Juegos matemágicos con... Números Naturales

La "vuelta al cole"

Sara empieza su primer curso de secundaria. En clase, se han juntado alumnos y alumnas de varios colegios y la mayoría no se conoce entre sí.

Para ir rompiendo el hielo, la profesora de matemáticas ha propuesto que los alumnos hagan algunos juegos y trucos de magia relacionados con las matemáticas: "matemática recreativa"

matemagia

Contenido

La “vuelta al cole” 1

1. ¿Qué aprenderemos en esta unidad? 3

2. Los números, ¿son entretenidos? 4

2.1. ¿Jugamos? 4

2.2. Los ℕúmeros ℕaturales 5

2.3. Propiedades mágicas de la suma y el producto 6

2.4. Propiedades de la suma y el producto 7

2.5. Aproximación de números naturales 7

2.6. Potencias y sistemas de numeración 8

Potencia de un número natural 8

Sistemas de numeración 10

Raíces cuadradas 10

3. Operaciones combinadas 11

3.1. Jerarquía de operaciones 11

4. Problemas 13

4.1. Soluciones a los problemas 14

5. Problemas de Evaluaciones de Diagnóstico 15

Resumen. ℕúmeros ℕaturales 21

1. ¿Qué aprenderemos en esta unidad?

A lo largo de la unidad, aprenderemos a:

- Operar correctamente con los números naturales (suma, resta, multiplicación y división)
- Aproximar números naturales (truncar y redondear) y representarlos en la recta numérica
- Aplicar las propiedades de la suma y del producto
- Calcular potencias de números naturales, y algunos cuadrados perfectos
- Usar las propiedades de las potencias
- Calcular y aproximar raíces cuadradas
- Usar otros sistemas de numeración
- Resolver cálculos con operaciones combinadas
- Resolver problemas.

Iremos viendo todos los contenidos mediante su conexión con diferentes juegos y trucos de magia matemáticos. Además, se nos ofrecerá la posibilidad de crear nuestra propia versión del juego y pensar sobre las matemáticas que contienen. Además, el proceso de resolución servirá para potenciar nuestra capacidad de razonamiento y de pensamiento abstracto.

La información está organizada en varios apartados. En cada uno, a modo de introducción tendremos varios juegos matemáticos directamente relacionados con los contenidos que se van a trabajar, y luego los contenidos teóricos claramente identificados, junto con ejercicios específicos para repasar y comprobar cuánto hemos aprendido.

Por último, también hay una sección de problemas con enunciado, que plantean situaciones con diversos usos cotidianos de los decimales y una pequeña colección de problemas que han aparecido en evaluaciones de diagnóstico y en las pruebas PISA (Programme for International Student Assessment).

Las últimas páginas son un resumen de los conceptos trabajados a lo largo de la unidad.

2. Los números, ¿son entretenidos?

2.1. ¿Jugamos?

Para empezar, veamos alguno de los juegos matemágicos que han propuesto los compañeros de clase.

¿Dónde se habrá metido ese euro?

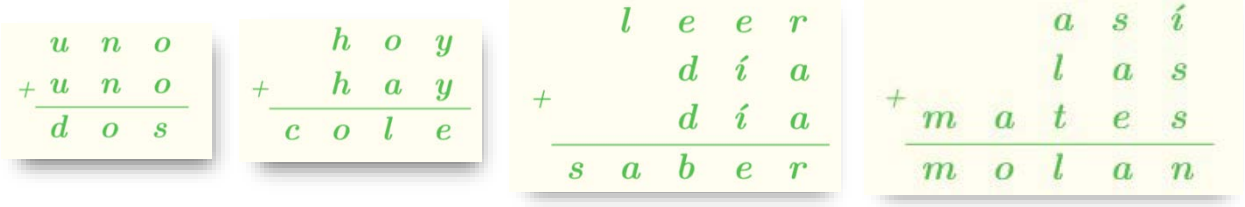
Lidia, Marta e Irene cuentan una anécdota que les ha ocurrido este fin de semana, cuando salieron a cenar juntas...

