2º Bach

REPASO EvAU CLM

Nombre:________________________________ Curso:_______

MATEMÁTICAS

Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz

Profesor:

………………………………………………………………………………………

Materiales utilizados:

Ejercicios y problemas organizados y extraídos de exámenes de EvAU CLM de Matemáticas II
por Daniel Hernández (IES Melchor de Macanaz)
Ejercicios y problemas recopilados por D. Jose Luis Hernández Quintanilla (IES Melchor de Macanaz)
Algunas imágenes de esquemas del Blog https://marielmatesblog.wordpress.com

UNIDADES:

Unidad 1. Límites. Continuidad.

Esquema de repaso:

1. Definición de función. Dominio. Recorrido.

Una función real de variable real ($f: D \subseteq R \longrightarrow R$) es una correspondencia que asocia a cada valor de un subconjunto de R (llamado dominio) un único valor de otro subconjunto de R (llamado conjunto imagen o recorrido)

$$f: R \longrightarrow R$$
$$x \rightsquigarrow y = f(x)$$

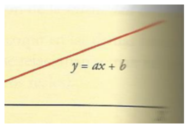
La primera magnitud x es la variable independiente y la segunda "y" la variable dependiente.

Dominio f = Dom(f) = D = {conjunto de valores de x para los que está definida la función}

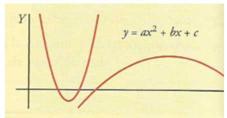
Recorrido f = Rec (f) = {conjunto de valores reales que son imagen de los valores del dominio}

2. Funciones elementales.

Lineales



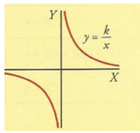
Cuadráticas



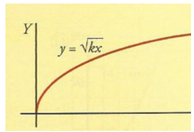
Polinómicas

$x, x^2, x^3, \ldots$

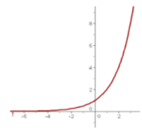
Racionales (P/Q)



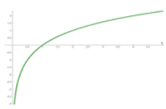
Radicales √P



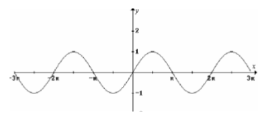
Exponencial (2^x)



Logarítmica



Trigonométricas (sen(x), cos(x), …=



3. Dominio de funciones elementales

Funciones	Dominios
Polinómicas (P(x)) Exponenciales (2^x) Sen(x), Cos(x)	R
Racionales P(x)/Q(x)	R-{raíces de Q(x)}
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	Estudiar la inecuación $Q(x) \geq 0$
Logarítmos $\log_a(Q(x))$	Estudiar la inecuación $Q(x) > 0$

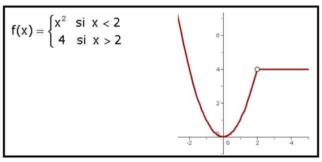
4. Cálculo del recorrido.

Recorrido f = Dominio de la inversa de f = Dom f^{-1}

Para calcular la inversa f^{-1}

Dada y=f(x), escribir x=f(y) y despejar "y".

5. Funciones definidas a trozos. Valor absoluto.



Son funciones divididas en varios intervalos. Hay que saber representarlas. En particular las función |f(x)|

|f(x)| se representa resolviendo f(x)=0 y expresando como una función a trozos de intervalos con valor f(x) cuando es f(x)>0 y -f(x) cuando f(x)<0.

6. Idea intuitiva de límite. Límites laterales.

Un número real, L, es el límite de una función, f, en el punto "a" si al tomar valores de x suficientemente próximos a "a "(distintos de a) , sus imágenes, f(x), están tan próximas a L como queramos. Se designa por: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Límites laterales. Podemos aproximarnos a un valor "a" por la izq, con valores menores que él, o por la derecha, con valores mayores.

Izq $\lim_{x \to a^-} f(x)$; Dcha $\lim_{x \to a^+} f(x)$. Para que exista el límite ambos límites han de coincidir.

7. Propiedades de los límites.

1. lim (f(x)+g(x))=lim f(x)+lim g(x)
2. lim f(x)·g(x)=lim f(x)·lim g(x)
3. lim k·g(x)=k·lim g(x)
4. Si lim g(x)>0, lim f(x)/g (x)=lim f(x)/lim g(x)
5. Si g(x) es potencial, exponencial, logarítmica o trigonométrica → lim g(f(x))=g(limf(x))
6. lim $f(x)^{g(x)}$ = lim $f(x)^{\lim g(x)}$

8. Cálculo de límites cuando x→∞

$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \neq \infty$	**Se dice que hay una asíntota horizontal en y=c.**
Si f(x)= $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q polinomios	(1) Si Grado P > Grado Q → Tiende a $\pm\infty$. Para saber el signo sustituir por un número grande para ver el signo. (2) Si Grado P < Grado Q → Tiende a 0. (3) Si Grado P = Grado Q → Tiende al cociente de los números que acompañan a los monomios de mayor grado. https://youtu.be/icZDdqfHAUo
Si f(x)= $\dfrac{g(x)}{h(x)}$, con g y h funciones	- Si g(x) crece más rápido que h(x) tiende a ∞ y si es al revés tiende a 0. -Orden de crecimiento de algunas funciones: $\log(x) \approx \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \approx x \approx x^2 \approx x^5 \approx 2^x \approx 7^x$
$\infty - \infty$	-Resolver la expresión si se puede (Ej: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x+3} - 2x)$ -Si es la diferencia de dos funciones, dependerá del orden de cada una. -Si hay raíces y los grados son los mismos multiplicar por el conjugado numerador y denominador (Ej: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x)$. https://youtu.be/XSflUKZbvpE
a^{∞}, con $a \neq 1$	-Si a>1 tiende a ∞ y si 0<a<1 tiende a 0.
1^{∞}	-Resolverlo usando que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$ $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$ https://youtu.be/39Q1ZwI9cFY
$\dfrac{0}{0}$	-Resolver para convertirlo en otro tipo de indeterminación. (Ej: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} : \dfrac{1}{x+1}$).

9. Cálculo de límites cuando x→ -∞

Usar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$ https://youtu.be/bQVo28zy27k

10. Cálculo de límites cuando x→a

$\frac{k}{0}$, con $k \neq 0$	-Hay que estudiar los límites laterales para ver si salen + ó – infinito. Izq→ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$; Dcha→ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ **-Hay una asíntota vertical en x=a.** https://youtu.be/yoAPeT7_mq8
$\frac{0}{0}$	-Descomponer numerador y denominador para simplificar. https://youtu.be/UtB_d6ZS_wg -Si aparecen raíces, multiplicar arriba y abajo por el conjugado. https://youtu.be/0M6wB158APQ
$\infty - \infty$	-Operar con la función para cambiar de indeterminación. (Ej: $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2}{x-3} - \frac{x}{x^2-9}$)
1^∞	-Resolver usando el número "e".

11. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntotas verticales. Los candidatos son los puntos que no están en el dominio y los extremos.

A.Vertical en x=a si $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0}$ (habrá que estudiar signo por izq y dcha).

Asíntotas horizontales. A.Horizontal en y=b si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

Asíntotas oblicua en y=mx+n, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, m= $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, n= $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

La posición de f(x) respecto de la asíntota se averigua mirando el signo de f(x) – (mx + n) para valores grandes de x

12. Definición de función continua en un punto.

Se dice que **una función f(x) es continua** en un punto x=a si y sólo si se cumplen estas 3 condiciones:

1. $\exists f(a)$
2. $\exists\ lim_{x\to a^-} f(x) = lim_{x\to a^+} f(x) = lim_{x\to a} f(x)$
3. $lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

13. Definición de función continua en intervalo.

- f(x) es continua en (a,b) si lo es en todos sus puntos.
- f(x) es continua en [a,b] si es continua en (a,b) y es continua por la dcha en "a" y por la izq en "b".

14. Tipos de discontinuidad.

- **Discontinuidad evitable**. No existe f(a) ó existe pero no coincide con el límite.(Falla 1 o Falla 3)
- **Discontinuidad de salto o de 1ª especie**.(Falla 2)
  - Salto finito: no coinciden los laterales y son finitos.
  - salto infinito: algún límite lateral es infinito.

- **Discontinuidad esencial o de 2ª especie**. Cuando no existe algún límite lateral

15.Continuidad de funciones elementales

Funciones	Continuidad
Polinómicas (P(x)) Exponenciales (2^x) Sen(x), Cos(x)	Continua en R
Racionales P(x)/Q(x)	Continua en R-{raíces de Q(x)}
Radicales $\sqrt{Q(x)}$	Continua en $Q(x) \geq 0$
Logarítmos $\log_a(Q(x))$	Continua en $Q(x) > 0$
Tag(x)	Continua salvo en $\frac{\pi}{2} + k\pi$

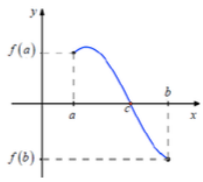
16. Propiedades de continuidad.

Si f(x) y g(x) son dos funciones continuas en el punto x = a, por las propiedades de los limites también son continuas en x = a las funciones:

1. f(x) ± g(x)
2. f(x) · g(x);
3. k · f(x)
4. $(f(x))^{g(x)}$ si f(a)>0
5. f(x)/g(x) si g(a)≠0
6. g(f(x)) si g(x) es continua en f(a)

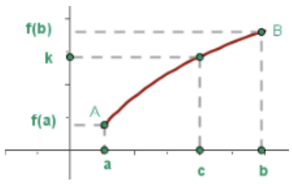
17. Teorema de Bolzano.

Si f(x) es una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y f(a) tiene distinto signo que f(b) (f(a) . f(b) < 0), entonces existe al menos un punto c∈(a, b) tal que f(c) = 0 (es decir, donde corta al eje OX).



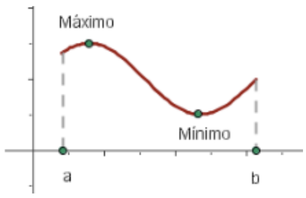
18. Propiedad de los valores intermedios (Teorema de Darboux).

Si f(x) es una función continua en [a, b] y n es cualquier número comprendido entre f(a) y f(b), entonces existe al menos un número k∈(a,b) tal que f(c) = k



19. Teorema de la acotación o de los extremos absolutos de Weierstrass.

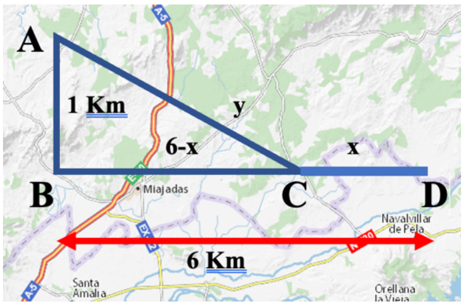
Si f(x) es continua en [a, b], entonces alcanza un máximo y un mínimo absoluto en [a,b] (y por tanto está acotada). Es decir, que hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a [a,b] donde f(x) alcanza valores extremos absolutos: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ si x ∈[a,b]



Problemas propuestos de la vida real

1. Queremos vallar un campo de futbol rectangular de 400 m^2. En dos de los lados paralelos usaremos un material de 200€/m lineal. En los otros dos lados paralelos usaremos un material de 100€/m. Obtén una función que describa el coste total de la valla en función de uno de los lados. ¿Cuál es el dominio de esa función?.

2. Tenemos el siguiente mapa con cuatro puntos A, B, C y D. Queremos llevar un cable eléctrico desde D hasta A pasando por C. Entre A y B hay 1 km de distancia y entre B y D hay 6 km de distancia. El coste de llevar este cable es de 200€/m entre C y D y de 300€/m entre A y C. Obtén una función que exprese el coste de la instalación desde D hasta A en función de x. ¿Cuál es el dominio de la función?



3. En una empresa en función del dinero en millones de euros que invierten pueden calcular el coste que van a tener en la fabricación de un producto mediante la función $C(x)=\frac{x^2-10x+16}{x^2-6x+8}$. Calcula el dominio. ¿Qué coste tendrán si la inversión fuera de 2 millones de euros?.

4. Queremos cercar tres lados de una parcela rectangular con 400 metros de alambre. Expresa el área A de la parcela en función del lado pequeño del rectángulo y calcula el dominio de dicha función.

5. El porcentaje de monopatines en alquiler en una ciudad viene dado por la función $P(x)=\frac{300x+120}{3{,}5x+40}$, donde x representa los años que ha pasado desde 2018 cuando se montó el negocio. Averigua a largo plazo que porcentaje de los monopatines de la ciudad estarán en alquiler.

6. Una línea de tren transporta 2000 pasajeros con un coste de billete de 10€. Según un estudio de la empresa por cada 2€ de aumento en el precio del billete se perderán 100 pasajeros. Mediante una función expresa el número de pasajeros mensuales dependiendo del precio del billete y calcula el dominio teniendo en cuenta que el número de pasajeros debe ser mayor o igual a 0 y el precio del billete mayor o igual a 10€.

7. Una empresa que fabrica microondas tiene unos gastos fijos mensuales de 150000€ y un coste de 75€ por cada unidad de microondas que fabrica.
   a) Calcula la función que representa los costes mensuales de la empresa.
   b) Calcula la función de costes medios mensuales y calcula el coste medio de fabricar 10000 microondas.
   c) Calcula la asíntota horizontal de costes medios e interpreta su valor.

8. Una determinada bacteria se reproduce cada minuto. El nº de bacterias medidos en millones viene dado por $C(t)=\left(\frac{t+2}{t+1}\right)^t$, donde t representa el número de minutos que han pasado. ¿Puedes indicar si el número de bacterias tiende a estabilizarse con el tiempo y cuántas habrá?.

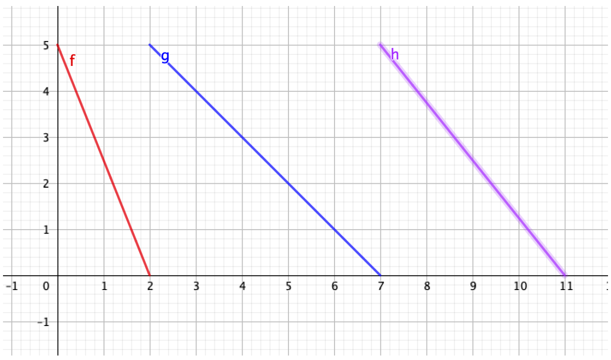
9. La distancia entre Hellín y Albacete es de 70 km. Queremos ir y volver en coche. La velocidad media del viaje de ida es de x km/h y la velocidad media de vuelta es de 20 km/h por encima de la velocidad de ida.

Encuentra la función que representa el tiempo total tardado en función de la velocidad media de ida x. Estudia sus asíntotas verticales e interpreta su significado.

10. El nº de personas infectadas por Covid en un determinado país en función del tiempo viene dada por I(t) = $\begin{cases} a \cdot e^{3t} & t < 2 \\ \sqrt{t+7} - \sqrt{t+2} & t \geq 2 \end{cases}$ donde "a" es una constante y t el tiempo en años desde el inicio de la pandemia. Determina el valor de "a" para que la función se continua en t=2 y calcula el número de personas infectadas cuando el tiempo tiende a infinito.

11. En un pueblo con 3000 habitantes una persona se ha contagiado de un virus. Suponiendo que la propagación se puede modelar con la función P(t) = $\frac{3000}{1+1000 \cdot e^{-0,9t}}$, con $t \geq 0$. a) Calcula el nº de contagiados a los 5 días, b) ¿En cuántos días se contagiarán el 30% o más?, c) ¿Qué pasará a largo plazo?.

12. La siguiente gráfica nos muestra cómo nos hemos bebido 3 garrafas de 5 litros de agua en los últimos 11 días. Obtén la función a trozos que representa dicha gráfica. Además estudia los límites laterales y la continuidad de la función.



13. Tenemos una función G(x) =$\frac{x^3-x^2-3}{2x-1}$ que representa los gastos de una empresa en función del tiempo en años. Demuestra que el gasto va a ser nulo en algún momento entre el primer y el tercer año.

14. La altura de una partícula en movimiento viene dada por la función M(x)= $x^7 + x + 2$. Demuestra que esa partícula alcanza una altura nula en algún momento en el intervalo [-2, 2].

15. Tenemos una nave espacial que describe una trayectoria dada por la función f (x) = ln(x) y un cohete que se mueve con trayectoria g (x)= e^{-x} . Demuestra que la nave espacial y el cohete se encontrarán en algún punto.

16. **Bolzano/Darboux.** El beneficio de una empresa en millones de euros viene dado por la función B(x)=sen(x)+2x. Demuestra que en algún momento se va a llegar a obtener un beneficio de 1 millón de euros.

17. **Weistrass**. El movimiento de un pájaro durante 5 minutos viene dado por la función f(t)=$\begin{cases} t^2 & t < 2 \\ t+2 & t \geq 2 \end{cases}$

Demuestra que dicho movimiento está acotado entre dos valores en el intervalo de tiempo [0,5] y calcula cuáles son dichos valores.

Ejercicios EvAU

Junio 2022/23

2. *a)* **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.
   b) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.
   c) **[1 punto]** ¿Podría $f(x)$ tener más de una raíz en el intervalo $[0, 2]$? Justifica tu respuesta.

6. *a)* **[1 punto]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}$$

Modelos propuestos Curso 2022/23

4. *a)* **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza el teorema para demostrar que la función

$$f(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x+2}$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

6. *a)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

7. *a)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln(x)}{1+x^3}.$$

4. *a)* **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x^2+2}$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

Junio 2021/22

2. *b)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

Julio 2021/22

6. *b*) **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = (2e^x - 8x - 3) \,/\, (x^2 + 2)$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

Junio 2020/21

7. *b*) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

Julio 2020/21

5. *b*) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

Junio 2019/20

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

Julio 2019/20

3. *b*) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases},$$

donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Julio 2018/19

1A. a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. **(1,5 puntos)**

Junio 2017/18

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo [-1,1]. **(1,5 puntos)**

Otros ejercicios propuestos:

Septiembre 2016/17

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 6x + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$. **(1 punto)**

Asíntotas

Junio 2014 1B Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2} \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$$

(Sol.: a) D(f) = R^+ - {2} AH y = -1 ; b) D(g) = R – {2} AO y = x + 4; AV x = 2)

Septiembre 2014 1B Para la función f(x) = $\sqrt{x^2 + x + 1}$

b) Estudia si tiene asíntotas oblicuas cuando x →+∞ (Sol.: y = x + ½)

Junio 2011 1A. Dada la función f(x) = $\dfrac{4x^2 + 3x + 4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de f(x) . (Sol.: AV x = 0, AO y = 2x + 3/2)

Sept. 2009. Se sabe que la recta y = 9 es una asíntota horizontal de la función

f(x) = $\dfrac{x^2}{ax^2 - 4}$. Calcula el valor del parámetro a $\in$R. Estudia si dicho valor del parámetro tiene asíntotas verticales u oblicuas. (Sol.: a = 1/9; AV x = 6, x = -6; AO no tiene)

Límites

Junio 2016 1B Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ (Sol.: 4)

Reserva 2012 1B a) Calcula para qué valores del parámetro a ∈ R se verifica la igualdad:

b) Calcula el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ (Sol.: 1)

Reserva Junio 2011 1B. Calcula los límites: a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{1/x-1}$

Junio 2008. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}$ (Sol.: -7)

Unidad 2. Derivadas

Esquema de repaso:

1. Definición de derivada.

Llamaremos derivada de f(x) en x=a al límite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si ese límite no existiera, entonces f(x) no sería derivable en x=a.

