraen, al azar y sin reemplazamiento, dos bolas. Construye un diagrama de árbol asociado al experimento. A partir de él determina:

a) la probabilidad de que las bolas extraídas sean de distinto color.

b) Si las bolas han resultado de distinto color, ¿cuál es la probabilidad de que la primera fuese blanca?

(Sol.: a) P[B y N] = 30/56; b) P[1ª B/B y N]= (P(1ª B). P(2ªN /1ª B)) /P(B y N) = ½)

19.- La probabilidad de que una persona use gafas es 0,6; la probabilidad de que tenga los ojos claros es 0,6 y la probabilidad de que use gafas y tenga ojos claros es 0,52. Calcula la probabilidad de que, elegida una persona al azar:

a) No use gafas b) Use gafas o tenga los ojos claros. c) No use gafas o no tenga los ojos claros

(Sol.: a) P$(\bar{A}) = 0{,}4$; $b)\ P(A\ U\ B) = 0{,}68$; $c)\ P(\bar{A}\ U\ \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0{,}48)$

<u>**Tablas de contingencia**</u>

20.- Los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato de un IES se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla. Si se elige un alumno al azar, ¿Cuál es la probabilidad que sea chica? ¿Y la probabilidad de que sea chica de 1º? ¿Y la probabilidad que si es de 2º sea chica?¿Y la probabilidad de que sea de 2º si es una chica] (Sol.: a) P[sea una chica] = 120/230; b) P[sea chica de 1º] = 65/230; c) P[sea chica/ser de 2º] = 55/105, d) P[sea de 2º/ ser chica] = 55/120)

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º B	60	65	125
2º B	50	55	105
Total	110	120	230

21.- La siguiente tabla muestra un estudio sobre el hábito de hacer deporte en un grupo de hombres y mujeres.

	Hombre	Mujer	Total
Deportista	50	70	120
No deportista	70	60	130
Total	120	130	250

a) Calcular la probabilidad de A = "Deportista/Hombre"

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer sabiendo que no es fumadora?

(Sol.: a) P(A) = 50 /120 = 5/ 12 ; b) P(B) = 60 / 130 = 6/ 13)

TEORÍA: Teorema de la probabilidad total

TEORÍA: Teorema de Bayes

Ejercicios

22.- En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20% de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuáles el 40% son de primero de bachillerato y el 30% participan en la de fútbol, de los cuáles el 25% son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones. Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?

23.- Tenemos una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y una urna B con 6 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos de ellas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

24.- En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso el 90 % de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos que estudian inglés son varones. De los que estudian francés, el 40 % son chicos. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

25.- Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo. a) Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores

26.- En una clase de segundo de bachillerato compuesta por el 55 % de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40 % de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos al azar un alumno de la clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique el balonmano?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique el balonmano y sea chica?

c) Si resulta que no practica el balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

TEORÍA: Modelos probabilísticos discretos: Bernoulli. Binomial.

TEORÍA: Distribuciones de probabilidad continua: Normal

EVAU Junio 2020/21

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

   b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	**k \ p**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
4	**0**	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

EVAU Julio 2020/21

8. *a*) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

   b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	**k \ p**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
8	**0**	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

Junio 2019/20

8. *a*) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

   b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	**k \ p**	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.33**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.49**	**0.50**
9	**0**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

Julio 2019/20

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

   b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Junio 2018/19

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	**k \ p**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,33**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,49**	**0,50**
5	**0**	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2018/19

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**

a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**

b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767