*"Cada una pusimos **10€ para pagar los 30€** que costaba la cena.*
*Justo cuando nos íbamos, el camarero vio que había cobrado una ración de más, y **nos devolvió 5€**.*
*Entonces, decidimos dejar **2€ de propina** al camarero y repartirnos los otros 3€ (1€ para cada una)."*

- Al final, nos hemos gastado 10 - 1 = **9€ cada una**
- Así que, entre las tres, hemos puesto 9×3=27€, que con los **2€ de propina** son **29€**
- ¿**Qué pasa con el euro que falta** hasta llegar a los 30€?

"uno + uno = dos"

Paula ha encontrado unos juegos de criptogramas matemáticos: aparece un mensaje en el que debemos sustituir las letras por números, de manera que la suma sea correcta. ¿Resolvemos alguno?



¡Lo tengo!

Mario ha propuesto un sencillo juego para dos jugadores:

- Por turnos, cada jugador elige un número entre 1 y 4
- Los números se van sumando
- **Gana el primero en llegar a 23**.

¿Habrá alguna estrategia ganadora?

¿Puedo ir a la fuente, profe?

Ana y **Álvaro** piden ir a llenar sus botellas de agua todos los días en clase de matemáticas. Pero esta vez, la profesora decide proponerles un reto para dejarles ir:

Les da un vaso de **3dl** y una botella de medio litro (**5dl**) y dice

*"Podréis ir si averiguáis cómo llenar una de sus botellas exactamente con **4dl** y la otra con **1dl**.*
Podéis hacer todos los trasvases que queráis entre el vaso y la botella."

¿Cómo pueden conseguirlo?

2.2. Los ℕúmeros Naturales

Son los que usamos para contar. Su símbolo matemático es ℕ. Son 0, 1, 2, 3…. Para medir una **magnitud**, la comparamos con una cantidad fija, que se denomina **unidad de medida**.

Ya conocemos las principales operaciones con los números: **suma, resta, multiplicación y división**.

Recordemos:

- **Multiplicar**: es sumar muchas veces el mismo número.
  Para escribir una multiplicación usaremos un punto "·" en vez de una cruz "×".
  Por ejemplo, 2+2+2+2+2+2 = 2 · 6 = 12, y 4+4+4+4=4 · 5 = 20.
  En el primer ejemplo, los **factores** son 2 y 6, y su **producto** 12, y en el segundo, los factores son 4 y 5, y el producto es 20.
- **Dividir**: se usa siempre que hay que repartir en partes iguales.
  Por ejemplo, para repartir 15 folios entre 6 personas, podemos dar 2 folios a cada una, y sobran 3 folios.
  En este caso, 15 es el **dividendo** y 6 el **divisor**. El **cociente** es 2 y el **resto** 3.

  Prueba de la división: **dividendo** es igual a **divisor** por **cociente**, más **resto**.

- También pueden representarse en la recta numérica y ordenarse (cuanto más a la derecha, mayor es el número).

Ejercicio 1. Efectúa las siguientes operaciones. Las divisiones deben hacerse con la prueba.

a) 72 – 50 + 6 =

b) 49 + 39 – 56 =

c) 9 + 6 – 5 + 4 =

d) 8 + 9 – 7 – 4 =

e) 23 · 7 =

f) 45 · 61 =

g) 235 · 590 =

h) 726 · 423 =

i) 1849 : 9

j) 1241 : 15

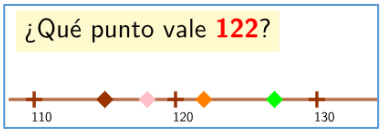
k) 10844 : 53

l) 61661 : 890

Ejercicio 2. Naturales en la recta numérica. Resuelve:

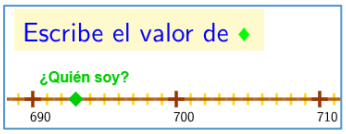
a)

b)



c)

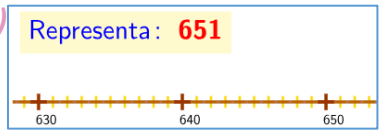
d)



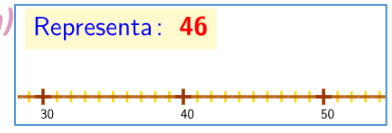
e)

f)

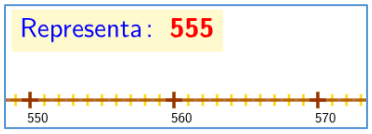
g)



h)



i)