2. Interpretación geométrica de la derivada.

La derivada de f(x) en el punto x = a coincide con la pendiente de la recta tangente a la grafica de f(x) en el punto x = a, es decir, m=f´(a).

Ecuación de la recta tangente a f(x) en x=a.

y-f(a) = f´(a) (x-a)

Ecuación de la recta normal a f(x) en x=a.

y-f(a) = $\frac{-1}{f'(a)}$(x-a) **Interpretación física:**

$v_i(a)=\lim_{t\to a} VM[t,a] = \lim_{t\to a} \frac{e(t)-e(a)}{t-a} = e'(t)$

Reglas para el cálculo de derivadas:

Función simple		Función compuesta (varias funciones)	
f(x)= K	f'(x)= 0		
f(x) = x	f'(x)= 1		
f(x) = x^n	f'(x)= n x^{n-1}	g(x) = $(f(x))^n$	g'(x)= n $(f(x))^{n-1}f'(x)$
f(x) = $\sqrt{x}$	f'(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	g(x) = $\sqrt{f(x)}$	g'(x)= $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
f(x) = $\sqrt[n]{x}$	f'(x)= $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	g(x) = $\sqrt[n]{f(x)}$	g'(x)= $\frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$
f(x) = e^x	f'(x)= e^x	g(x) = $e^{f(x)}$	g'(x)= $e^{f(x)}\cdot f'(x)$
f(x) = a^x	f'(x)= $a^x \ln a$	g(x) = $a^{f(x)}$	g'(x)= $a^{f(x)}\cdot \ln a\, f'(x)$
f(x)= lnx	f'(x)= $\frac{1}{x}$	g(x) = ln f(x)	g'(x)= $\frac{1}{f(x)} f'(x)$
f(x) = $\log_a x$	f'(x)= $\frac{1}{x}\log_a e$	g(x) = $\log_a f(x)$	g'(x)= $\frac{1}{f(x)}\log_a e f'(x)$
f(x) = sen x	f'(x)= cos x	g(x) = sen f(x)	g'(x)= cos f(x) f´(x)
f(x) = cos x	f'(x)= - senx	g(x) = cos f(x)	g'(x)= -sen f(x) · f´(x)
f(x) = tgx	f'(x)= 1+ tg^2x= sec^2x = $\frac{1}{\cos^2 x}$	g(x) = tg f(x)	g'(x)= $(1+tg^2x)\cdot f'(x)$
f(x)=arcsenx	f'(x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	g(x)=arcsenf(x)	g'(x)= $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
f(x)=arccosx	f'(x)= $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	g(x)=arccosf(x)	g'(x)= $\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
f(x)= arctgx	f'(x)= $\frac{1}{1+x^2}$	g(x) = arctgf(x)	g'(x)= $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

Operaciones con la derivada
DERIVADA DE LA SUMA: D(f(x) +g(x)) = f´(x) + g´(x)
PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA FUNCIÓN: D(k f(x)) = k·f´(x)
PRODUCTO DE FUNCIONES: (f(x) · g(x))’ = f´(x)·g(x) + f(x)·g´(x)
COCIENTE DE FUNCIONES : $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
REGLA DE LA CADENA (COMPOSICIÓN DE FUNCIONES): D(g(f(x)) = g´(f(x))·f´(x)

3. Derivadas laterales.

Llamaremos derivada por la izq de f(x) en x=a

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Llamaremos derivada por la dcha de f(x) en x=a

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Para que exista f´(a), las derivadas laterales deben existir y tener el mismo valor. Si no es así, si existen y son distintas se dice que la función presenta en x=a un **punto anguloso**. Si existen pero son infinitas se dice que es un **punto de tangente vertical**.

5. Crecimiento y decrecimiento.

f(x) es estrictamente creciente → f´(x)>0

f(x) es estrictamente decreciente → f´(x)<0

Los valores en que f´(x)=0 son candidatos a máximos y mínimos relativos.

<u>Para estudiar el crecimiento de una función f(x):</u>

1. Analizamos la continuidad de f(x)

2. Calculamos f´(x)=0 para obtener candidatos a máximos o mínimos relativos.

3. Estudiamos el signo de f´(x) con una tabla de intervalos en la que incluimos esos candidatos.

7. Teorema de Rolle.

Sea f(x) una función continua en [a,b], derivable en (a,b) y que verifica que f(a) = f(b) entonces existe, al menos, un punto c∈(a,b) tal que f´(c) = 0.

Interpretación: Existe al menos un punto cuya recta tangente tiene pendiente 0 y por tanto es paralela al eje OX.

10. Problemas de optimización

4. Relación continuidad y derivabilidad.

f(x) derivable en x=a → f(x) es continua en x=a

(por lo tanto, las funciones que no son continuas no son derivables).

Al revés no es cierto, se pueden encontrar funciones continuas que no son derivables.

Ejemplo: f(x)=|x|= $\begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$

6. Curvatura de una función.

Si f(x) es una función que tiene f´´(x), entonces:

f´´(x)>0 → f(x) es cóncava (∪) (cóncava hacia abajo)

f´´(x)<0 → f(x) es convexa (∩) (cóncava hacia arriba)

Los valores en que f´´(x)=0 son candidatos a Puntos de Inflexión.

<u>Para estudiar la curvatura de una función f(x):</u>

1. Analizamos la continuidad de f(x)

2. Calculamos f´´(x)=0 para obtener candidatos a puntos de inflexión.

3. Estudiamos el signo de f´(x) con una tabla de intervalos en la que incluimos esos candidatos.

8. Teorema del valor medio de Lagrange

Si f(x) es continua en [a,b] y derivable en (a,b), entonces existe, al menos, un punto c∈(a,b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Interpretación: Existe un punto cuya tangente a f(x) es paralela a la de la recta que une (a,f(a)) y (b,f(b)).

9. Regla de L´Hopital.

Sean f(x) y g(x) funciones continuas y derivables en un entorno del punto x = a. Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Problemas propuestos de la vida real

1. **Interpretación física de la derivada**. Un cañón dispara una pelota hacia arriba. La altura de la pelota viene dada por la función e(t)= $-8t^2+24t+80$, $t \geq 0$. Calcula la velocidad instantánea de la pelota a los 2 segundos de lanzarla y la velocidad instantánea cuando cae al suelo.

2. **Interpretación de la derivada aplicada al estudio de costes**. El coste de fabricar “x” chips viene dado por la función $C(x)=0{,}03x^2+2x+100$, $x \geq 0$.

a) Calcula la tasa de variación media de coste entre fabricar 100 y 200 chips.

b) Calcula el coste marginal (coste instantáneo) de fabricar 100 chips.

Nota: Tasa de variación media de coste de x_1 y x_2 es TVM=$\frac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1}$ y el coste marginal es C´(x). El coste marginal nos indica el coste de fabricar una unidad más de las que estamos fabricando.

3. **Derivada e interpretación**. El número en miles de habitantes de un pueblo interior viene modelizado por la función N(t)=$4e^{-0{,}3t^2}$, donde t es el tiempo en años y t=0 corresponde al año 2010.

a) Calcula el nº de habitantes que había en el año 2010 y en el año 2012.

b) Calcula N´(2) y N´(4) e interpreta que quieren decir esos dos valores.

c) ¿Qué se puede decir sobre lo que va a pasar con la población de este pueblo a largo plazo?. Justifica la respuesta.

4. **Derivada e interpretación**. Supongamos que el nivel del mar (en metros) de una zona costera se puede modelizar por la función A(t)= $4{,}5+1{,}2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, siendo t las horas empezando desde medianoche. Calcula A´(5) e interpreta el valor obtenido.

5. **Continuidad y derivabilidad**.
Una empresa de fórmula 1 está diseñando una pista para el próximo campeonato del mundo. Quiere diseñar una curva parabólica que acabe en una recta. La función que describe la forma de la pista viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+ax+14 & x\leq 2\\ -8x+b & x>2\end{cases}$$

Determina los valores “a” y “b” para que la función sea continua y derivable.

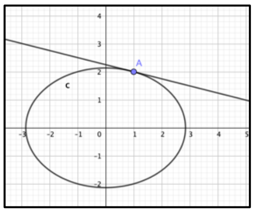
6. **Límites. Interpretación de la derivada.** La propagación de un rumor se puede modelar por la función R(t)=$\frac{100}{1+e^{-2t}}$, donde R(t) es el porcentaje de gente que conoce el rumor en t meses.

a) Calcula como va a evolucionar el porcentaje de gente que conoce el rumor cuando pase mucho tiempo e interpreta el resultado.

b) Determina la tasa de propagación del rumor y determina cuanto valdrá mes 1 y el mes 3. ¿Qué tendencia le ves a la propagación del rumor?.

7. **Interpretación física de la derivada**. El movimiento de una nave respecto al tiempo (medido en días) a lo largo de un eje de coordenadas viene dado por la función p(t)=4sen(t)-2t con $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿En qué instante está la nave está en reposo?.

8. **Recta tangente a una función.** En un videojuego de guerra, un tanque describe una trayectoria en forma de elipse ecuación $9x^2+16y^2=73$. El tanque realiza disparos a lo largo de las rectas tangentes a su trayectoria. Si el tanque hace un disparo cuando está situado en el punto P(1,2), ¿en qué coordenadas del eje Y impactará?.



9. **Optimización**. Los semanales de fabricas "x" consolas PS5 viene dado por la función $C(x)=30+4x-20\ln(x)$ (en miles de euros). Por cuestiones laborales solo se pueden fabricar entre 3000 y 10000 unidades cada semana. Determina cuántas consolas se deben fabricar semanalmente para minimizar los costes.

10. **Optimización**. Los ingresos en miles de euros por la venta de "x" unidades de un cierto producto vienen dados por la función $I(x)=\frac{30x}{\sqrt{x}}$. Los gastos de fabricar "x" unidades vienen dados por la función $G(x)=3x+63$. Determina que número de unidades maximiza el beneficio y cuál es este.

11. **Optimización.** Queremos vallar un terreno rectangular de 1000 m^2 con dos tipos de materiales. En dos de los lados paralelos queremos usar un material de 300 €/m lineal y en los otros dos lados paralelos un material de 160 €/m lineal. Determina las dimensiones de la parcela para hacer que el coste sea mínimo.

12. **Optimización.** Determina las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica de 1 litro de tomate para que se pueda construir con la cantidad mínima de metal.

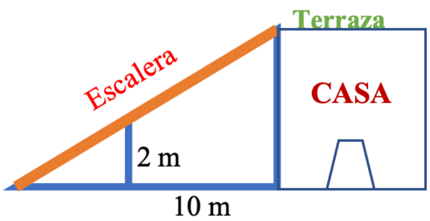
13. **Optimización.** El Corte Inglés vende 200 consolas a la semana a un precio de 350€. El departamento de Ventas estima que por cada 10€ de rebaja se incrementará en 20 el nº de consolas vendidas semanalmente.

a) Determina la función que expresa el precio en términos del número de unidades vendidas.

b) Determina la función ingresos en términos del número de unidades vendidas.

c) Determina el número de unidades vendidas que maximiza los ingresos.

14. **Optimización**. Una casa está rodeada por un muro de 2 m de altura. Desde la casa al muro hay 10 m de distancia tal y como se observa en la siguiente figura. Calcula la longitud mínima que debe tener una escalera para acceder desde la calle hasta la terraza.



15. **Optimización.** Demuestra que de todos los triángulos isósceles de un perímetro dado el de mayor área es el triángulo equilátero.

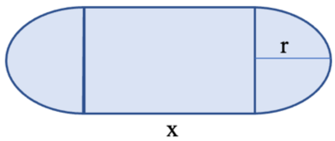
16. **Optimización.** El rendimiento R de un cultivo en función del nivel de nitrógeno "x" en el suelo viene dado por la función $R(x)=\frac{ax}{x^2+1}, a>0, x\geq 0$. ¿Con qué nivel de nitrógeno se obtiene el mejor rendimiento?.

17. **Optimización.** Después de tomar un fármaco por vía oral, la concentración de este en sangre viene dado por la función C(t)= $2t^2e^{-bt}$, b>0, $t \geq 0$, siendo t el tiempo en horas desde su administración. Halla el valor de b para que la máxima concentración de sangre se produzca al cabo de 2 horas.

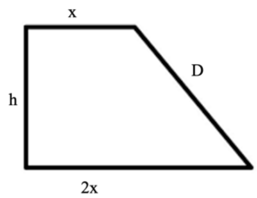
18. **Optimización.** La tos obliga a la tráquea a contraerse y afecta a la velocidad del aire que circula a través de ella y puede modelizarse por la expresión V(r)=$kr^2(R-r)$, $0 \leq r \leq R, k \geq 0$, R es el radio normal de la tráquea y r el radio durante la tos. ¿Con qué radio se obtiene la máxima velocidad de aire?.

19. **Optimización.** El trayecto que realizan 2 corredoras, María y Antonia, se puede representar indicando que parten del origen de coordenadas y corren a lo largo del eje positivo de abscisas. Un fotógrafo se encuentra situado en P(0,1). Si Antonia es 3 veces más rápida que María, ¿Cuál es el ángulo de visión máximo que tiene el fotógrafo para observar a ambas?.

20. **Optimización.** Queremos construir una pista de atletismo en forma de rectángulo con un semicírculo a cada lado de 400 m de longitud. Determina el área máxima de la región encerrada por la pista.



21. **Optimización**. En el patio de una escuela se quiere construir un área de juegos de 30 m^2 en forma de trapecio rectangular con la base grande el doble que la base pequeña y que el lado oblicuo (D) respecto a las bases sea tan corto como sea posible (**Cataluña**).



22. **Optimización**. De entre todos los rectángulos situados en el 1º cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta x+2y=4, determina los vértices del que tiene mayor área. **(Galicia)**

23. **Optimización**. Una imprenta debe diseñar un cartel de 90 cm^2 para texto y, además, con un margen superior de 3 cm, inferior de 2 cm y márgenes laterales de 4 cm cada uno. Calcula las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel para que se utilice la menor cantidad de papel posible **(Cantabria)**

24. **Teorema de Bolzano/Rolle**. La evolución de la temperatura al poner hielo en un cazo con fuego viene dada por la función T(t)= $t^5 + 5t - 5$ donde t representa el tiempo entre 0 y 2 minutos. Demuestra que sólo se alcanza la temperatura de 0 grados una única vez en el intervalo [0,2].

25. **Teorema Rolle**. El movimiento de una partícula viene dado por e(t)=t^4-8t^2, $-1 \leq t \leq 1$. Demuestra que hay algún valor en dicho intervalo en el que la partícula se para (velocidad 0). ¿En qué momento ocurre eso?.

26. **Teorema del valor medio**. Hemos recorrido 80 km de distancia entre Hellín y Murcia en 1 hora. Demuestra que, aunque durante el trayecto la velocidad habrá variado, hay algún instante de tiempo en el que la velocidad ha tenido que alcanzar los 80 km/h.

27. **Teorema del valor medio**. En un mapa, una carretera describe una trayectoria que viene dada por la función e(t)=t^3-6t^2+5, donde t representa el tiempo en horas en el intervalo [0,3]. Demuestra si es posible construir una carretera recta tangente a e(t) que sea paralela a la que recta que une los puntos (0,f(0)) y (3,f(3)). En caso afirmativo averigua en que puntos.

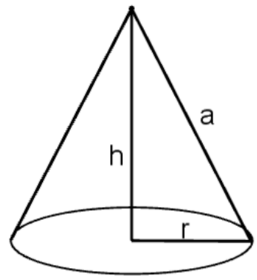
Ejercicios EvAU

Junio 2022/23

7. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

Modelos propuestos Curso 2022/23

2. La generatriz (a) de un cono (de altura h y radio r) mide 3 unidades.



a) **[1,5 puntos]** Encuentra la función $V(h)$ que expresa el volumen del cono en función de su altura h. Recuerda que el volumen del cono es $\pi r^2 h/3$. Indica el dominio de esta función y justifica que alcanza un máximo y un mínimo absolutos en dicho dominio.

b) **[1 punto]** Halla el valor de la altura que maximiza el volumen.

1. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Julio 2021/22

2. *a*) **[1,5 puntos]** Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \longrightarrow +\infty$.

3. *a*) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = \left(2e^{x^2-4} - 8x + 14\right) / \left(x^2 - 2x\right)$$

Junio 2020/21

6. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

Junio 2020/21

7. *a)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{2x-4}$.

Julio 2020/21

5. *a)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

Julio 2020/21

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

   a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Julio 2020/21

7. *a)* **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1,1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1,1]$.

Junio 2019/20

3. *b)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-cos(x^2)}$.

Julio 2019/20

3. *a)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{sen}(2x)}\right)$.

Junio 2019/20

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.

   a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Julio 2019/20

4. *a*) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Junio 2018/19

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ a\sqrt{x} - \dfrac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$. **(1 punto)**

Junio 2018/19

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3}$ **(1,25 puntos por límite)**

Julio 2018/19

1B. a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

Otros propuestos

Madrid 2023 – Opción A

Problema 23.1.2 *(2,5 puntos)* Para la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe - e}{e^x - e} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{4x - 3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Para la función $g(x) = (e^x - e)f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

Madrid 2023 – Opción B

Problema 23.2.2 *(2,5 puntos)* Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.

a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.

b) (0,5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

Andalucía 2023 – Opción A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 f(x)\right)$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos *(–2, f(–2))* y *(2, f(2))*.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

Castilla La Mancha

Junio 2017/18

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1,3]. **(0,75 puntos)**
b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto (1,3) cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. **(1 punto)**

Septiembre 2017/18

1A. Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t) = at^2\,e^{-bt}$, donde $t \in [0, +\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a, b \in \mathbb{R}^+$.
a) Determina los valores de a y b para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $(2,\ 8e^{-2})$. **(1,5 puntos)**
b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **(1 punto)** **Nota:** A largo plazo se entiende como que $t \to +\infty$.