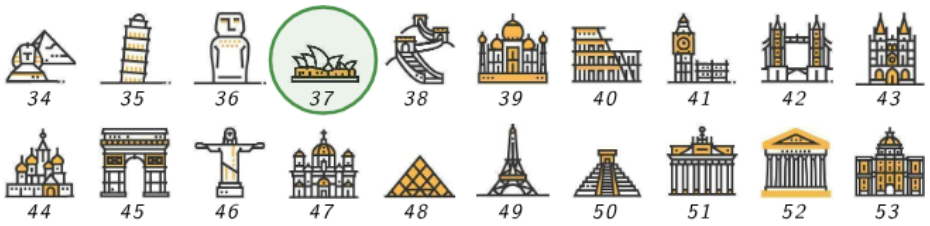
2.3. Propiedades mágicas de la suma y el producto

Elena ha preparado un truco de magia. Usando únicamente las propiedades de la suma, nos hará elegir el Palacio de la Ópera de Sidney (nº37). **¿Probamos?**

4	11	5	7
11	18	12	14
1	8	2	4
10	17	11	13

Elegimos cuatro números en este cuadrado, sin repetir fila ni columna.

Los sumamos. ¡Con sus poderes hará que salga 37!



¿En qué se basará el truco? **Reto**: preparar un truco similar, donde "forcemos" a elegir otro número.

¿Te gustan los gatitos?

A Lucía sí, y ha preparado un truco para que siempre acabemos eligiendo el gatito (20).

¿Sabes en qué se basa? **Reto**: preparar un truco similar, "forzando" a elegir algún otro animalito.

Ejercicio 3. "**Competición de sumas y restas**". Carlos ha preparado un juego consistente en una competición de cálculo mental. ¿Quién tardará menos en resolver estas cuentas de cabeza?

[1]	$5-(12-9)-1$	=	...	[11]	$10+9-18+9$	=	...
[2]	$11-(11-11)+8$	=	...	[12]	$3+8-10+11$	=	...
[3]	$9+11-8-3$	=	...	[13]	$6+7-9+6$	=	...
[4]	$5-5+10+10$	=	...	[14]	$11-(12-6)-4$	=	...
[5]	$11-(8-2)-4$	=	...	[15]	$3+6+7-11$	=	...
[6]	$11-6-4+2$	=	...	[16]	$11+10-2-11$	=	...
[7]	$7-(9-3)+8$	=	...	[17]	$3+12-7+9$	=	...
[8]	$5+12-14+11$	=	...	[18]	$12-12-0+3$	=	...
[9]	$9-(9-8)-2$	=	...	[19]	$5-(6-5)+2$	=	...
[10]	$8+3+8-16$	=	...	[20]	$7-3+11-9$	=	...

2.4. Propiedades de la suma y el producto

- **Conmutativa:**
  el orden de los sumandos/factores no altera el resultado. Por ejemplo,

  Suma: $2+6=6+2=8$. **Producto**: $9\cdot 8=8\cdot 9=72$.

- **Asociativa:**
  podemos agrupar las sumas/productos como queramos. Por ejemplo,

  Suma: $\underbrace{(4+3)+2}_{7+2=9}=\underbrace{4+(3+2)}_{4+5=9}$. **Producto**: $\underbrace{(4\cdot 3)\cdot 9}_{12\cdot 9=108}=\underbrace{4\cdot(3\cdot 9)}_{4\cdot 27=108}$.

- **Elemento neutro:**
  al sumar/multiplicar por él, se obtiene el mismo número.

  Suma: el cero, 0. Ejemplo: $0+10=10$. **Producto**: el uno, 1. Ejemplo: $10\cdot 1=10$.

- **Distributiva:**
  para multiplicar una suma, podemos multiplicar primero cada sumando.

  Ejemplos: $2\cdot(1+7)=2+14=16$, $(2+6)\cdot 8=16+48=64$.

2.5. Aproximación de números naturales

En ocasiones es más cómodo utilizar una **aproximación** de los números en vez de su valor real.

- Ocurre, por ejemplo, para **números con muchas cifras**:
  la velocidad de la luz es de **299 792 458** metros por segundo, pero ¡ **300 millones** de metros por segundo sería mucho **más fácil de recordar**!, y normalmente no se comete demasiado error al usar esa aproximación, porque es un número muy cercano al verdadero.
- También, al hacer cálculos puede resultarnos más fácil **calcular las primeras cifras** y prescindir de las demás. Por ejemplo, si queremos dividir 400:3, sabemos que será "400 y pico", porque 4:3 cabe a 1 y todavía quedan dos cifras más por calcular en la división.

Los dos **tipos de aproximaciones** vistas en los ejemplos son:

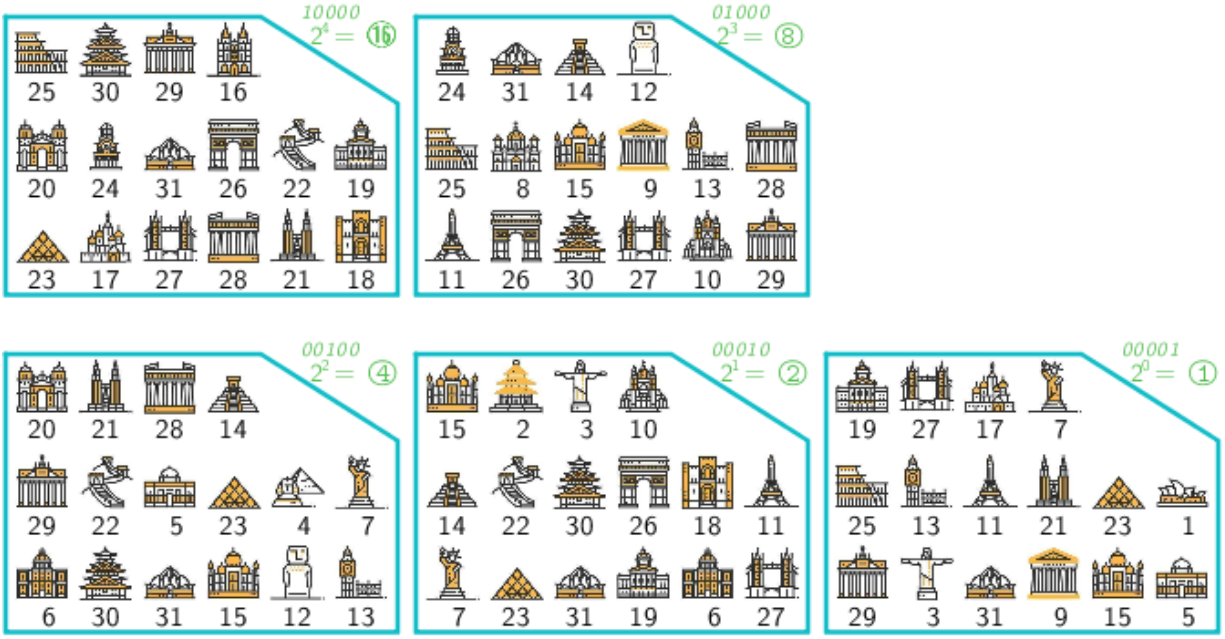
- **Truncar**. Tomamos las **primeras cifras** y prescindimos de las demás a partir de un cierto orden, sustituyéndolas por cero.
  Por ejemplo,
  - 374 truncado a las decenas es 370, y truncado a las centenas es 300.
  - 2459 truncado a las decenas es 2450, a las centenas es 2400, y a los millares es 2000.
- **Redondear**. Nos quedamos con el **número más cercano** al correcto entre el numero truncado o el siguiente. Para **calcularlo**, nos fijamos en la primera cifra que no se cambió por cero, y si la siguiente era mayor o igual que 5, se aumenta una unidad.
  Por ejemplo,
  - 374 redondeado a las decenas es 370, pero redondeado a las centenas es 400, pues 374 está más cerca de 400 que de 300.
  - 2459 redondeado a las decenas es 2460, a las centenas es 2500, y a los millares es 2000.

2.6. Potencias y sistemas de numeración

Alicia ha estado investigando unos trucos de magia relacionados con las potencias y los sistemas de numeración. ¿Sabías que no siempre se han representado los números como hacemos ahora? ¿Recuerdas los números romanos?

Ahora usamos un *sistema posicional* (el valor de cada cifra depende de la posición que ocupa), basado en **potencias de 10**, aunque también existe el sistema binario (basado en las **potencias de 2**), etc.

Alicia ha traído a clase estas fichas, que permiten averiguar mágicamente el monumento en hayamos elegido. Lo único que hay que hacer es decirle cuáles son las fichas en las que aparece.