Septiembre 2017/18

1B. a) Determina razonadamente el punto (x, y) de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$. **(1 punto)**

Junio 2016/17

1A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo [-2, 6]. **(1 punto)**

Junio 2016/17

2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

Junio 2016/17

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2\cos x}$ **(1,25 puntos por límite)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

Septiembre 2016/17

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

JUNIO-2016-1A

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in R$, se pide:

a) Determinar el valor del parámetro $a \in R$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) en su punto de inflexión sea −3. (1,25 puntos)

b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). (1,25 puntos) (Sol.: a) a = 0; b) Mínimo relativo en (0, - 6) y Máximo relativo (-2, -2))

PAEG-Junio-2015 1 A

Dada la función $f(x) = e^{\text{sen } x} + x^2 + ax + b$, a, b Є R:

a) Determina los parámetros a,b Є R sabiendo que la gráfica de f(x) pasa por el punto (0,2) y que en dicho punto tiene un extremo relativo (1,5 puntos) (Sol.: a = -1, b= 1)

b) Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo. (1 punto) (Sol.: (0,2) mínimo)

PAEG-Junio-2015-2 B

Dada la función $f(x) = (x + 1)\, e^{2x}$, se pide:

a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de f(x)

b) Encuentra una primitiva de la función f(x) que pase por el origen de coordenadas

(Sol.: a) Cóncavo $\forall x \in \Re / x > -2$ Convexo $\forall x \in \Re / x < -2$; Punto de inflexión (-2, 1/e^4))

JUNIO-2014-1A

a) Calcula los valores de los parámetros a, b € R para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$ es continua y derivable en x = 0 (1, 5 puntos)

b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0 (1 punto) (Sol.: a) b = - 2, a = 1; b) y = 1 - 2x)

PAEG Junio 2014 1B

a) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 1 + x^2 e^{-x^2}$ (1,5 puntos) b) Calcula las asíntotas de f(x) (1 punto)

(Sol.: a) Decreciente $\forall x \in \Re/(x < -1) \cup (0 < x < 1)$; Creciente $\forall x \in \Re/(-1 < x < 0) \cup (x > 1)$; Mínimo relativo (-1, (e+1)/e) Máximo relativo en (0, 1) Mínimo relativo en (1, (e+1)/e); b) AH y = 1)

Septiembre 2014 1B

Para la función f(x) = $\sqrt{x^2+x+1}$

a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. (UD 3)

b) Estudia si tiene asíntotas oblicuas cuando x →+∞ (Sol.: y = x + ½)

JUNIO 2013 1B

a) Calcula los valores de los parámetros a, b ∈ R para que la función f(x) = $\frac{ax^2+bx}{x+1}$ tenga como asíntota oblicua la recta y = 2x + 3

b) Para esos valores, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisas x=0

SEPTIEMBRE 2010

a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+\operatorname{sen} x}{2x-x^2} & si \quad x<0 \\ bx+c & si \quad 0\leq x<1 \\ \dfrac{1}{x+1} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros a; b; c de R para que f(x) sea una función continua en x = 0, y además sea continua y derivable en x = 1. (2 puntos) (Sol.: a= 1/2; b= -1/4; c=3/4)

PAEG Septiembre 2010 (Reserva) (1 A).

Dada la función f(x) = arctg $\sqrt{x-1}$ definida para $x\geq 1$, se pide: a) Calcula y simplifica f´(x). (1,5 puntos) b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de la función f(x) la recta tangente es horizontal. (1 punto)

Reserva Septiembre 2009 B.

Dada la función f(x) =1/ ln(x), donde ln(x) es el logaritmo neperiano de x,
a) Determina su dominio y sus asíntotas. b) Razona que la función es decreciente en su dominio.

Reserva 2008

Determina los valores de a, b ,c ∈R para que la función f(x) = ax ^{3}+bx + c pase por el punto (2, 8), tenga un mínimo relativo en x = $\sqrt{3}/3$ y además la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x = 1 tenga pendiente 4. Calcular la ecuación de la recta normal a f(x) en el punto de abscisa x = 1.
(Sol.: a = 2, b= - 2, c = - 4; x + 4 y – 15 = 0)

Junio 2008

Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros a, b $\in R$ para que la función f(x) = (x – a) e^x + bx tenga un punto de inflexión en x= 0 y un mínimo relativo en x = 1. (Sol.: a = 2 y b=1)

Septiembre - 2008

Determina los valores de los parámetros a, b $\in$R para que la función
f(x) = $(ax^2 + bx) \cdot e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x = 3 y además pase por el punto (1, -1/e). Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x = 0.

Septiembre- 2008

Dadas las funciones f(x) = ln $(1 – x^2)$ y g(x) = ln $(1 + x^2)$, se pide:
a) Determina el dominio de cada una de ellas.
b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión

Teorema de Rolle

JUNIO 2016 1B.

a) Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. (1 punto)
b) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real. (0,75 puntos)
c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. (0,75 puntos) (Sol.: [-1, 0])

PAEG Reserva 2013 1A.

a) Enuncia el Teorema de Rolle. (1 punto)
b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo (1, 2) donde la recta tangente a la gráfica de la función f(x) = $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. (1,5 puntos)

Junio 2006

Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes f(-2) = f(2) pero no hay ningún valor c $\in$ (-2, 2) tal que f ´(c) = 0. Justifica cada caso por qué no contradice en teorema de Rolle.
a) f(x) = $\frac{1}{x^4}$ b) g(x) = 2 - $|x|$ (Sol.: a) No, no es continua en x = 0; b) No es derivable en x = 0)

Teorema del valor medio de Lagrange

PAEG Reserva 2013 1B.

a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. (1,25 puntos)
b) Calcula un punto del intervalo [-2; 2] en el que la recta tangente a la gráfica de la función f(x) = $x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos (-2; 0) y (2; 12). (1,25 puntos)

PAEG Junio 2010 (Reserva) (1 A).

Dada la función f(x) = $3x^3 - 36x + 2$, se pide:
a) Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. (1 punto)
b) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función f(x) en el intervalo [- 2; 2] y, en caso afirmativo, calcula en qué puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo. (1,5 puntos) (Sol.: a) Máximo (-2, 110), mínimo (2, -34); b) c = 0)

Reserva 2008

Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica. Determina los valores de los parámetros k, p $\in$R para que la función

f(x) = $\begin{cases} \dfrac{k+x}{x-1} & si \quad x \leq 0 \\ e^x + p & si \quad x > 0 \end{cases}$ verifique las hipótesis de dicho teorema en el intervalo [-1,3] (Sol.: k = -2, p = 1)

Problemas de optimización

SEPTIEMBRE 2017 1B.

Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. (2,5 puntos)

SEPTIEMBRE 2016 1A.

Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000m^3 de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que: El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado ¿Qué dimensiones debe tener el depósito? ¿Cuál es el precio de dicho depósito? (2,5 puntos) (Sol.: Mínimo si L = 10 m y H = 10 m; P = 60000 €)

PAEG – Sept.-2015

Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. (Sol.: Trozo1: 72 m L(base) = 18 m)
Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es π r^2.

PAEG Septiembre 2013 1B.

a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
b) Halla el punto de la gráfica de la función f(x) = $x^3 + 3x^2 +1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. (1,5 puntos)

PAEG Reserva 2013 1A.

Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. (2,5 puntos)

Regla de L´Hôpital

PAEG – Sept.-2015 1 A

Calcula los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0} \frac{Ln(1+2x)}{x\, e^{sen\, x}}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}(1+tang\ x)^{\frac{1}{x+sen\, x}}$ (Sol.: a) 2; b) $e^{1/2}$)

PAEG Septiembre 2013 1A

a) Calcula el valor de a ∈ R, a >0, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{ax} & si \;\; x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^{x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en x = 0   b) Calcula el límite: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(Sol.: a) a = 2; b) e^3)

PAEG Reserva 2013 1B

a) Calcula para qué valores del parámetro a ∈ R se verifica la igualdad $\lim_{x\to 0}(\cos\ (ax))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$

b)Calcula el límite $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$ (Sol.: a) a = 2, a = -2; b) 1)

Septiembre 2012 1A

a) Calcula el valor de a ∈ R, a > 0 para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{ax} & si \; x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^{x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en x = 0   (Sol.: a) a = 2; b) e^3)

b) Calcula el límite cuando x tiende a + ∞)

Junio-2008

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ b) $\lim_{x\to\pi/2} \left(\dfrac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$ (Sol.: a) -7; b) $e^{\pi-2/\pi}$)

Reserva 2008

Determina el valor de k ∈ R, k ≠0, para que se cumpla que:

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{kx} - kx - 1}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{8\ sen\ x + 2\ \tan g\ x}{x + sen\ x}$ (Sol.: k = 10)

Septiembre 2006

a) Enuncia la regla de L´Hôpital. b) Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - sen\ x}{tg\ x - sen\ x}$ (Sol: 1/3)

Junio 2003

Enuncia la regla de L´Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{L(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right)$ (Sol.: L = ½)

Junio 2002

Enuncia la regla de L´Hôpital y calcula el siguiente límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{4(x - \ln(1+x))}{x\ \ln(1+x)}$

Junio- 2001

Calcula: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ (Sol.: L = ½)

Unidad 3.1. Integral indefinida.

1. Primitiva de una función. Integral indefinida.

F(x) es primitiva de f(x) si F´(x)=f(x). En general, todas las funciones F(x)+K serán también primitivas.

La integral de una función f(x) es el conjunto de todas sus primitivas y se denota por $\int f(x)dx$ = F(x)+K

K se denomina constante de integración.

Propiedades: 1. $\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; 2. $\int c \cdot f(x)dx = c + \int f(x)dx$

2. Tabla de integrales inmediatas.

Forma sencillo	Forma compuesta
$\int dx = x + K$	$\int k\,dx = k \cdot x + K$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \quad (n \neq -1)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + K$ $(n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + K$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln [f(x)] + K$
$\int e^x\,dx = e^x + K$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + K$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + K$
$\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + K$	$\int f'(x) \cdot \text{sen } f(x)\,dx = -\cos f(x) + K$
$\int \cos x\,dx = \text{sen } x + K$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x)\,dx = \text{sen } f(x) + K$
$\int (1 + \text{tag}^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \text{tag } x + K$	$\int [1 + \text{tag}^2 f(x)] \cdot f'(x)\,dx = \text{tag } f(x) + K$
$\int -(1 + \text{cotag}^2 x)\,dx = \int \frac{-1}{\text{sen}^2 x}\,dx = \text{cotag } x + K$	$\int -[1 + \text{cotag}^2 f(x)] \cdot f'(x)\,dx = \text{cotag } f(x) + K$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctag } x + K$	$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \text{arctag } f(x) + K$
$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \text{arc cotag } x + K$	$\int \frac{-f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \text{arc cotag } f(x) + K$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arc sen } x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \text{arc sen } f(x) + K$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arc cos } x + K$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \text{arc cos } f(x) + K$

3. Método de sustitución.
El método de integración por sustitución consiste en introducir una variable t, que sustituye a una expresión apropiada en función de x, de forma que la integral se transforme en otra de variable t, más fácil de integrar.

Ejemplo: $\int (\ln(x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx$; Hacemos el cambio t=ln(x) , dt=1/xdx → $\int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + k = \frac{(\ln(x))^4}{4} + k$

4. Método de integración por partes.

Del producto de derivadas → d(u·v)=du·v + u·dv → $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

¿Cómo lo aplicamos?

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \text{llamamos } u(x) \text{ a una función que no tenga integral inmediata} \\ \text{llamamos } v(x)dx \text{ al resto de la integral} \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \mathbf{u(x)\,dv(x) = u(x)\,.\,v(x)} - \int \mathbf{v(x)\,du(x)}\,.$$

Nota: Para escoger u(x) se utiliza la regla nemotécnica ALPES

A-Arcos(arccos,…), L- Logaritmos, P – Potencias (x, x^2,…), E – Exponencial (e^x), S – Senos, cosenos

5. Integración de funciones racionales. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

5.1 Si grado P(x)>grado Q(x) → Dividimos P(x) entre Q(x) → P(x)=Q(x)·C(x)+R(x), grado R<grado Q

$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ → $\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$, $\int C(x)$ es inmediata y $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$ es el caso 5.2

5.2 Si grado P(x)<grado Q(x) → Factorizamos el denominador Q(x) y pueden darse 4 casos:

a) **Raíces reales simples** Q(x)=(x-a)(x-b)(x-c) → Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}$

Calculamos los valores de A,B y C haciendo mcm y sustituyendo x=a, x=b, … . Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos.

b) **Raíces reales múltiples** $Q(x)=(x-a)^n$ → Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{C}{(x-a)^n}$

Calculamos los valores de A,B, …, C haciendo mcm y sustituyendo x=a, … . Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos y potencias.

c) **Raíces reales simples y múltiples** $Q(x)=(x-a)(x-b)^n$ →

Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{D}{(x-c)^n}$

Calculamos los valores de A,B,C,…, D haciendo mcm y sustituyendo x=a, x=b,… . Se obtienen integrales inmediatas que dan logaritmos y potencias.

d) **No tiene raíces reales** $Q(x)=x^2+a^2$ (factor irreducible de 2º grado)

Escribimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx}{Q(x)} + \frac{N}{Q(x)}$ → La primera fracción se resuelve con logaritmos.

La segunda fracción hay que expresar Q(x) de la forma $Q(x)=(x-a)^2+b^2=b^2 \cdot ((\frac{x-a}{b})^2 + 1)$ con lo que

$\int \frac{N}{Q(x)} = \frac{N}{b^2} \int \frac{1}{(\frac{x-a}{b})^2+1} dx = \frac{N}{b^2} \cdot arctag\left(\frac{x-a}{b}\right) + k$

Problemas propuestos de la vida real

1.Interpretación física de la integral. Lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0= 20 m/s, desde una altura inicial e_0=25 m. Supongamos que la aceleración de la tierra es constante a=-10 m/s^2. Halla usando integrales la función que proporciona la altura de la pelota en cada instante y calcula el instante en el que la pelota choca con el suelo.

Nota: $v(t) = \int a(t)\, dt$, $e(t) = \int v(t)\, dt$

2.Interpretación de la integral. Un fabricante determina que el coste marginal (también llamado coste instantáneo) de fabricar un cierto producto es $3q^2$-60q+400 € por unidad cuando se producen q unidades. El coste total de producción de las primeras 2 unidades es C_0=900 €. ¿Cuál es el coste total de producción de las primeras 5 unidades?.

Nota: $C'(q) = 3q^2 - 60q + 400 \rightarrow C(q) = \int C'(q)\, dq = \ldots$

3.Interpretación de la integral. Un automóvil viaja en línea recta con una velocidad de 20 m/s, cuando de pronto se ve forzado a frenar para evitar un accidente. Si los frenos comunican al vehículo una desaceleración constante de 8 m/s^2, ¿Qué distancia recorre el automóvil antes de detenerse por completo?.

4.Interpretación de la integral. Se ha estimado que dentro de t meses la población de una cierta ciudad cambiará a una velocidad de $4 + 5 \cdot \sqrt[3]{t^2}$. Si la población actual (t=0) es de 10000 habitantes, ¿Cuál será la población dentro de 8 meses?

5.Interpretación de la integral. Se aplica un nuevo procedimiento médico a un tumor canceroso que tiene un volumen de 30 cm^3, y t días después se determina que el volumen cambia a razón $V'(t)=0{,}15-e^{-0{,}006t}$ cm^3/día.
a) Determina una fórmula para el volumen del tumor después de t días y calcula el volumen a los 60 días.
b) Para que el procedimiento tenga éxito no deben transcurrir más de 90 días para que el tumor comience a disminuir. ¿Tiene éxito el procedimiento?

6.Interpretación de la integral. Una fuerza amortiguadora produce la vibración de un resorte a lo largo del eje OX de modo que la velocidad del resorte en cada instante $t \geq 0$ viene dada por la expresión
$v(t) = 5e^{-t}(\cos(2t) - sen(2t))$. Si la posición del resorte en el instante inicial es x=1, determina la posición en cada instante.

7.Interpretación de la integral. Un vivero pone a la venta un determinado tipo de arbusto después de 6 años de crecimiento. La tasa de crecimiento durante esos 6 años se aproxima por $\frac{dh}{dt} = 1{,}5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. En el momento de plantarlos (t=0), los arbustos tienen una altura de 12 cm. Calcula la altura que tendrán después de t años y la altura cuando se pongan a la venta.

8.Interpretación de la integral. Se le aplica a un paciente una inyección de 0,5 mg/cm^3 de un medicamento. La concentración de ese medicamento en sangre medido en mg/cm^3 disminuye t minutos más tarde a la tasa o velocidad de $C'(t) = \frac{-0{,}01e^{0{,}01t}}{(1+e^{0{,}01t})^2}$.
a) Calcula la concentración C(t) que habrá en cada instante t y la concentración al cabo de 1 y 3 horas.
b) ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que la concentración en sangre sea menor de 0,05 mg/cm^3?.

Ejercicios EvAU

Junio 2022/23

5. *a*) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x=t^6$.

Modelos propuestos Curso 2022/23

6. *a*) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+x-2}dx.$

7. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral:

$$\int \frac{-x+1}{3+x^2}dx\,.$$

Junio 2021/22

3. *b*) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx.$$

El cambio de variable $t=1+3x^2$ te puede ayudar.

Julio 2021/22

2. *b*) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral: $\displaystyle\int x\cdot\cos(2x)dx.$

Junio 2020/21

3. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{3+e^x}dx.$

   (Cambio de variable sugerido: $e^x=t$.)

   b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx.$

Julio 2020/21

3. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int x\cdot cos(3x)dx.$

   b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+1}.$

Septiembre 2016/17

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

Otros propuestos:

PAEG JUNIO 2015 2B.