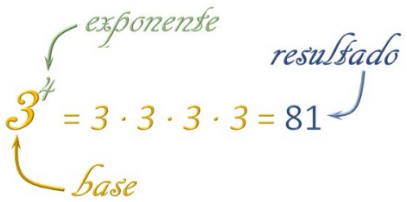


Para averiguarlo, le basta con sumar los números que aparecen escritos en verde en cada esquina de las fichas elegidas.

Cada ficha contiene todos los números que, en base 2, tienen la *cifra 1* en la posición indicada. Al decir las fichas en que aparece ¡hemos codificado el número en base 2! Por eso funciona su truco.

Potencia de un número natural

Potencia: es multiplicar varias veces el mismo número por si mismo. El número que multiplicamos se llama base, y el exponente es el número de veces que se multiplica. Por ejemplo:



Cuadrados perfectos: son los números naturales al cuadrado. Por ejemplo,

$2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $11^2=121$, $12^2=144$, $13^2=169$, $14^2=196$, etc.

Y de la misma forma, los **cubos perfectos** serían: $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, etc.

Las potencias tienen **propiedades** que nos facilitan los cálculos con ellas. Por ejemplo, para calcular $5^8:5^6$, no hace falta hallar cada potencia. Podemos restar los exponentes: 8-6=2, y el resultado es $5^2=25$.

En el siguiente esquema tenemos las principales propiedades: para producto y cociente (con la misma base o los mismos exponentes) y potencia de potencia.

***Propiedades** de las potencias :*

Producto	*Misma* ***BASE:*** *sumamos los exponentes*	$5^9 \cdot 5^2 = 5^{9+2} = 5^{11}$
	Mismos ***EXPONENTES:*** *multiplicamos las bases*	$9^6 \cdot 4^6 = (9 \cdot 4)^6 = 36^6$
Cociente	*Misma* ***BASE:*** *restamos los exponentes*	$5^{11} : 5^2 = 5^{11-2} = 5^9$
	Mismos ***EXPONENTES:*** *dividimos las bases*	$36^6 : 4^6 = (36 : 4)^6 = 9^6$
Potencia ***de potencia :*** *multiplicamos los exponentes*		$(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$
Exponente 1 : *igual que no poner exponente*		$5^1 = 5$
Exponente 0 : *el resultado es 1* *(excepto 0^0, que no existe)*		$5^0 = 1$
Suma/resta : NO HAY propiedades.		$3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \neq 9^2 = 81$

Ejercicio 4. Usa las propiedades para expresar como una única potencia:

a)

[1] $6^5 \cdot 5^5 \cdot 30^8 =$	[6] $80^7 : 2^7 : 5^7 =$
[2] $11^{12} \cdot 11^9 : 11^2 =$	[7] $3^5 \cdot 2^5 =$
[3] $5^5 : 5 =$	[8] $4^{10} \cdot 4 \cdot 4^8 =$
[4] $(11^{11} : 11^2)^2 =$	[9] $(4^2)^2 \cdot 5^4 =$
[5] $25^4 : 5^4 =$	[10] $(11^4)^3 =$

b)

[1] $(8^{10} \cdot 8^6)^3 =$	[6] $14^4 : 14^2 \cdot 3^2 =$
[2] $20^3 : 5^3 =$	[7] $(8^5)^4 : 2^{20} =$
[3] $(8^8)^5 =$	[8] $25^6 : 5^6 \cdot 5^8 =$
[4] $4^9 : 4^2 =$	[9] $4^{10} \cdot 8^{10} : 32^7 =$
[5] $11^2 \cdot 11^3 =$	[10] $5^6 \cdot 3^6 \cdot 5^6 =$

c)

[1] $4^9 \cdot 4^5 =$	[6] $5^6 \cdot 9^6 \cdot 45^5 =$
[2] $8^9 \cdot 3^9 \cdot 8^9 =$	[7] $2^9 : 2^5 =$
[3] $(6^2)^2 : 2^4 =$	[8] $5^6 \cdot 5^2 \cdot 4^8 =$
[4] $8^{12} : 4^{12} : 2^7 =$	[9] $(8^8)^4 =$
[5] $(3^8 : 3)^2 =$	[10] $27^9 : 3^9 =$

d)