Dada la función f(x) = (x + 1) . e ^{2x} , se pide: a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de f(x). (1,25 puntos) b) Encuentra una primitiva de la función f(x) que pase por el origen de coordenadas. (1,25 puntos). (Sol.: a) Cóncava (-2, +∞) , convexa (-∞, -2) . P. Inflexión (-2, 1/e^4); b) F(x) = $\dfrac{(2x+1)e^{2x}}{4}-\dfrac{1}{4}$

PAEG SEP-2015

Calcula las integrales

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}(4x^3-\sqrt[4]{x})\,dx$ $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ (Sol.: a) $\dfrac{8}{7}x^3\sqrt{x}-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+k$); b) $\dfrac{x^2}{2}(2Ln\ x-1)+k$)

PAEG SEP-2014

Calcula las integrales

$\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{2}{4+x^2}dx$ (Sol.: I = Ln $\sqrt{e^{2x}-1}$+k; I = arctag $\left(\dfrac{x}{2}\right)+k$

Nota: En la primera integral puede ayudarte hacer el cambio de variable t = e ^{x}

PAEG Reserva 2013 2B

Calcula las siguientes integrales:

$\displaystyle\int \frac{2\cos x}{1+sen^2 x}dx$ $\displaystyle\int (x^2+2x)\ln x\,dx$ (Sol.: I = 2 arctag (sen x) + k; I = $\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2\right)Ln\ x-\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{x^2}{2}+k$)

PAEG Reserva 2013 2A

Calcula las siguientes integrales:

$\displaystyle\int \left(\frac{2\ln x}{x}+\ln x\right)dx$ $\displaystyle\int 3\sqrt{2x+1}\,dx$ (Sol.: I = Ln^2 x + x Ln x – x + k; I = (2x + 1) $\sqrt{2x+1}+k$)

PAEG Junio 2013 2B

Calcula las siguientes integrales:

$\displaystyle\int \frac{2\,sen\,x\cos x}{1+sen^2 x}dx$ $\displaystyle\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}dx$ (Sol.: I = Ln(1 + sen^2 x) + k; I = Ln x + ¼ [Ln I x – 2I – Ln I x + 2 I] +k)

PAEG Septiembre 2013 2A

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral

(Sol.: I = 2 Ln x^2 – 2 $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + k$; I = Ln I e^x - 2 I – Ln I e^x -1 I +k)

PAEG SEPTIEMBRE 2012 2A

Calcula las siguientes integrales

a) $\int sen^2 x \cos x\, dx$ b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ (Sol.: a) I = $\frac{sen^3 x}{3} + k$; b) I = 2 $e^{\sqrt{x}}$+ k)

PAEG RESERVA 2012 2A

Calcula la siguiente integral $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$ (Sol.: I = Ln I x + 1 I – Ln I x I – 2/x +k)

PAEG RESERVA 2012 2A

Encuentra una primitiva F(x) de la función f(x) = (x^2 + 1) e^x tal que F(0) = 5. (Sol.: F(x) = (x^2 -2x + 3) e^x + 2

PAEG JUNIO 2012 2B

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx$ b) $\int (\tan x + \frac{1}{\tan x})\,dx$

PAEG JUNIO 2011 2 A

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (\cos 2x + sen\ x \cos x)\,dx$ b) $\int \frac{x^3-1}{x+2}\,dx$

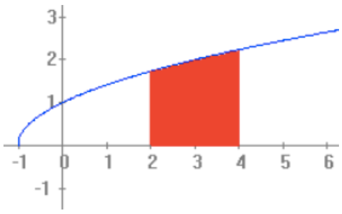
(Sol.: a) I = ½ sen (2x) + ½ sen^2 x + k, b) I= 1/3 x^3 –x^2 + 4 – 9 Ln(x + 2) + k)

Unidad 3.2. Integral definida

Esquema de repaso:

6. Integral definida de una función continua.

Dada una función f(x) continua y positiva en [a,b], llamamos integral definida de f(x) en [a, b] al área de la región limitada por la función f(x) entre las rectas x = a y x = b y el eje OX. Dicha área la representaremos como A=$\int_a^b f(x)dx$. "a" se denomina límite inferior de la integración y "b" límite superior de la integración.



7. Propiedades.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. Si f(x)>0 y continua en [a,b]→ $\int_a^a f(x)dx > 0$
5. $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$; $\int_a^b kf = k\int_a^b f$
6. f(x)≤g(x) continuas → $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

8. Regla de Barrow.

Si f(x) es una función continua en [a,b] y F(x) es una primitiva de f(x) en [a,b], entonces

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

10. Teorema fundamental del Cálculo integral.

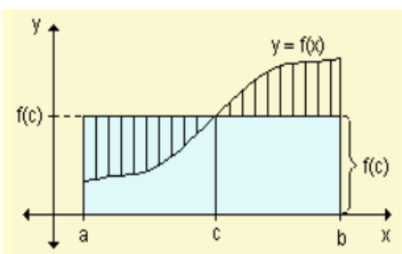
Si f(x) es una función continua en [a, b], y G(x) es la función definida en [a, b] como G(x) = $\int_a^x f(t)dt$, entonces G(x) es derivable en [a, b] y G´(x) = f(x), para todo x∈(a,b).

9. Teorema del valor medio del cálculo integral.

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b], existe, por tanto, un punto c [a, b] de tal modo que

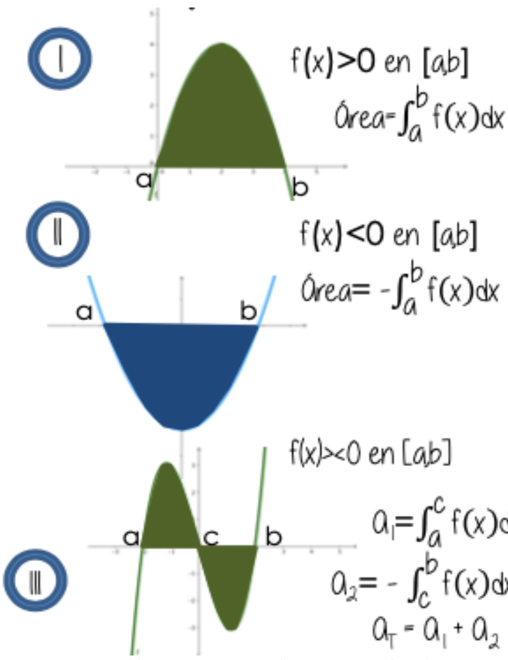
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Interpretación: El área del trapecio mixtilíneo considerando es igual que el área de un rectángulo de la misma anchura cuya altura sea la imagen de un punto que pertenezca al intervalo [a, b]



11. Cálculo del área bajo una curva.

Tres casos:



Pasos: 1) Hallar puntos de corte de f(x) con OX.
2) Estudiar signo f(x) en los intervalos obtenidos.
3) Hacer esbozo, escribir integrales y calcular.

12. Cálculo del área entre 2 curvas.

Pasos a seguir:

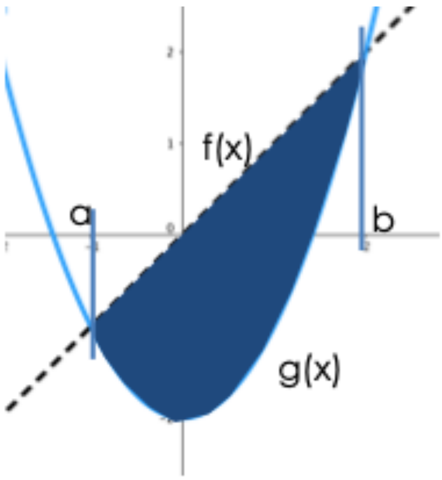
1) Hallar los puntos de intersección entre f(x) y g(x) resolviendo f(x)=g(x).

2) En los intervalos que forman los puntos anteriores estudiar cuál de las 2 funciones está por encima (para ello sustituye un punto intermedio de cada intervalo en cada función a ver cuál tiene más valor).

3) Realiza un esbozo de las funciones (RECOMENDABLE)

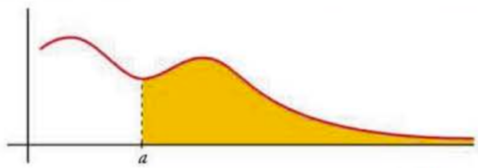
4) El área vendrá dada por A=$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$, siendo f(x) la función que esté por encima.

5) Calcular la integral.



13. Integrales impropias (en recintos infinitos).

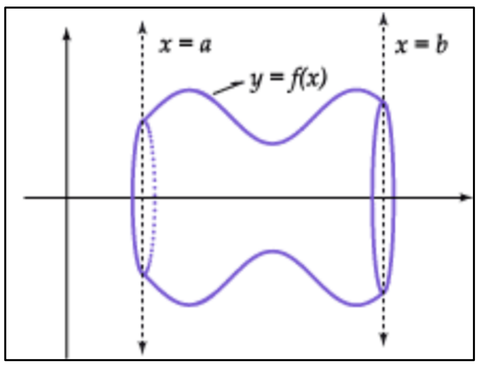
Si $\lim_{x\to\infty} \int_a^z f(t)dt$ existe y es finito, entonces llamaremos integral impropia a $\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^z f(t)dt$



14. Volumen de un cuerpo de revolución mediante una integral.

El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva y=f(x) alrededor del eje OX y limitado por x=a y x=b viene dado por

$$V= \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Problemas propuestos de la vida real

1. Un pozo de petróleo produce 300 barriles de crudo al mes, pero se prevé que se agotará en 3 años. Se estima que dentro de t meses el precio del crudo será p(t)=$18 + 0{,}3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende inmediatamente después de extraerlo del suelo, ¿Cuál será el ingreso total del pozo entre los 0 y los 36 meses?

2. El volumen en litros de aire contenido en los pulmones durante un ciclo respiratorio se aproxima mediante el modelo $V(t)=0{,}1729t + 0{,}1522\,t^2 - 0{,}037t^3$, donde t es el tiempo en segundos. Da un valor aproximado del volumen medio de aire contenido en los pulmones durante un ciclo de 5 segundos.

3. Se introduce una toxina en una colonia de bacterias cuya población actual es de 600000. Las observaciones indican que cada hora nacen 200 bacterias en la colonia y que la fracción de la población que sobrevive durante t horas es $S(t)=e^{-0{,}015t}$. ¿Cuál es la población de la colina después de 10 horas?.

Ejercicios EvAU

Junio 2021/22

3. *a*) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

   a.2) **[1 punto]** Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

5. *b*) **[1,5 puntos]** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = 3/x^2$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

Julio 2021/22

5. *b*) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

Junio 2019/20

5. *a*) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$.

   b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Julio 2019/20

5. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Junio 2018/19

2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. **(1 punto)**

Junio 2018/19

2B. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.
a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

Julio 2018/19

2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x+2)^2 - 4$. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. **(1 punto)**

Julio 2018/19

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Junio 2017/18

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2x\,e^{-x}$ y $g(x) = x^2\,e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**

Junio 2017/18

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2-1)\cos x\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$.

Septiembre 2017/18

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (2x-3)e^{x-1}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Septiembre 2017/18

2A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+a}{x-1} & \text{si } x<0 \\ bx-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x)\,dx = 4$. **(1 punto)**

Junio 2016/17

2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

Septiembre 2016/17

1A. a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x=-3$, $x=2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

Otros ejercicios propuestos:

Andalucía 2023 – Opción A

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x sen(t^2)\,dt$. Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{xF(x)}{sen(x^2)}$

Madrid 2022 Extraordinario – Opción A

Problema 22.9.2 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x = -3$ y $x = -2$.

b) (1,25 puntos) Calcular $\int x f(x)\,dx$.

PAEG JUNIO 2016 2A

Calcula la integral definida $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\, dx$ (Sol.: I = $\frac{\pi}{2} - 1$)
Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variables t = $\sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes

PAEG JUNIO 2016 2B

a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas:
f(x) = $x^2 - 4x + 3$ y g(x) = $-x^2 + 2x + 11$. (1,5 puntos)
b) Calcula c ∈ R para que las rectas tangentes a las gráficas de f(x) y g(x) en el punto de abscisa x = c tengan la misma pendiente. (1 punto) (Sol.: a) A = 112/3 u^2; b) c = 3/2)

PAEG SEPTIEMBRE 2016 2A

Dada la función g(x) = (x + b) cos x, b ϵ R
a) Calcula la primitiva G(x) de g(x) que verifica que G(0) = 1
b) Calcula el valor de b ϵ R sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2$
(Sol.: a) G(x) = (x + b) sen x + cos x; b) b = -1)

PAEG SEPTIEMBRE 2016 2B

Dadas las funciones f(x) = $\frac{2}{x}$ y g(x) = 3 – x, se pide:
a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de f(x) y g(x) (0,5 puntos)
b) Calcular el área de la región anterior. (2 puntos) (Sol.: b) A = (3/2 – Ln 4) u^2)

PAEG JUNIO 2015 2A

Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & si \quad -2 \leq x < 0 \\ (2 - x)^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Esboza la región encerrada entre la gráfica de g(x) y el eje de abscisas. (0,5 puntos)
b) Calcula el área de la región anterior (2 puntos) (Sol.: A = 16/3 u^2)

PAEG SEPTIEMBRE 2015 2A.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) = x^2 en el punto de abscisa x = 2. (0,5 puntos)
b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de f(x), la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas. (0,5 puntos)
c) Calcula el área de la región anterior. (1,5 puntos) (Sol.: c) A = 14/3 u^2)

PAEG SEPTIEMBRE 2014 2A

a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones f(x) = sen x, g(x) = - sen x, y rectas x = π / 2 y x = 3π / 2. (0,5 puntos)
b) Calcula el área de la región anterior. (2 puntos) (Sol.: A = 4 u^2)

Unidad 4. Matrices. Determinantes.

1. Definición de Matriz.

Se denomina matriz de orden o dimensión m x n a todo conjunto cuyos elementos están dispuestos en m filas y n columnas. La representaremos por A = $(a_{ij})_{mxn}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{21} elemento que esta en la fila 2 columna 1

2. Tipos de matrices.

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ CUADRADA matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.

MATRIZ IDENTIDAD O UNIDAD matriz cuadrada donde los elementos de la diagonal principal son unos y el resto ceros.

MATRIZ FILA matriz que solo tiene una fila.

MATRIZ COLUMNA matriz que solo tiene una columna.

MATRIZ NULA todos sus elementos valen cero.

MATRIZ TRASPUESTA DE A, es otra matriz A^t que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

MATRIZ SIMÉTRICA es una matriz cuadrada cuyos elementos a ambos lados de la diagonal principal son iguales. $A=A^t$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA, matriz cuadrada en la que los elementos a ambos lados de la diagonal principal son opuestos (iguales pero con distinto signo). Los elementos de la diagonal principal deben ser cero. $-A=A^t$

MATRIZ DIAGONAL matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son cero.

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR (INFERIOR) todos los elementos por debajo (encima) de la diagonal principal son cero.

3. Operaciones con matrices.

-Suma. Tienen que tener la misma dimensión. $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ → $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

Propiedades: Conmutativa, Asociativa, E.Neutro (A+0=0+A) y E. Opuesto (A+(-A)=(-A)+A=0)

-Multiplicación de un nº por una matriz. $A=(a_{ij})$ → $k{\cdot}A=(k{\cdot}a_{ij})$

Propiedades: $k{\cdot}(A+B)=kA+kB$, $(k+t){\cdot}A=kA+tK$, $(k{\cdot}t){\cdot}A=k{\cdot}(t{\cdot}A)$, $1{\cdot}A=A$

-Multiplicación de matrices. Para multiplicar 2 matrices el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda. $A=(a_{ij})_{mxn}$, $B=(b_{ij})_{nxp}$ → $A{\cdot}B=(c_{ij})_{mxp}$, $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overset{\text{1ª FILA POR 1ªCOLUMNA}}{2\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot3} & \overset{\text{1ª FILA POR 2ªCOLUMNA}}{2\cdot1+1(-2)+(-1)0} & \overset{\text{1ª FILA POR 3ªCOLUMNA}}{2(-1)+1\cdot2+(-1)(-1)} \\ \underset{\text{2ª FILA POR 1ªCOLUMNA}}{0\cdot0+3\cdot1+(-2)\cdot3} & \underset{\text{2ª FILA POR 2ªCOLUMNA}}{0\cdot1+3(-2)+(-2)0} & \underset{\text{2ª FILA POR 3ªCOLUMNA}}{0(-1)+3\cdot2+(-2)(-1)} \end{pmatrix}$$

Propiedades: **No se cumple conmutativa A·B≠B·A**, Si cumple Asociativa, Distributiva suma y E.Neutro.

-Potencia de una matriz. $A^2=A{\cdot}A$, $A^3=A^2{\cdot}A$, …, $A^n=A^{n-1}{\cdot}A$

4. Propiedades de la matriz traspuesta.

Se llama matriz trapuesta (A^t) a la que se obtiene de cambiar las filas por las columnas o al revés.

Propiedades:

1) $(A^t)^t = A$
2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
3) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
4) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ **(Cuidado, cambia el orden)**

5. Rango de una matriz.

El rango de una matriz A, rg(A), es el número de filas o de columnas no nulas linealmente independientes que tiene la matriz.

Método de Gauss: consiste en convertir la matriz inicial en una matriz triangular superior cuyos elementos por debajo de la diagonal sean ceros, utilizando las transformaciones elementales adecuadas. El rango de la matriz será el número de filas no nulas que tiene la matriz triangular que hemos obtenido.

6. Determinantes.

DETERMINANTES 2X2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

DETERMINANTES 3X3 – REGLA DE SARRUS

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + dhc) - (ceg + bdi + fha)$$

Propiedades:

1) $|A| = |A^t|$

2) Si permutamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

3) Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz por un número, su determinante queda multiplicado por dicho número.

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

4) Si una matriz tiene 2 filas o 2 columnas iguales su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

5) Si una matriz tiene una fila o columna nula su determinante es 0.

6) Si 2 filas o 2 columnas son proporcionales su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

7) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

8) Si todos los elementos de una línea están formados por 2 sumandos, su determinante se descompone en la suma de 2 deter. con esos sumandos.

$$\begin{vmatrix} a+3 & 4 \\ b+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 \\ b & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

9) Si a una línea se le suma una combinación lineal de otras líneas paralelas su determinante no varía.

10) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ // 11) Si una matriz tiene una línea que es C.Lineal de las otras paralelas entonces su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Matriz inversa. Propiedades.

La matriz inversa de una matriz cuadrada A de orden n es otra matriz A^{-1} del mismo orden que cumple:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

Las matrices que tienen matriz inversa se llaman **regulares o invertibles**, y las que no la tienen, matrices **singulares**. Una matriz cuadrada de orden n solo tiene inversa si r(A) = n.

Propiedades:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$ 2) $(k\cdot A)^{-1}=\frac{1}{k}\cdot A^{-1}$ 3) $(A\cdot B)^{-1}= B^{-1}\cdot A^{-1}$ **(Cuidado, cambia el orden)**

4) $I^{-1} = I$ 5) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ 6) $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ 7) $|A^{-1}| = 1/|A|$

8. Formas de calcular la matriz inversa.

1º) Método de Gauss $\boxed{(A|I)\xrightarrow{GAUSS}(I|A^{-1})}$ 2º) Aplicando la definición $A\cdot A^{-1}=I$ (con sistema ecuaciones)

3º) **Usando determinantes** Si $|A|\neq 0 \rightarrow A^{-1}=\dfrac{Adj(A^t)}{|A|}$

- Menor complementario de a_{ij} → que se obtiene de quitar fila i y columna j
- Adjunto de a_{ij} → $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot \alpha_{ij}$
- Matriz Adjunta → $Adj = (A_{ij})$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$

SIGNOS: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

MATRIZ ADJUNTA $Adj(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Ejemplo: Calculamos la inversa de A

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 5+12+12 - (-30-2+12) = 29 - (-20) = 49 \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Cálculo del determinante usando los adjuntos

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 4\cdot A_{31} = 1\left(+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) + 0\left(-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) + 4\left(+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = 3+0+(-28) = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot A_{31} + (-1)\cdot A_{32} + 1\cdot A_{33} = 4\left(+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) + (-1)\left(-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right) + 1\left(+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = -28+2+1 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-25) = -25$$

DESARROLLARLO POR UNA LÍNEA Y SUS ADJUNTOS.

Ejemplo cálculo determinante de matriz 4x4 haciendo 0 en la 2ª fila (sumando C.Lineal de 1ª columna)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot A_{21} =$$

$$= (-1)\cdot\left(-\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}\right) = (32-20-2)-(-4-16+20) = 10-0 = 10$$

10. Rango de una matriz por determinantes

El rango de una matriz A será el orden (dimensión) de la mayor submatriz con determinante no nulo.

Empezaremos probando con el determinante de la mayor submatriz y si sale 0, iremos probando con determinantes de submatrices más pequeñas.

11. Ecuaciones matriciales.

Las resolveremos de la siguiente forma:

ECUACIONES MATRICIALES

$AX=B$, $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot B$, $X=A^{-1}\cdot B$

$XA=B$, $XAA^{-1} = BA^{-1}$, $X = BA^{-1}$

$AX+B=C$, $AX=C-B$, $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}(C-B)$, $X = A^{-1}(C-B)$

Importante: Producto matrices no es conmutativo

Problemas propuestos de la vida real

1. Suma y resta matrices. El número de coches de vendidos por dos marcas M_1 y M_2 de combustión (gasolina y diesel) y eléctricos durante 2022 y 2023 viene dado por las siguientes matrices A y B.
a) Calcula el número total de coches de cada marca vendidos en los dos años según su combustible.
b) ¿Se puede afirmar que la disminución de ventas de vehículos de combustión se ve compensada con el auge del número de vehículos eléctricos vendidos entre estos dos años?.

Año 2022

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & E \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 6400 & 900 \\ 4000 & 250 \end{pmatrix} \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \end{array}$$

Año 2023

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & E \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 5300 & 950 \\ 3200 & 280 \end{pmatrix} \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \end{array}$$

2. Producto de una matriz por un número real. Los costes de fabricación y el precio de venta de tres tipos de raquetas durante el año 2022 viene dado por la matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 60 & 65 & 70 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textit{Coste Fabricación} \\ \textit{Precio de venta} \end{array} \end{array}$$

Si durante el año 2023 se espera un incremento del 2% tanto en el coste de fabricación como en el precio de venta, expresa mediante matrices ese aumento.

3. Producto de matrices. Durante un viaje a Tenerife, un grupo de 10 chicas y 12 chicos deciden alquilar hoveboard, patinetes y bicis. Las siguientes matrices representan la distribución de vehículos alquilados por chico/a y el precio de cada uno en tres empresas de alquiler:

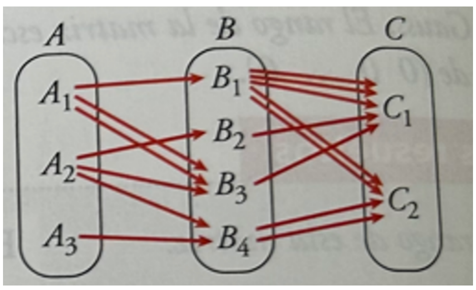
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} H & P & B \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textit{Chicas} \\ \textit{Chicos} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 15 & 13 & 12 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textit{Hoverboard} \\ \textit{Patinetes} \\ \textit{Bicis} \end{array} \end{array}$$



Calcula mediante matrices el precio total de cada vehículo para las chicas y para los chicos.

4.Interpretación de matrices. En un país A hay tres aeropuertos A_1, A_2 y A_3. En un país B hay cuatro aeropuertos B_1, B_2, B_3 y B_4. En un país C hay dos aeropuertos C_1 y C_2. El siguiente esquema representa las posibles comunicaciones que hay entre aeropuertos un cierto día de la semana.



a) Representa una matriz "M" que indique el número de vuelos entre A y B, y otra matriz "N" que indique el número de vuelos entre B y C.

b) Utilizando el producto de matrices, calcula una matriz que represente el número de combinaciones de vuelos que hay para ir de cada aeropuerto de A hasta cada aeropuerto de C, pasando por B.

5. Interpretación de matrices. La siguiente matriz representa entre que ciudades hay vuelos que comuniquen Madrid, Sevilla, Palma y Barcelona. Los “1” indican que hay un vuelo entre las ciudades.

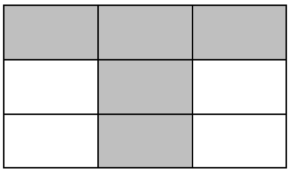
$$A = \begin{array}{c} \\ M \\ S \\ P \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M & S & P & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Expresa mediante una matriz el número de vuelos que hay entre estas ciudades que tienen 1 escala intermedia (Nota: Calcula A^2)

b) Expresa mediante una matriz el número de vuelos que hay entre estas ciudades que tienen 2 escalas intermedias (Nota: Calcula A^3)

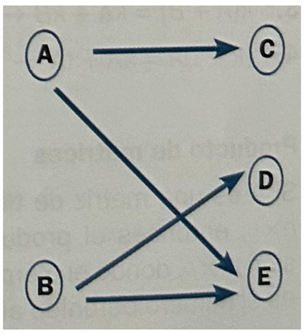
6. Interpretación gráfica de matrices. Queremos digitalizar la letra T de la figura del margen. Tienes una tabla que te indica la conversión de los colores a números.

a) Escribe la matriz que representa la fotografía digital de la letra T.
b) Encuentra una matriz que al sumarla te permita ajustar el contraste de gris oscuro a negro y de blanco a gris claro.
c) Encuentra una matriz que te permita cambiar de negro a gris claro y el resto de gris claro a gris oscuro.



Blanco	Gris Claro	Gris Oscuro	Negro
0	1	2	3

7.Interpretación de grafos y matrices. Tenemos un **grupo1** con dos personas A y B que han contraído una enfermedad. Tenemos un **grupo 2** con tres personas C, D y E que han estado en contacto directo con el grupo 1 de acuerdo con el grafo de más abajo. Finalmente tenemos un grupo 3 con cuatro personas F, G, H y J que han mantenido contacto directo con el grupo 3 de acuerdo con los elementos de la siguiente matriz T.



$$T = \begin{array}{c} \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F & G & H & J \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Representa el grafo que conecta los 3 grupos.
b) Obtén la matriz M que representa el grafo de los grupos 1 y 2.
c) Calcula el producto de las matrices M·T e interpreta que quiere decir el resultado obtenido.

Ejercicios EvAU

Junio 2022/23

1. Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, con\ a, b, c \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

   a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que $A \cdot X = B$.

   b) **[1 punto]** Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

5. *b)* **[1,5 puntos]** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

8. *a)* **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

Modelos propuestos Curso 2022/23

6. *b)* **[1,5 puntos]** Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

8. *b)* **[1,25 puntos]** Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

   Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

5. *b)* **[1,25 puntos]** Estudia qué relación tiene que haber entre a y b, con $a, b \in \mathbb{R}$, para que la siguiente matriz tenga inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ a & b & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.

b) **[1,5 puntos]** Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Junio 2021/22

1. *a*) **[1,5 puntos]** Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, que verifican que $AX = XA$.

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

6. *a*) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

Julio 2021/22

3. *b*) **[1 punto]** Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}.$$

7. *a*) **[1,5 puntos]** Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Junio 2020/21

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el determinante de $A^{\top}$, es decir, la matriz traspuesta de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

Julio 2020/21

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

Junio 2019/20

1. *a*) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Julio 2019/20

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

Junio 2018/19

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X-2B=C$. **(1,5 puntos)**

Julio 2018/19

3B. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Para $a=1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X\cdot A=B-X$. **(1,5 puntos)**

<u>Otros ejercicios propuestos:</u>

Madrid 2023 Opción B

Problema 23.2.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^tB=C$.

b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m=0$ la inversa de AC.

c) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2=B-I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Andalucía 2023 Opción B

<u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para que valores de m tiene inversa de la matriz A?
b) **[2 puntos]** Para todo $m\neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX+X=B$.

Madrid Junio 2022 – Opción B

Problema 22.6.1 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) (1,5 puntos) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

Junio 2017/18

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**
c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

Septiembre 2017/18

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$. **(1,25 puntos)**
b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$. **(1,25 puntos)**

Junio 2016/17

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. **(1,5 puntos)**

Septiembre 2016/17

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1}. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. **(1,5 puntos)**

PAEG JUNIO 2010 3B.

Consideremos las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$

Determina los valores a; b; c $\in$ R de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que A · B = B · A. (2,5 puntos) (Sol.: (a, b, c) = (1, -2, 4)

PAEG JUNIO 2011 - 3A

Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide :

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde n $\in$ N. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B) (Sol.: X = $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; b) B^n = I si n es par; B^n = B si n es impar)

JUNIO 2008

Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

Encuentra la expresión general de la potencia n-ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.

Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier n $\in$ N, n $\geq$1, y calcula dicha matriz inversa. (NO)

(Sol.: a) A^n = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) r(A) = 3)

SEPT. 2007

Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

Resuelve la ecuación matricial: A . X + X = B, donde X es una matriz de orden 2x2. (NO)

Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2x2

(Sol.: b) X = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$; Y = $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$)

PAEG SEPTIEMBRE 2016 3A

Dadas las matrices

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ y D = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz X para poder efectuar el producto matricial A · X · B?

(0,5 puntos)

b) Despeja X en la ecuación matricial A · X · B + C = D (1 punto)

c) Calcula la matriz X (1 punto) **(Sol.: a) X del orden 2 x 3· b) X = A^{-1} (D – C) B^{-1}; c) X = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$)**

PAEG JUNIO 2016 3B Sabiendo que

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$, donde x, y, z, a, b, c ϵ R, calcula los determinantes

$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. (1,25 puntos por determinante) **(Sol.: a) 14; b) - 150)**

PAEG SEPTIEMBRE 2015

a) Despeja X en la ecuación matricial A · X – A = 2 A^2 , donde A y X son matrices cuadradas de orden 3 (1 punto)

b) Calcula X, siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1 punto)

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000} (0,5 puntos)

(Sol.: a) X = 2A + I ; b) X = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; c) I A I = -1; I$A^{101}$I = I A I^{101} = $(-1)^{101}$ = -1; IA^{1000}I = 1)

42.- PAEG JUNIO 2014

a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^T|$, $|A^3|$ (1 punto)

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ (1,5 puntos) (Sol.: a) 5, 1/5, 5, 125; b) -6, -800)

PAEG JUNIO 2015

a) Despeja X en la ecuación matricial X · A + B = X, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. (1 punto)

b) Calcula X, siendo: A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1,5 puntos)

(Sol.: a) X = B (I – A)$^{-1}$ **; b) X =** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$**)**

PAEG SEPTIEMBRE 2014 3B

Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que sean soluciones del sistema matricial

$\begin{cases} 2A + B = C^2 \\ A - B = C^{-1} \end{cases}$ siendo C = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ **(Sol.:** A = $\begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 17/3 & 4 \\ 8/3 & 11 \end{pmatrix}$**)**

PAEG SEPTIEMBRE 2014 3A

a) Discute, en función del parámetro m Є R, el rango de la matriz

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

b) ¿Para qué del parámetro m Є R existe la matriz inversa de A? (0,5 puntos)

(Sol.: a) m ≠ 0, 6 R = 3; m = 0 m = 6 , R =2; b) m ≠ 0, 6 existe A^{-1})

Unidad 5. Sistemas de ecuaciones

1. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones. Dado sistema de m ecuaciones con n incognitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de las incógnitas:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz de los términos independientes:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

El sistema se puede expresar como **A·X=B**

Si B=0 se dice que el sistema es **homogéneo**.

Si algún $b_i \neq 0$, se dice **no homogéneo**.

2. Tipos de sistemas según su solución

- **Sistema Compatible Determinado (SCD)**. Tiene una única solución.

- **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)**. Tiene infinitas soluciones.

- **Sistema Incompatible (SI)**. No tiene ninguna solución.

3. Métodos para resolver un sistema

1) **Método de Gauss**. Transformar el sistema en otro sistema escalonado equivalente.

2) **Método matricial, cuando A es cuadrada.**

Si $|A|\neq 0 \rightarrow$ Existe $A^{-1} \rightarrow A\cdot X=B \rightarrow$

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow X= A^{-1}\cdot B$

3) **Regla de Cramer para SCD**.

$$x=\frac{|B \quad C2 \quad C3|}{|A|} \quad y=\frac{|C1 \quad B \quad C3|}{|A|} \quad z=\frac{|C1 \quad C2 \quad B|}{|A|}$$

4. Teorema de Rouché-Frobenius. Dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incognitas, siendo A la matriz de coeficientes y A*=(A|B) la matriz ampliada, se cumple:

rag(A) = rag(A*) = n (nº incognitas) → SCD (1 solución)

rag(A) = rag(A*) < n (nº incognitas) → SCI (infinitas soluciones)

rag(A) ≠ rag(A*) → SI (1 no tiene solución)

5. Discusión de un sistema en función de un valor k.

1) Estudiamos el rag(A). Para ello vemos cuando |A|=0 → Obteniendo valores a, b, c donde vale 0.

2) Si k≠a, b, c → |A|≠0 → rag(A)=rag(A*)=n → SCD (1 solución) → Resolver por Cramer sin sustituir k.

3) Si k=a → Estudiar rag(A) que es <n y rag(A*) y aplicar el T.Rouché-Frobeinus.

Si k=b → Idem, Si k=c → Idem …

Problemas propuestos de la vida real

1. Mat.Aplic.CCSS – Julio 2023. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40 % de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 p)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 p)

2. Mat.Aplic.CCSS – Julio 2023. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.
a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

3. Mat.Aplic.CCSS – Junio 2023. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron (0.75 p)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Mat.Aplic.CCSS – Junio 2023. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenia para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10 % de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

5. Mat.Aplic.CCSS – Julio 2022. El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cu´antos premios Goya han recibido cada una. (0.75 p)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Ejercicios EvAU

Modelos propuestos Curso 2022/23

1. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +ay & +z & = 2 \\ x & & +z & = a \\ ax & +2y & +z & = 3 \end{array}\right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

2. En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con el número de centrocampistas menos el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas.

a) **[1,5 puntos]** Escribe el sistema de ecuaciones lineales necesario para calcular el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.

b) **[1 punto]** Explica razonadamente cuántas soluciones tiene este sistema. Obtén la solución (o soluciones) del mismo.