[1] $4^8 : 2^8 =$	[6] $6^{10} \cdot 6^8 =$
[2] $12^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 =$	[7] $14^7 \cdot 14 : 14^6 =$
[3] $24^{16} : 24^8 : 4^8 =$	[8] $(4^9 \cdot 3^9)^{10} =$
[4] $(12^2)^8 =$	[9] $(5^4)^3 \cdot 5^5 =$
[5] $10^7 : 5^7 \cdot 3^7 =$	[10] $12^{11} : 12^3 =$

Sistemas de numeración

El sistema en **base 10** es **posicional**: el valor de cada dígito se calcula multiplicando por una potencia de base 10 con exponente el orden que ocupa. Por ejemplo,

$$70522 = 70\,000 + 500 + 20 + 2$$
$$7\cdot 10^4 + 5\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 2.$$

En **base 2** (binario), se usan las **cifras 0 y 1**. Por ejemplo,

$$\underbrace{10111}_{base\ 2} = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1 = \underbrace{23}_{base\ 10}$$

$$\underbrace{13}_{base\ 10} = \underbrace{1101}_{base\ 2}$$

13	2	
①	6	2
⓪	3	2
①	1	2
①	0	

Ejercicio 5. *Efectúa los cambios de base:*

a) Base 2 : $\underbrace{1101}_{base\ 2} = \underbrace{\quad}_{base\ 10}$; $\underbrace{7}_{base\ 10} = \underbrace{\quad}_{base\ 2}$

b) Base 3 : $\underbrace{212}_{base\ 3} = \underbrace{\quad}_{base\ 10}$; $\underbrace{80}_{base\ 10} = \underbrace{\quad}_{base\ 3}$

c) Base 4 : $\underbrace{3221}_{base\ 4} = \underbrace{\quad}_{base\ 10}$; $\underbrace{57}_{base\ 10} = \underbrace{\quad}_{base\ 4}$

Raíces cuadradas

Raíz cuadrada: es la operación contraria a elevar al cuadrado. Se trata de encontrar un número que, elevado al cuadrado, sea igual al **radicando** (número del que queremos sacar la raíz). Por ejemplo,

$3^2=9$, así que $\sqrt{9}=3$	$5^2=25$, así que $\sqrt{25}=5$	$11^2=121$, así que $\sqrt{121}=11$.

Aproximación de raíces

Para calcular una raíz cuadrada, podemos buscar con qué cuadrado se corresponde. Pero no siempre hay un número exacto. Por ejemplo,

- Para calcular $\sqrt{100}=10$, no hay números naturales que al cuadrado sean 10.
  El que más se acerca es 3, porque $3^2=9$; faltaría 1 unidad para llegar a 10. Por eso, decimos que la **raíz entera** de 10 es 3 y el **resto** es 1.
- Igualmente, para $\sqrt{38}$, la raíz entera es 6, y el resto es 2, porque $6^2=36$, y 36+2=38.

Para números grandes, podemos hacer una **aproximación** de forma rápida. Por ejemplo, para saber que $\sqrt{536}$, es "algo más de 20", tan solo hay que:

1. Agrupar las cifras de dos en dos empezando por la derecha. (En este caso, 5.36)
2. El número de cifras de la raíz es el número de grupos obtenido. (En este caso, habrá 2 cifras)
3. La primera cifra de la raíz es la raíz del grupo de la izquierda. (La raíz de 5 es 2; y como en total hay dos cifras, la raíz será: algo más de 20.)

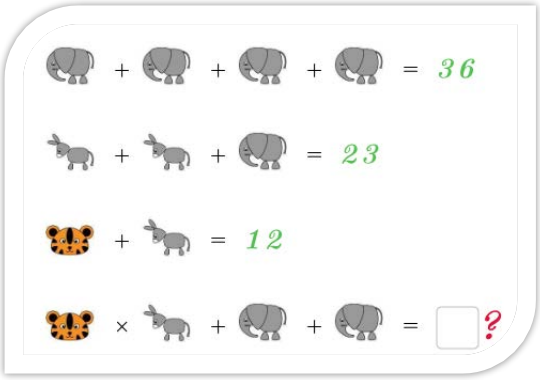
Ejercicio 6. *Da una aproximación de las siguientes raíces cuadradas:*

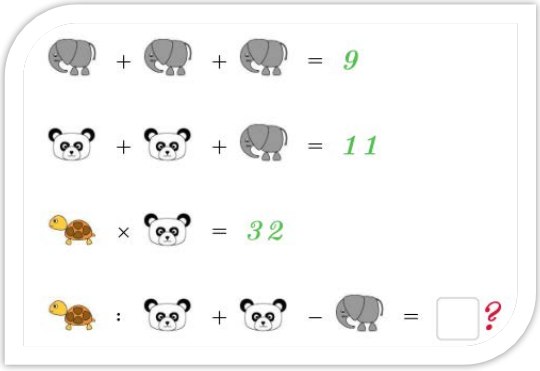
a) $\sqrt{83214}$ *b)* $\sqrt{512346}$ *c)* $\sqrt{7012483}$ *d)* $\sqrt{32210129}$ *e)* $\sqrt{494289103}$

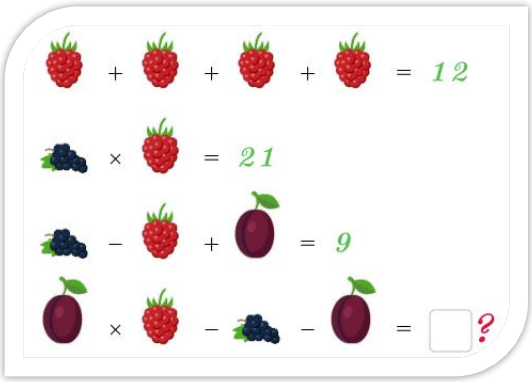
3. Operaciones combinadas

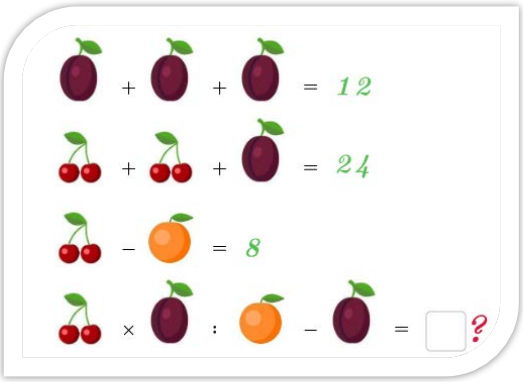
¿Cuánto vale?

Alberto ha encontrado algunos juegos de números para ver qué tal se nos da razonar y calcular... Aunque el gran reto era conseguir que hacer operaciones fuese entretenido ¡seguro que sí!









3.1. Jerarquía de operaciones

Cuando tenemos expresiones con operaciones diferentes, no siempre se hacen de izquierda a derecha. Tenemos que seguir el siguiente orden (jerarquía) de las operaciones:

Jerarquía de las Operaciones

1) Paréntesis
2) Potencias y raíces
3) Multiplicaciones y divisiones
4) Sumas y restas

Por ejemplo,

- Si queremos calcular $2 + 3 \cdot 5$, el resultado es $2 + 15 = 17$, ¡y **no** es $5 \cdot 5 = 25$!

Cuando son del mismo tipo, se hacen de izquierda a derecha. Pero **¡cuidado!** si queremos agruparlas no podemos saltarnos el orden: si un número está restando, no lo podremos sumar/restar con el siguiente:

- $2 + 5 – 3 + 1 = 7 – 3 + 1 = 5$, ¡pero **no** es igual a $7 – 4$!

Ejercicio 7. *Resuelve siguiendo la jerarquía de las operaciones*

a)

[1]	$8+10\cdot 2-11=$
[2]	$(2+6)\cdot 2-3=$
[3]	$11\cdot 9\cdot 7-130=$
[4]	$11-9+7-5=$
[5]	$160:(4\cdot 10)-2=$
[6]	$9-5+8-10=$
[7]	$7-7+3+8=$
[8]	$11-11+7-3=$
[9]	$3:(11-10)+5=$
[10]	$12-4+5-10=$

b)

[1]	$11\cdot(7+3)+10=$
[2]	$(7-5)\cdot 4-1=$
[3]	$3\cdot(12-10)+3=$
[4]	$10-9-1+4=$
[5]	$27:9+2-4=$
[6]	$3\cdot 3+6-13=$
[7]	$12-2+11+11=$
[8]	$13-(9+4)+5=$
[9]	$12-9-1-1=$
[10]	$8-(12-8)-3=$

c)