Junio 2021/22

2. *a*) **[1,5 puntos]** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

Julio 2021/22

1. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +3z & = a+1 \\ ax & & +z & = 0 \\ x & +y & +2z & = 1 \end{array}\right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

Junio 2020/21

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = a+1 \\ a \cdot x & & +z & = a-1 \\ x & -y & +z & = 3 \end{array}\right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

Julio 2020/21

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +ay & +z & = 2 \\ x & & +z & = a \\ ax & +2y & +z & = 3 \end{array}\right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Junio 2019/20

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llll} ax & -ay & -z & = a \\ ax & -ay & & = a \\ ax & +2y & -z & = 1 \end{array}\right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Julio 2019/20

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +az & = a \\ x & +ay & +2z & = a \\ -x & +y & +z & = 1 \end{array}\right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Junio 2018/19

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + 2y & = & a^2 \\ -x + y + z & = & 5 \\ x - ay - z & = & -(4+a) \end{array}\right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

Julio 2018/19

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcl} x - (a-2)y - z & = & 1 \\ x - 2y + z & = & -4 \\ x - 3y + az & = & -a^2 \end{array}\right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. **(1 punto)**

Otros ejercicios propuestos:

Andalucía 2023 – Opción B

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**
Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Madrid 2022 Extraordinaria – Opción B

Problema 22.10.1 *(2,5 puntos)* Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

Junio 2017/18

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & az & = & 4 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ x & + & 4y & - & 5z & = & 6 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. **(1 punto)**

Septiembre 2017/18

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & -4 \\ x & - & 4y & - & 3z & = & a^2-3 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$. **(1 punto)**

Junio 2016/17

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & - & y & + & z & = & a-4 \\ 2x & + & y & - & az & = & a-1 \\ & & y & - & z & = & -3 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. **(1 punto)**

Septiembre 2016/17

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. **(1 punto)**

PAEG SEPTIEMBRE 2016 3B

a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius (0,5 puntos)
b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser C. Determinado (
c) Determina para qué valores del parámetro a ϵ R el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + 3y - z + 2t & = & 2 \\ 5x + y + 2z & = & 1 \\ x + 8y - 5z + 6t & = & a \end{array}\right.$$ es incompatible (1,5 puntos)

PAEG JUNIO 2016 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m ∈ R

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - y + m\,z & = & 0 \\ 4x - 3y + 2z & = & m \\ -mx + y - z & = & 1 - m \end{array}\right.$$ (1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

(Sol.: a) m ≠ 1 SCD; m = 1 SCI; b) (x, y, z) = (1 + μ, 1+2μ, μ)

PAEG SEPTIEMBRE 2015 3A.

a) Enuncia el Teorema de Rouche-Frobenius. (0,5 puntos)
b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{lcl} x + 3y - 3z & = & 4 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ 3x + 2y - az & = & 5 \end{array}\right.$ no es incompatible para ningún valor a $\in \mathfrak{R}$. (1 punto)
c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)
(Sol.: a) Teorema de Rouche-Fröbenius Un sistema de ecuaciones lineales, S, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada A/B; es decir: S es compatible ⇔ rang (A) = rang (A/B); b) a ≠ 2 SCD; si a = 2 SCI; Sistema Compatible ∀ a $\in \mathfrak{R}$)

PAEG JUNIO 2015

He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.
a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es x, la de las decenas y, y la de las unidades z, puede expresarse como 100x + 10y + z. (1,5 puntos)
b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado. (1 punto)
(Sol.: b) SCD c) 543)

PAEG JUNIO 2014

a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-2y+3z &= 4 \\ 2x-y+z &= 8 \\ x-5y+az &= 4 \end{cases}$$

con a ∈ R es compatible indeterminado. Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro (2 puntos)

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que x = y (0,5 puntos)

(Sol.: a) Si a = 8 SCI (4 + μ, 5 μ; 3 μ); b) μ=1 (5, 5, 3) y si μ = 3 (5, 5, 3))

PAEG RESERVA-2013 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m número real.

$$\begin{cases} 2y-z &= m \\ 3x-2z &= 11 \\ y+z &= 6 \\ 2x+y-4z &= m \end{cases}$$

b)Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado (1 punto)

(Sol.: a) Si m = 6; SCD; m ≠ 6 SI; b) m = 6 SCD (5, 4, 2)

PAEG-RESERVA-2013

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ -4x-2y+mz &= 0 \\ 3x+y+2z &= 0 \end{cases}$$

a) Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible? (0,5 puntos)

b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial

x = y = z = 0. (1 punto)

c) Resuelve el sistema para todos los valores de m de R. (1 punto)

(Sol.: a) Nunca puede ser incompatible. B) Si no tiene solución trivial SCI R(A) ≤ 2, si m= -1 SCI,

(-3μ, 5 μ, 2 μ); c) m ≠ -1, SCD y tiene la solución trivial)

PAEG-SEPTIEMBRE-2013 3B

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m número real.

$$\begin{cases} x+y-5z &= -1 \\ 2x-y-3z &= 1-m \\ x-2y+2z &= m \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado (1 punto)

PAEG JUNIO-2012 3A

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro m € R

$$\begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ x+2y+3z & = & 0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z & = & m-2 \\ 3x+(m+3)y+4z & = & m-2 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado (1 punto)

Unidad 6 - 7. Vectores. Puntos, rectas y planos en el espacio. Problemas métricos.

Esquema de repaso:

1. Vector en el espacio.

- Llamaremos **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ al segmento orientado de origen A y extremo B

- Diremos que 2 vectores son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

- Llamaremos **vector libre** $\vec{v}$ al conjunto de todos los vectores equipolentes.

- Las **coordenadas del vector** $\overrightarrow{AB}$ se calculan haciendo B-A = $(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$.

2. Vectores L.Dep/Independientes.

- Un vector $\vec{w}$ se dice que es **C.Lineal** de un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_2\}$ si es posible encontrar números reales $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tal que $k_1u_1+k_2u_2+\ldots+k_nu_n = 0$.

- Un conjunto de vectores son **L.Dependientes** si cualquier de ellos se puede poner como C.Lineal de los demás.

- Un conjunto de vectores son **L.Independientes** si ninguno se puede expresar como C.Lineal de los demás.

¿Cómo saber cuales son L.Independientes?.

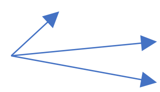
Para determinar la dependencia lineal de un grupo de vectores, los colocamos como filas de una matriz A. El rango de esa matriz es el número vectores L.Independientes.

Si $|A|\neq 0$ → Son todos L.Independientes.

Observación:

- Tres vectores son L.Dependientes si son paralelos (están en el mismo plano: coplanarios).

- Tres vectores son L.Independientes si están en planos distintos.



3. Base en el espacio. Coordenadas de un vector

- Una **base en el espacio** es un conjunto de 3 vectores L.Independientes entre sí de forma que cualquier vector se puede expresar como C.Lineal de ellos.

- Si 3 vectores son perpendiculares se dice que forman una **base ortogonal**. Si además tienen módulo 1 forman una **base ortonormal**.

- La **base canónica** es $\vec{\imath}(1,0,1)$, $\vec{\jmath}(0,1,0)$, $\vec{k}(0,0,1)$

- Dada la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, cualquier vector $\vec{p}$ se expresa de forma única como $\vec{p}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$. Diremos que (a,b,c) son las **coordenadas de $\vec{p}$ respecto a esa base.**

4. Producto escalar.

- Producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

- Expresión analítica $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

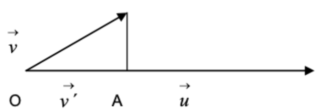
- Módulo de $\vec{u} \to |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

- Ángulo de 2 vectores $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

- Interpretación geométrica del producto escalar: Producto escalar es el producto del módulo de un vector por el módulo de la proyección del otro v´

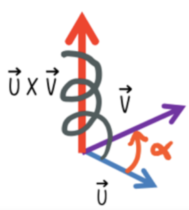
$|\vec{v}'| = |\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

- $\vec{u}\perp\vec{v} \leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$



5. Producto vectorial.

- El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{u}x\vec{v}$ perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de sentido igual al avance de un sacacorchos al girar de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ y de módulo $|\vec{u}x\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.



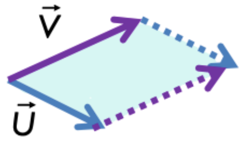
- Expresión analítica:

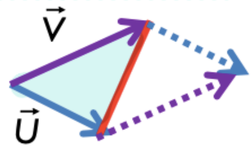
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

6. Aplicaciones del producto vectorial. Propiedades.

Área de un paralelogramo $= |\vec{U} \times \vec{V}|$

Área de un triángulo $= \dfrac{|\vec{U} \times \vec{V}|}{2}$





Propiedades

1) $\vec{u} x \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} = 0$ ó $\vec{v} = 0$ ó $\vec{u} = k\vec{v}$ (paralelos) // 2) Anticonmutativa $\vec{u} x \vec{v} = -\vec{v} x \vec{u}$ // 3)Distributiva

4) $k(\vec{u} x \vec{v}) = (k\vec{u}) x \vec{v} = \vec{u} x (k\vec{v})$ // 5) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a $\vec{u} x \vec{v}$

7. Producto mixto.

Producto mixto a $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} x \vec{w})$

Expr.analítica $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

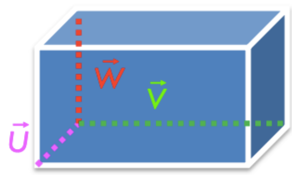
Propiedades

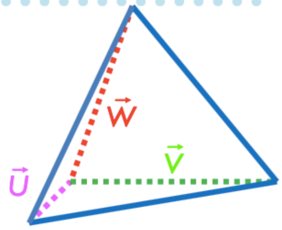
1) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ (Propiedad Deter)
2) 3 vectores L.Dep (coplanarios) → su producto mixto es 0.

Interpretación geométrica:

VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO $|[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}]|$

VOLUMEN DE UN TETRAEDRO $\dfrac{|[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}]|}{6}$





8. Ecuaciones de la recta en el espacio.

Punto $A(x_0, y_0, z_0)$ Vector director $\vec{v}\,(v_1, v_2, v_3)$

Si no tienes el vector, con dos puntos de la recta puedes hallarlo $\overrightarrow{AB}$

ECUACIÓN VECTORIAL $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad t \in \mathbb{R}$

Igualdad de vectores

ECUACIÓN PARAMÉTRICA $\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

PARA OBTENER PUNTOS DE LA RECTA BASTA CON QUE DES VALORES A LA t

Despejo t e igualo

ECUACIÓN CONTINUA $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}$

Tres puntos A, B y C están alineados si $rag\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 1$

Igualo dos a dos para obtener las dos ecuaciones

ECUACIÓN IMPLÍCITA $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$

RESUELVE EL SISTEMA PARA HALLAR PUNTOS DE LA RECTA (RECUERDA QUE ES S.C.I. – 1 PARÁMETRO)

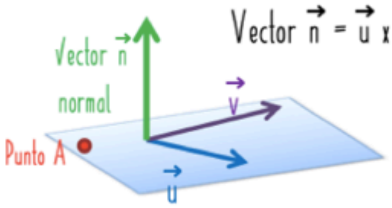
9. Ecuaciones del plano en el espacio.

Punto $A\,(x_0, y_0, z_0)$ Dos vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

ECUACIÓN VECTORIAL $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (u_1, u_2, u_3) + s \cdot (v_1, v_2, v_3)$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA $\begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3 \end{cases}$

Vector $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$



ECUACIÓN IMPLÍCITA

$Ax + By + Cz = D$

Vector $\vec{n} = (A, B, C)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación conocido punto P(x_0,y_0,z_0) y vector normal $\vec{n}(a, b, c)$
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Obs: 4 puntos A,B,C y D coplanarios → $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$

10. Posición relativa de 2 rectas el espacio.

- Posibles posiciones: Coincidentes Paralelas Secantes Se cruzan

- <u>Estudio mediante vectores directores y puntos que las determinan</u>. r:<A, $\vec{u}$> , s:<B, $\vec{v}$>

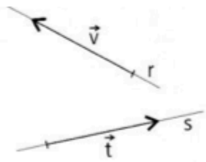
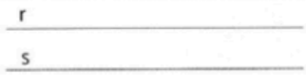
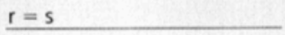
  I. Si $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ → Coincidentes (si A pertenece a s) y paralelas (si A no pertenece a s)

  II. Si $\vec{u}$ no es paralelo a $\vec{v}$ → Se cortan si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son L.Dep → det($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$) = 0

  Se cruzan si det($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$) ≠ 0

- <u>Estudio con los rangos a partir de vectores directores y puntos</u>

r:<A, $\vec{u}$> , s:<B, $\vec{v}$> → $M=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$ $M/N=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & a_1-b_1 \\ u_2 & v_2 & a_2-b_2 \\ u_3 & v_3 & a_3-b_3 \end{pmatrix}$

rang (M) = 2 y rang (M/N) = 3	Las rectas se cruzan.	
rang (M) = 2 = rang (M/N)	Las rectas se cortan en un punto.	
rang (M) = 1 y rang (M/N) = 2	Las rectas son paralelas.	
rang (M) = 1 = rang (M/N)	Las rectas son coincidentes.	

- <u>Estudio con rangos con rectas con ecuación en forma implícita</u>

$$r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D = 0 \\ A'x+B'y+C'z+D' = 0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} A''x+B''y+C''z+D'' = 0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D''' = 0 \end{cases}$$

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

I. Si rag(M)=3 y rag(A)=4 → SI (S. Incompatible) - Se cruzan

II. Si rag(M)=3=rag(A) → SCD (S. Compatible Determinado) - Secantes

III. Si rag(M)=2 y rag(A)=3 → SI (S. Incompatible) - Paralelas

IV. Si rag(M)=2=rag(A) → SCI (S. Compatible Indeterminado) - Coincidentes

11. Posición relativa de 2 planos en el espacio.

- Estudio mediante vectores normales. Π_1:<A, $\overrightarrow{n_1}$> , Π_2:<B, $\overrightarrow{n_2}$>

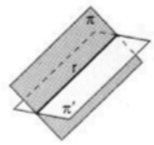
  I. Si $\overrightarrow{n_1}$ // $\overrightarrow{n_2}$ → Coincidentes (si A pertenece a Π_2) y paralelos (si A no pertenece a Π_2)

  II. Si $\overrightarrow{n_1}$ no es paralelo a $\overrightarrow{n_2}$ → Se cortan en una recta.

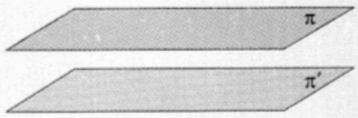
- Estudio con los rangos a partir de las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi: A'x + B'y + C'z + D'' = 0 \end{cases} \qquad (M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{array}\right)$$

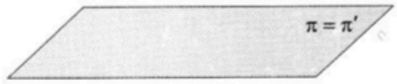
rang (M) = 2 = rang (M/N) — Los dos planos se cortan en una recta.



rang (M) = 1 y rang (M/N) = 2 — Los dos planos son paralelos.



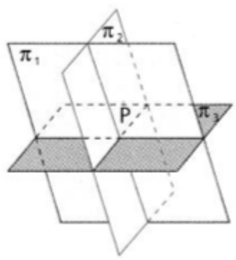
rang (M) = 1 = rang (M/N) — Los dos planos son coincidentes.



12. Posición relativa de 3 planos en el espacio. Ecuaciones en forma implícita

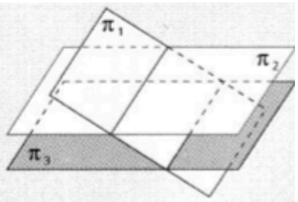
$$\begin{cases} \pi_1: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2: A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi_3: A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \qquad (M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$$

rang (M) = 3 = rang (M/N) — Los tres planos se cortan en un punto.

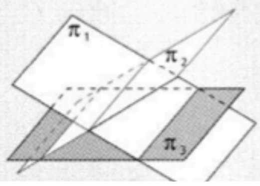


rang (M) = 2 y rang (M/N) = 3

Dos planos son paralelos y el otro los corta en dos rectas paralelas.



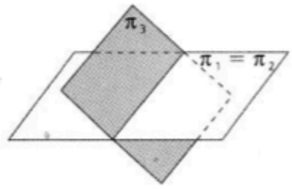
Los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas.



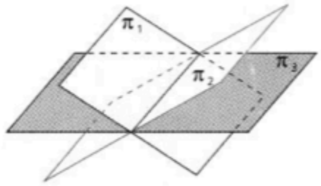
12. Continuación … (Posición relativa de 3 planos en el espacio)

rang (M) = 2 = rang (M/N)

Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.

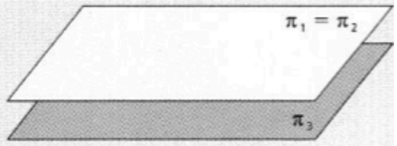


Los tres planos se cortan en una recta

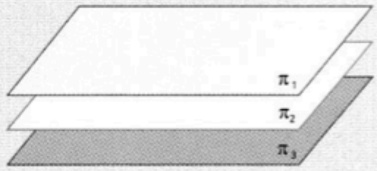


rang (M) = 1 y rang (M/N) = 2

Dos planos son coincidentes y el otro es paralelo.

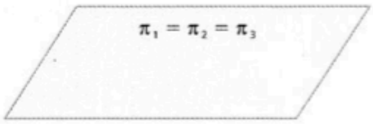


Los tres planos son paralelos.



rang (M) = 1 = rang (M/N)

Los tres planos son coincidentes.

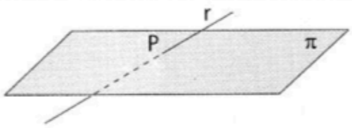


13. Posición relativa de recta y plano.

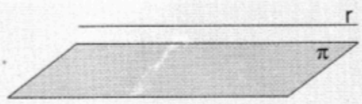
- Estudio con $\vec{d}$ vector director de la recta y $\vec{n}$ vector normal plano. Si $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ → Son perpendiculares y por tanto, son coincidentes o paralelas (falta ver un punto de una en la otra). Si $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$ → Secantes.
- Estudio con rangos con ambas ecuaciones expresadas en forma implícita.

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \qquad r: \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \qquad (M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$$

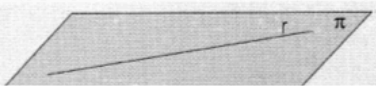
rang (M) = 3 = rang (M/N) — La recta y el plano se cortan en un punto.



rang (M) = 2 y rang (M/N) = 3 — La recta y el plano son paralelos.



rang (M) = 2 = rang (M/N) — La recta está contenida en el plano.



14. Haz de planos.

- Haz de planos paralelos. La ecuación del haz de planos paralelos a uno dado p : Ax + By +Cz + D =0 es de la forma Ax + By +Cz + K = 0 . Para determinar K, necesitamos un punto del plano del haz, que sustituiremos en la ecuación del plano del haz.

- Haz de planos secantes en una recta.

Sea la recta r : $\begin{cases} Ax+By+Cz+D = 0 \\ A'x+B'y+C'z+D' = 0 \end{cases}$

El haz de planos que se cortan en la recta r tiene la siguiente expresión:

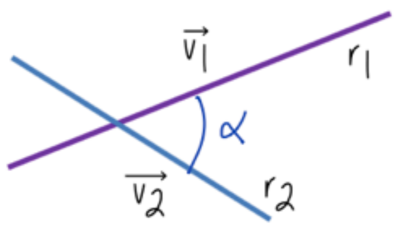
α (Ax + By + Cz + D) + β (A´x + B´y + C´z + D´) = 0 , con α y β números reales.

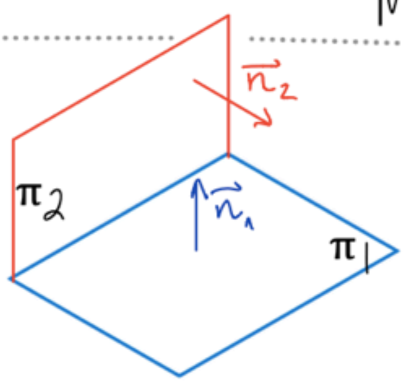
La ecuación del haz engloba al conjunto de planos que se cortan en r.

15. Ángulos entre rectas y planos.

Ángulo entre dos rectas

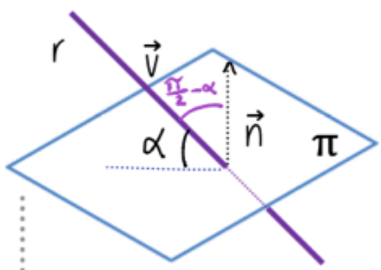
$$\cos(\alpha) = \cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v_1}, \vec{v_2})| = \frac{|\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}|}{|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|}$$





Ángulo entre dos planos

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$$



Ángulo entre recta y plano

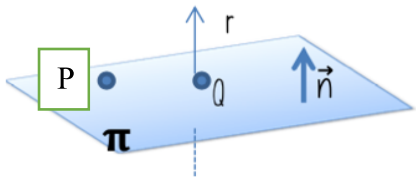
$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right| = |\cos(\vec{v}, \vec{n})| = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$

16. Distancias entre puntos, rectas y planos.

- **Distancia entre 2 puntos** → d(A,B)=$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

- **Distancia entre punto y recta** → P y r:<A, $\vec{u}$> → d(A,r)=$\frac{|\overrightarrow{AO} x \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

<u>Otro método:</u>



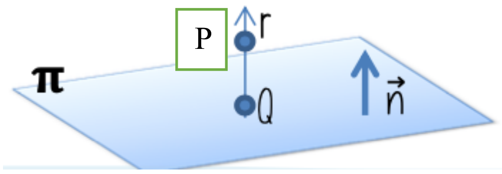
1) Hallar plano ∏ perperdicular a r y que contiene a P
   (Vector normal al plano = Vector de la recta)
2) Calcular punto Q intersección de r y ∏
3) d(P,r) =d(P,Q)

<u>Proyección ortogonal de un punto P a una recta r</u> → Calcular plano perpendicular a r que pasa por P y hacer la intersección con la recta r.

- **Distancia de un punto P a un plano ∏** →P(x_1,y_1,z_1), ∏:Ax+By+Cz+D=0

d(P, ∏)=$\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

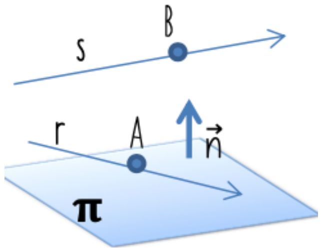
<u>Otro método</u>:



1) Hallar la recta r perpendicular a ∏ que pasa por P
2) Hallar Q la intersección de la recta r con el plano ∏
3) d(P, ∏)=d(P,Q)

<u>Proyección ortogonal de la recta r sobre el plano ∏</u> → Es la recta intersección del plano ∏ con un plano ∏´perpendicular a ∏ que contiene a la recta r.

- **Distancia entre 2 rectas r y s.**



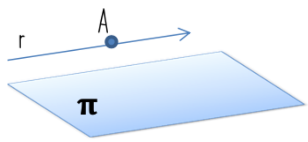
r//s (pararelas) → cogemos un punto de r y hallamos la distancia a s

r no paralela a s →

Hallamos plano ∏ paralelo a s que contiene a r ($\vec{n} = \overrightarrow{u_r} x \overrightarrow{u_s}$) → d(r,s)=d(s, ∏)

<u>Otro método:</u> d(r,s) = $\frac{Volumen\ del\ paralelepípedo}{Área\ Base} = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{AB}]|}{|\overrightarrow{u_r} X \overrightarrow{u_S}|}$ con A y B puntos cualquiera de r y s

- **Distancia de una recta r a un plano ∏.**

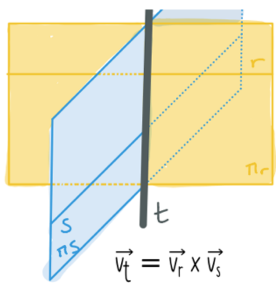


Si se cortan d(r, ∏)=0. Si no se cortan, d(r, ∏)=d(P, ∏), P un punto de la recta.

- **Distancia entre 2 planos ∏ y ∏´.**

Si ∏//∏´y P es un punto de ∏ → d(∏,∏´)=d(P, ∏´)

- **Recta perpendicular a 2 rectas que se cruzan.**



Hallar plano ∏r que contiene rectar r y vector $\vec{w} = \overrightarrow{u_r} x \overrightarrow{u_s}$ (perpendicular a r y s)

Hallar plano ∏s que contiene s y vector $\vec{w} = \overrightarrow{u_r} x \overrightarrow{u_s}$ (perpendicular a r y s)

La recta perpendicular t es la intersección de ∏r y ∏s

Junio 2022/23

3. Sean el punto $A(1, 1, a)$ y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

   b) **[1 punto]** Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

6.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$.

8. *a)* **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

   b) **[1,25 puntos]** Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

Modelos propuestos Curso 2022/23

3. Dada la recta $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de la recta r y el plano π.

   b) **[1,25 puntos]** Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r.

4.

   b) **[1,5 puntos]** Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

8. *a)* **[1,25 puntos]** Sea r la recta determinada por el punto $P(1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$. Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0, 0, 1)$.

3. Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$, donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

   b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r.

4.

b) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

5. *a*) **[1,25 puntos]** Sean los puntos $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 3, 0)$ y $C = (a, b, 1)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Obtén el valor de a y b para que los tres puntos estén alineados.

Junio 2021/22

4. Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases},$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r.

5. *a*) **[1 punto]** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

6. *a*) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

7. *a*) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0, 0, 1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Julio 2021/22

4. Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

5. *a*) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.

6. *a)* **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

Junio 2020/21

4. *a)* **[1,25 puntos]** Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) **[1,25 puntos]** Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Junio 2020/21

5. Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(1, 1, 2)$.

- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

Julio 2020/21

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

a) **[1 punto]** Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) **[1,5 puntos]** Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

Junio 2019/20

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x &= -1 + \lambda - \mu \\ y &= -\lambda + \mu \\ z &= -2 + 2\lambda \end{cases}$.

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Junio 2019/20

7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x &= -1 + \mu \\ y &= 1 + \lambda + a\mu \\ z &= 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y &= 1 - b \\ z &= -3 \end{cases}$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

Julio 2019/20

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Julio 2019/20

7. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

Junio 2018/19

4A. Dados los puntos $A(1, 2, 0), B(0, -1, 2), C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$:
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.
(1,25 puntos)

Junio 2018/19

4B. Sean la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

Julio 2018/19

4A. Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{array} \right. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$
a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. **(1,25 puntos)**

Julio 2018/19

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**
b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

Junio 2017/18

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:
a) Calcula la distancia del punto A al plano α. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α. **(1,5 puntos)**

Junio 2017/18

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 1), \vec{v} = (1, 1, -1)$ y $\vec{w} = (2, 0, 3)$:
a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2, 0, 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

Septiembre 2017/18

4A. Dados los puntos $A(-1, 3, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y la recta r intersección de los planos $\alpha \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $\beta \equiv 2y + z = 0$
a) Calcula la distancia del punto A a la recta r. **(0,75 puntos)**
b) Encuentra razonadamente el punto de la recta r cuya distancia al punto A sea mínima. **(0,75 puntos)**
c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por A y B sea paralelo a la recta r. **(1 punto)**

Otros ejercicios propuestos:

Madrid 2023 – Opción A

Problema 23.1.3 *(2,5 puntos)* Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1, 1, 1)$ y $B(1, 3, 1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x - 3z = 1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1, 1, 6)$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

Andalucía 2023 – Opción B

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)
El plano perpendicular al segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Andalucía 2023 – Opción B

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)
Considera el punto A(–1, 1, 3) y la recta *r* determinada por los puntos B(2, 1, 1) y C(0, 1, –1)

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta *r*.

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Madrid 2022 – Opción A

Problema 22.3.3 *(2,5 puntos)* Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$

a) (0,5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b) (1,25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0,75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.

Madrid Modelo 2022 – Opción A

Problema 22.1.3 *(2,5 puntos)* Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1,0,2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3,1,0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

Madrid Junio 2021 – Opción A

Problema 21.6.3 *(2,5 puntos)* En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2,3,-5)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-1,-2,2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0,75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0,75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45°, el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde P en dirección perpendicular a π, y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π, desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que P. ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

Castilla La Mancha

Septiembre 2017/18

4B. Dados los puntos $A(-1,2,0)$, $B(1,0,-4)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Calcula razonadamente un punto C de la recta r que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta r y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A. **(1 punto)**

Junio 2016/17

4A. Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s. **(1 punto)**

Junio 2016/17

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0,1,-2)$ y $Q(4,-3,0)$. **(1 punto)**
b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

Septiembre 2016/17

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$
a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0,-1,3)$. **(1 punto)**

Septiembre 2016/17

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x-y-az+5=0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1,2,3)$ a la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y-1 = z$ **(1,25 puntos)**

JUNIO 2016 4A

Sea r la recta determinada por el punto P(1, 0, 1) y el vector v (1, -1, 0)

a) Calcula el punto de r más cercano al punto Q(0, 0, 1) (1,5 puntos)

b) Calcula el punto simétrica de Q respecto a r. (1 punto)

(Sol.: a) R(1/2, 1 /2, 1); b) Q´(1,1,1)

JUNIO 2016 4B

Dados los planos

π : ax + y + 2z = 2 π´ : x + y + z = 0 y π´´ : x + ay + z = a donde a ∈ R, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro a ∈ R (1,5 puntos)

b) Para el valor a = 1, calcular la distancia entre π´ y π´´. (1 punto)

(Sol.: a) a ≠ 1, 2 Se cortan en un punto los tres planos, si a = 1 π´ y π´´ son paralelos y π los corta en dos rectas paralelas; si a = 2 se cortan dos a dos en tres rectas paralelas)

SEPTIEMBRE 2016 4A

Dadas las rectas

r: $2 - x = y - 2 = \frac{z}{3}$ y s : $\begin{cases} x = -1 + 2\gamma \\ y = -1 + \gamma \\ z = c - 3\gamma \end{cases}$, $\gamma \in R$ donde c ∈ R, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s en función del parámetro c ∈ R. (1,5 puntos)

b) Halla el punto de intersección de r y s cuando dichas rectas sean secantes. (1 punto)

(Sol.: a) c ≠ 3 las rectas se cruzan; b) c = - 9 , punto de corte P(3, 1, -3))

SEPTIEMBRE 2016 4B

Dados los planos

π : 2x – 3y + z = 0 y π´: $\begin{cases} x = 1 + \mu + \gamma \\ y = \mu - \gamma \\ z = 2 + 2\mu + \gamma \end{cases}$ $\mu, \gamma \in R$ y el punto P(2, -3, 0)

a) Hallas la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta s determinada por la intersección de π y π´ (1,5 puntos)

b) Calcular el ángulo entre los planos π y π´ (1 punto)

(Sol.: a) Para conocer el vector director de π ' se hallará el producto vectorial de los vectores que lo engendran

v = (5, 7, 11) , r : $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{11}$; b) 4^0 5´ 46´´)

JUNIO 2015 4A.

a) Calcula la distancia del punto P(-1, 2, 0) a la recta $\begin{cases} -x+y+2z & =0 \\ y+z & =1 \end{cases}$ (1,25 puntos)

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r. (1,25 puntos)

(Sol.: a) Hallaremos un plano π que contenga el punto P y que sea perpendicular a la recta dada. Una vez hallado el plano se calculara el punto Q de intersección del plano y la recta, el modulo del vector PQ es la distancia pedida.

Π: x – y +z +3 = 0; $d=\sqrt{2}$ u; b) P´(1, 2 -2))

JUNIO 2015 4B.

Dados los puntos A(1 , λ + 1 , -1), B(2 , λ , 0) y C(λ + 2 , 0 , 1), se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro λ ∈ℜ para el que A, B y C estén alineados. (1,25 puntos)

b) Para λ = - 1, da la ecuación implícita del plano que contiene a los puntos A, B y C. (1,25 puntos)

(Sol.: a) λ = 1; b) Para determinar el plano π debemos de halla los vectores AB, AC y AG, siendo G el punto generador del plano. Π: x + y – 1 = 0)

SEPTIEMBRE 2015 4A.

Dada la recta r = $\begin{cases} 2x-y+z & =3 \\ x-z & =1 \end{cases}$

a) Da la ecuación implícita del plano Π perpendicular a r que pasa por el punto P(2, 1, 1) (1,25 puntos)
b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de Π con los ejes coordenados (1,25 puntos)
(Sol.: a) El plano buscado π como vector director el de la recta r, que es perpendicular al vector PG, siendo G el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos vectores, nulo y la ecuación pedida del plano.

Π : x + 3y + z – 6 = 0; b) V = (1 / 6) 72 = 12 u3)

SEPTIEMBRE 2015 4B.

Dados el planos π≡x + ay + 3z = 2, a ∈R y la recta r =$\begin{cases} x-2y+z & =-1 \\ 2x-y & =0 \end{cases}$

a) Halla a para que π y r se corten perpendicularmente. (1,25 puntos)

b) Halla a para que π y r sean paralelos (1,25 puntos)

(Sol.: a) Los vectores directores de la recta y el plano que cumplen la condición de perpendicularidad son iguales o proporcionales a = 2: b) Si la recta y el plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y, por ello, su producto escalar (•) es nulo, a = - 5)

JUNIO 2014 4A

a) Halla a∈ R para que las rectas r ≡ $\begin{cases} x+2y-z & =1 \\ -x+y-3z & =2 \end{cases}$ y s ≡ $\begin{cases} x+y & =0 \\ 3x+2y+z & =a \end{cases}$ se corten en un punto (1,25 puntos)

b) Para dicho valor de a da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s. (1,25 puntos)

(Sol.: a) a = -1; b) π: x + 2y – z - 1 = 0)

JUNIO 2014 4B

Dados el plano π ≡ x – y = 4 y la recta r ≡ $\begin{cases} x+z & =1 \\ 2x+y+az & =0 \end{cases}$ a ∈ R se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π sean paralelas (0,75 puntos)

b) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π se corten perpendicularmente (0,75 puntos)

c) Para a = 1, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a r y corte perpendicularmente a π (1 punto)

(Sol.: a) a = 3; b) No son perpendiculares,; c) π' = x + y + 1 = 0)

SEPTIEMBRE 2014 4A.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r ≡ x = −y = z y s ≡ x = y = z – 2 (1,25 puntos)

b) Calcula la distancia entre r y s. (1,25 puntos)

(Sol.: a) Las rectas r y s se cruzan en el espacio; b) Calcularemos un plano π que contenga a la recta s y sea paralelo a la recta r. Tomaremos un punto R cualquiera de la recta r (el indicado en su ecuación, por ejemplo) y hallaremos la distancia de este punto al plano π: x – z – 2 = 0 , que es la distancia buscada. d(r , s) = $\sqrt{2}$ u)

80.- SEPTIEMBRE 2014 4B.

a) Estudia la**,** en función del valor del parámetro a ∈ R, la posición relativa de los planos

$\begin{cases} \pi 1 \equiv & x+y-z & =3 \\ \pi 2 \equiv & x-y+az & =-1 \\ \pi 3 \equiv & ax+y-z & =5 \end{cases}$ (1,5 puntos)

b) Calcula, en función del parámetro a, la distancia entre los planos π1 y π2. (1 punto)

(Sol.: a) a = 1, π1 y π3 son planos paralelos, π1 y π2 se cortan en una recta y π 2 y π 3 se cortan en una recta; si a ≠ 1 se cortan en un punto; b) a ≠ 1 los dos planos se cortan en una recta; si a = 1 los dos planos son paralelos y la distancia es $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ u)

Unidad 8. Estadística y probabilidad.

1. Experimento aleatorio. Espacio muestral. Sucesos.

EXPERIMENTO ALEATORIO Un fenómeno o experiencia se dice aleatorio cuando al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado. Si por el contrario, se puede predecir el resultado de una experiencia antes de realizarla, se dice que el experimento es determinista.

ESPACIO MUESTRAL es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y se representa por Ω o E.

SUCESO ALEATORIO Es un suceso que ocurrirá o no dependiendo del azar.

SUCESO ELEMENTAL Cada elemento del espacio muestral E se llama suceso elemental.

El conjunto formado por todos los sucesos del espacio muestral se llama ESPACIO DE SUCESOS S. Es decir, el espacio de sucesos está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral.
Si la experiencia aleatoria: lanzar una moneda $E = \{c, x\}$, el espacio de sucesos $S = \{\emptyset, \{c\}, \{x\}, \{c, x\}\}$

2. Tipos de sucesos

Suceso elemental formado por un solo elemento $A = \{3\}$

Suceso compuesto: formado por dos o más elementos $B = \{3, 5\}$

Suceso imposible es aquel que nunca se realiza, se representa por $\emptyset$.

Suceso seguro es el que se realiza siempre, Ω o E.

Suceso contrario o complementario de A y se representa por $\bar{A}$, al suceso que se realiza cuando no se realiza A. Sea $E = \{3, 4, 7, 8\}$ siendo $A=\{3\}$, el suceso contrario a A sería $\bar{A} = \{4, 7, 8\}$.
E

3. Operaciones con sucesos

Suceso unión de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando lo hacen A ó B (o ambos). Se representa por A U B

Suceso intersección de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza a la vez el suceso A y el suceso B. Se representa por A ∩ B.

Diferencia de sucesos: A – B (se lee A menos B) es el suceso formado por los todos los casos de A que no son de B. $A - B = (A \cap \bar{B})$

Sucesos incompatibles: dos sucesos, A y B, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún caso común. Es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$. Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

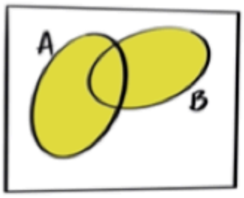
Sucesos compatibles: dos sucesos A y B son compatibles si pueden obtenerse simultáneamente. Es decir
$A \cap B \neq \emptyset$.

Algunas propiedades importantes

- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$
- Leyes de Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

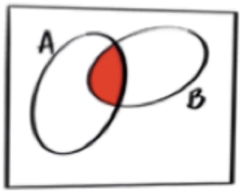
Continuación (Operaciones con sucesos)

UNIÓN DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama unión de A y B y se representa por $A \cup B$, al suceso formado por todos los elementos de A y/o de B.



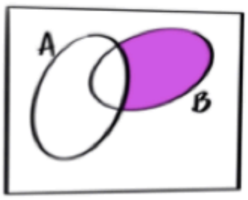
$A \cup B$

INTERSECCIÓN DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama suceso intersección de A y B y se representa por $A \cap B$, al suceso que está formado por todos los elementos de A y de B simultáneamente.

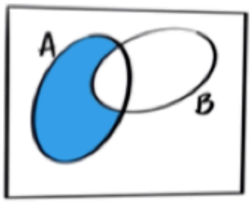


$A \cap B$

DIFERENCIA DE SUCESOS Dados dos sucesos A y B se llama suceso diferencia de A y B y se representa por $A \setminus B$ o $A - B$, al suceso $A \cap \overline{B}$. O sea, $A \setminus B$ está formado por todos los elementos de A que no están en B.

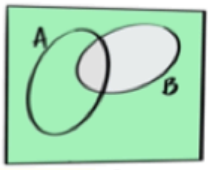


$B - A = B \setminus A$



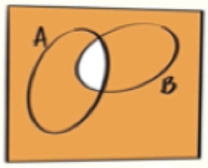
$A - B = A \setminus B$

COMPLEMENTARIO Dado el suceso A se llama suceso complementario de A, $\overline{A}$, al suceso formado por los elementos de E que no están en A.

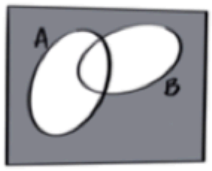


$\overline{B}$

$\overline{A \cap B}$



$\overline{A \cup B}$



SUCESOS INCOMPATIBLES Dos sucesos A y B cuya intersección es el suceso imposible se llaman sucesos incompatibles. Un suceso y su contrario son siempre incompatibles.

$A \cap B = \emptyset$

4. Frecuencia Absoluta y relativa de un suceso A

Se llama **FRECUENCIA ABSOLUTA** f_a de un suceso A al número de veces que se verifica A al realizar el experimento un número determinado de veces.

Se llama **FRECUENCIA RELATIVA** f_r de un suceso A al cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se realiza el experimento: $f_r = \dfrac{f_a}{n}$, siendo n el número de veces que se repite el experimento.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse hacia un número, a medida que el número de pruebas del experimento aleatorio crece indefinidamente: $\lim f_r(S) = P(S)$. A este número lo llamamos PROBABILIDAD DEL SUCESO S.

Propiedades

- $0 \leq f_r(A) \leq 1$
- $f_r(E) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

5. Definición axiomática de probabilidad

Se puede definir la probabilidad como una función P que a cada suceso A le asigna un número real P(A) que cumple 3 axiomas:

Axioma 1: La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral es 1. $P(E) = 1$

Axioma 2: Cualquiera que sea el suceso A, su probabilidad es un número no negativo. $P(A) \geq 0$

Axioma 3: Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PROPIEDADES

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Si A y B son dos sucesos tales que $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

6. Regla de Laplace

LEY DE LAPLACE

Si los resultados de una experiencia aleatoria son casos equiprobables, la probabilidad de un suceso A es $P(A) = \dfrac{\text{nº casos favorables a } A}{\text{nº casos posibles}}$

7. Diagrama de árbol

Es una forma de organizar el planteamiento de un problema de probabilidad de manera que el experimento se va ramificando a medida que se van sucediendo las pruebas (lanzamientos, extracciones, tiradas, ...).

Sobre cada rama se va anotando la probabilidad de que el suceso correspondiente se produzca. Finalmente, la probabilidad de llegar a un determinado resultado es el producto de todas las probabilidades de las ramas que llevan a ese resultado.

8. Probabilidad condicionada

Se llama PROBABILIDAD CONDICIONADA DEL SUCESO A RESPECTO DEL SUCESO B a la probabilidad de A sabiendo que ocurrió B, la denotaremos por $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{siempre que } P(B) \neq 0$$

De lo anterior se deducen claramente las relaciones siguientes

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Si fuesen tres sucesos $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$

Dos sucesos A y B se dicen INDEPENDIENTES si $P(B) = P(B|A)$

Tambien se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

9. Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia nos servirán de apoyo en la aplicación de la probabilidad condicionada. Estas tablas, de fácil manejo, nos permiten calcular una probabilidad condicionada fácilmente.

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º B	60	65	125
2º B	50	55	105
Total	110	120	230

10. Teorema de la probabilidad total

Tenemos n sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Entonces,

$P(S) = P(A1 \cap S) + P(A2 \cap S) + \ldots + P(An \cap S) =$
$P(A1).P(S/A1) + P(A2).P(S/A2) + \ldots\ldots + (An).P(S/An)$

11. Teorema de Bayes (Prob. A "posteriori")

Tenemos n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Entonces,

$$P[A_i / S] = \frac{P(A_i) \cdot P(S/A_i)}{P(A_1) \cdot P(S/A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)}$$

12. Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio. Si los resultados son finitos o infinitos numerables , la variable aleatoria se denomina discreta. Si los resultados son infinitos, la variable aleatoria es continua.

13. Variable aleatoria discreta

Función de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta con posibles valores x1, x2,..., xn ,se llama función de probabilidad o función de masa, a aquella función que hace corresponder a cada valor de la variable con su probabilidad. $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$

Ejemplo

X = resultado de lanzar un dado. La función de probabilidad es:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Propiedades de la función de probabilidad

a) $p_i \geq 0$ b) $\sum p_i = 1$

Esperanza y varianza de la v.a

Esperanza $\mu = E[X] = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

Varianza $\sigma^2 = \sum_{I=1}^{i=n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$

Ejemplo

x_i	1	2	3	4	5	6	
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	
$x_i p_i$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	21/6
$x_i^2 p_i$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	91/6

E(X) = 21/6

Var(X) = 91/6 - (21/6)² = 105/36 = 2,92

Función de distribución

Es la función acumulada $F(x)=P(X\leq x)$

Ejemplo

X=lanzar un dado

x	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
F(x)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

14. Modelos probabilísticos discretos.

14.1 Modelo Bernoulli. Experimento aleatorio con 2 posibles resultados: éxito (1) o fracaso (0). X variable aleatoria con 2 valores, 0 fracaso y 1 éxito para un suceso A.

$P(x=0)=1-p=q$, $P(x=1)=p$

$X \sim Bern(p)$

x	0	1
Probab.	1-p=q	p

$E(X) = p$

$Var(X) = p-p^2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-p & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

14.2 Modelo Binomial. Consiste en repetir n veces un experimento Bernoulli de parámetro p en las mismas condiciones de independencia. La variable X = nº veces que ocurre con éxito el suceso A será una binomial de parámetros n y p. X≅B(n,p). X={0,1,2,3,…}

$$X \sim Bin(n,p)$$

$$P(X=a)=\binom{n}{a}p^a(1-p)^{n-a} \quad \text{donde } \binom{n}{a}=\frac{n!}{a!\,(n-a)!}$$

$$E(X)=np$$

$$Var(X)=np(1-p)=npq$$

Ejemplo

El 20% de un determinado pueblo ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Definimos X=nº de personas que estan viendo el programa $\sim Bin(10,\ 0.20)$ donde p=0,2 es la probabilidad de éxito (ver concurso de tv). $Rec(X)=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

a) Calcula la probabilidad de que ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X=8)=\binom{10}{8}\cdot 0{,}2^8\cdot(1-0{,}2)^2=\underline{0{,}000074}$$

b) Calcula la probabilidad de que más de ocho personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>8)=P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}2^9(1-0{,}2)^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}(1-0{,}2)^0=0{,}000004+0{,}0000001$$
$$=\underline{0{,}0000041}$$

c) Calcula la probabilidad de que algunas de las diez personas estuvieran viendo el programa:

$$P(X>0)=1-P(X\leq 0)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}2^0(1-0{,}2)^{10}=1-0{,}11=\underline{0{,}89}$$

c) Calcular la media y la varianza $E(X)=10\cdot 0{,}20=\underline{2}$ $\quad Var(X)=10\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=\underline{1{,}6}$

15. Variable aleatoria continua.

Una **variable aleatoria** es continua cuando puede tomar un número infinito de valores en la recta real.La distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua se llama **distribución de probabilidad continua.** En una distribución continua la probabilidad de un valor concreto es cero. En este caso, las probabilidades que calculamos están siemprea asociadas a intervalos: P(a ≤ X ≤ b)

Función de distribución → Es la función acumulada F(x)=P(X≤x)

Función de probabilidad o función de densidad → f(x)=F´(x) → F(x)=$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Propiedades

a) f(x) ≥ 0 b) $P(a \leq\leq x \leq b)$= F(b)-F(a) c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ d) P(X=a)=0

Esperanza y varianza de la v.a

Esperanza μ **= E [X]** =$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ // **Varianza** σ^2 = $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$

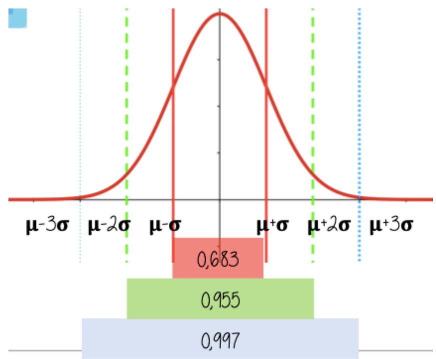
16. Modelos probabilísticos continuos: Normal.

Diremos que una distribución de probabilidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, y lo representaremos por N(μ; σ) cuando la representación gráfica de su función de densidad es una curva positiva continua, simétrica respecto a la media, de máximo en la media, y que tiene 2 puntos de inflexión, situados a ambos lados de la media (μ − σ y μ + σ respectivamente).

Definición. Una variable aleatoria continua, con media μ y con desviación típica σ, es una variable normal si su función de densidad,

f : R → R, es : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Propiedad. P(a ≤ X ≤ b) = P(a < X < b) = $\int_a^b f(x)dx$

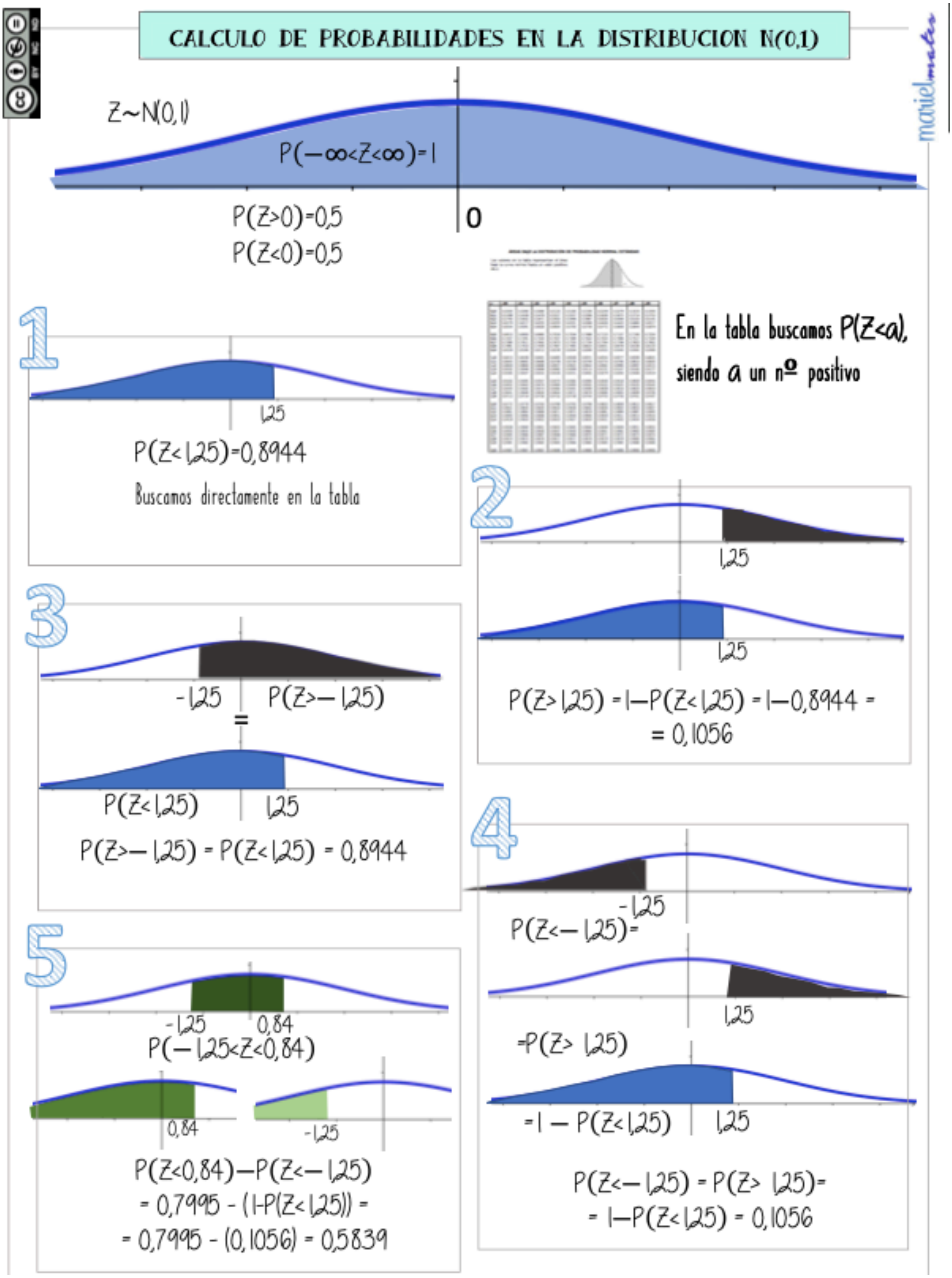


Regla 68-95-99

$$\text{Si } X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow \begin{cases} P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0{,}683 \\ P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0{,}955 \\ P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0{,}997 \end{cases}$$

Normal tipificada N(0,1)

$$\text{Si } X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$


CALCULO DE PROBABILIDADES EN LA DISTRIBUCION N(0,1)
Z~N(0,1)
P(−∞<Z<∞)=1
0
P(Z>0)=0,5
P(Z<0)=0,5
En la tabla buscamos P(Z<a), siendo a un nº positivo
1
1,25
P(Z<1,25)=0,8944
Buscamos directamente en la tabla
2
1,25
1,25
P(Z>1,25) = 1−P(Z<1,25) = 1−0,8944 =
= 0,1056
3
-1,25
P(Z>−1,25)
=
P(Z<1,25)
1,25
P(Z>−1,25) = P(Z<1,25) = 0,8944
4
-1,25
P(Z<−1,25)=
1,25
=P(Z>1,25)
=1 − P(Z<1,25)
1,25
P(Z<−1,25) = P(Z>1,25)=
= 1−P(Z<1,25) = 0,1056
5
-1,25
0,84
P(−1,25<Z<0,84)
0,84
-1,25
P(Z<0,84)−P(Z<−1,25)
= 0,7995 - (1-P(Z<1,25)) =
= 0,7995 - (0,1056) = 0,5839
mariel mates

Junio 2022/23

4. *a)* Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

   b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

7.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Modelo propuesto Curso 2022/23

5. *a*) En el servicio de urgencias de un hospital clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacentes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k \ p	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

7.

b) Tiramos un dado de 4 caras dos veces y sea X la variable aleatoria que representa el producto de los dos valores obtenidos.

b.1 **[0,75 puntos]** Calcula $P(X = 1)$ y $P(X = 4)$.

b.2 **[0,75 puntos]** Si $X = 4$, calcula la probabilidad de que en la primera tirada haya salido un 1.

7.

b) **[1,5 puntos]** En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b.1) **[0,75 puntos]** La probabilidad de obtener 75 o más puntos.

b.2) **[0,5 puntos]** El número de opositores del total de 450 que obtuvo menos de 75 puntos.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

8. *a*) En una urna hay tres bolas rojas y dos azules. Se extrae una bola y luego otra (sin devolver antes la primera a la urna).

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color?

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que las dos bolas han salido del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean azules?

b) Un panadero hace panecillos con un peso que se distribuye como una normal de media 200 g y desviación típica 15 g.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de panecillos pesa más de 203 g?

b.2) **[0,75 puntos]** Calcula el peso por encima del cual está el 67 % de los panecillos más pesados.

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Junio 2021/22

7. *b*) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera?

b.1) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

8. *a*) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Julio 2021/22

7. *b*) **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

8. *a*) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?

a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Junio 2020/21

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

   b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	**k** \ **p**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
4	**0**	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

Julio 2020/21

8. *a*) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

   b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

Junio 2019/20

8. *a*) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

   b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k \ p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

Julio 2019/20

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

   b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Junio 2018/19

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	**k \ p**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,33**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,49**	**0,50**
5	**0**	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2018/19

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**

a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**

b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Julio 2018/19

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son P(A)=0,75 y P(B)=0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**

a2) Si $P(A \mid B) = 0,6$. **(0,5 puntos)**

Nota: $P(A \mid B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Julio 2018/19

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Junio 2017/18

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	**k \ p**	**0,01**	**0,05**	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,33**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,49**	**0,50**
5	**0**	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2017/18

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencia son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Septiembre 2017/18

5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10 % y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4 % y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salgan defectuosas. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. **(0,5 puntos)**

b) Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero. **(0,75 puntos)**

b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	**0**	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Otros propuestos:

Madrid 2023 – Opción A

Problema 23.1.4 *(2,5 puntos)* Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100; 35)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0,75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75,17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

Madrid 2023 – Opción B

Problema 23.2.4 *(2,5 puntos)* Sabiendo que $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(\overline{A}) = \frac{9}{20}$ y $P(\overline{B}) = \frac{7}{20}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

c) (0,5 puntos) Calcular razonadamente $P(A - B)$

d) (0,5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

Madrid 2022 Extraordinario – Opción A

Problema 22.9.4 *(2,5 puntos)* El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.

b) (0,5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.

d) (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

Madrid 2022 Ordinaria – Opción A

Problema 22.3.4 *(2,5 puntos)* Según el Instituto Nacional de Estadítica, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %.
Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

Madrid 2022 Ordinaria – Opción B

Problema 22.4.4 *(2,5 puntos)* De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Madrid Modelo 2022 – Opción B

Problema 22.2.4 *(2,5 puntos)* Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0,2 y 0,3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0,5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) (0,5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) (0,75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) (0,75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

Madrid Modelo 2021 – Opción B

Problema 21.2.4 *(2,5 puntos)* Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

a) (0,5 puntos) Que la prueba dé resultado positivo.

b) (0,75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.

c) (0,75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.

d) (0,5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

Castilla La Mancha

Septiembre 2017/18

5B. a) En una clase el 80 % aprueba la asignatura de Biología, el 70 % aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60 % aprueba Biología y Matemáticas.

a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? **(0,75 puntos)**

a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? **(0,5 puntos)**

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Junio 2016/17

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A. **(0,5 puntos)**

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**

b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2016/17

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**

a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Septiembre 2016/17

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25 % de los componentes son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 55 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**

a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**

b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313