[1]	$440:(10\cdot 11)+11=$
[2]	$10+11+9+3=$
[3]	$11-(4-3)-1=$
[4]	$7+7+6-6=$
[5]	$4\cdot 5\cdot 10-129=$
[6]	$7-(11-8)-2=$
[7]	$4+7+2-5=$
[8]	$22:(9+2)-1=$
[9]	$2\cdot(10+6)-18=$
[10]	$11\cdot(7-2)-13=$

Ejercicio 8. Calcula, siguiendo la jerarquía de las operaciones:

a) $10-2\cdot(9-2\cdot 4+1)-3+2=$

b) $(3^2-2^3)\cdot 2-5^0+\sqrt{144}=$

c) $15^2-14^6:14^4-2\cdot\big(10-(6-5)\big)=$

d) $10+3(9-8:4+1)-15-2+6=$

e) $3-1+2\cdot\big(5-(10-8)\big)+11^2-10^4:10^2=$

f) $(3^3-5^2)\cdot 3^1+\sqrt{100-6^2}+5^0=$

g) $6+(9-3+4)\cdot 2-1+3=$

h) $(20-2^4)3+5^0-\sqrt{15\cdot 10-2\cdot 3}=$

i) $11^4:11^2-10^6:10^4-1+2\cdot\big(3-(9-8)\big)=$

j) $2+2\cdot(3\cdot 5-6^2:3)-4-3+5-2=$

k) $7-2\cdot(5-(5-3))+11^0=$

l) $2\cdot(3^3-5^2)\cdot 3^1+\sqrt{2^3+3+11\cdot 10}-4+1=$

Ejercicio 9. Calcula, siguiendo la jerarquía de las operaciones:

a) $6^0+6^1+6^2-5^0-5^1-5^2=$

b) $1+6-(5-3)+4-2+3=$

c) $(7^2-3^2):5^1-\sqrt{6\cdot 6+7\cdot 4}=$

d) $5+1-3+2-4-1+6=$

e) $10-2\cdot(3\cdot 2-20:4)+1-5+3=$

f) $3+2\cdot 4-3+5\cdot 3-2\cdot 6=$

g) $10-3\cdot(7-(5-3^0))=$

h) $7-2\cdot 3+5\cdot 7-5+10-5\cdot 8=$

i) $6\cdot(3^2-4)\cdot 8^0-\sqrt{5^2\cdot 4^2+15^2}=$

j) $10^2+(40^9:5^9):8^7-12^2=$

k) $\sqrt{17\cdot 10-1}-6+3\cdot 4-1-9=$

l) $56:8-2\cdot 3-5^0+\sqrt{2\cdot 10^2-2^2}=$

Soluciones *(ejercicios 8 y 9)*

Ejercicio 8	[a] 5	[b] 13	[c] 11	[d] 23	[e] 29	[f] 15
	[g] 28	[h] 1	[i] 24	[j] 4	[k] 2	[l] 20.
Ejercicio 9.	[a] 12	[b] 10	[c] 0	[d] 6	[e] 7	[f] 11
	[g] 1	[h] 1	[i] 5	[j] 20	[k] 9	[l] 14.

4. Problemas

Las unidades de medida del sistema internacional o del sexagesimal aparecen en multitud de situaciones de nuestra vida cotidiana. Aquí tenemos algunos ejemplos para practicar. Podemos comprobar las soluciones al final de los enunciados.

1. Los vehículos. Un camión transporta un coche y una furgoneta. El coche pesa 3582kg y la furgoneta 893 kg **más** que el coche. ¿Cuánto peso transporta el camión?

2. La tienda. Cuando Juan ha abierto su tienda esta mañana, había 685€ en la caja. Al cerrar esta tarde, había 2895€. ¿Cuál es el valor de las mercancías que ha vendido a lo largo del día?

3. El hotel. Luisa estuvo de vacaciones en un hotel en la playa. Una noche, preguntó y le dijeron que había 426 huéspedes alojados. A la mañana siguiente llegaron 178 clientes, y se fueron 215 de los antiguos clientes. ¿Cuántos huéspedes quedaron en el hotel?

4. El cine. Un cine ha vendido 458 entradas para la sesión de tarde y 137 entradas **menos** para la sesión nocturna. ¿Cuántas entradas ha vendido en total?

5. La casa. Pepe tiene 142 384€ en el banco, y gana 34 023€ en la lotería. ¿Cuánto dinero le hará falta para comprar una casa que vale 271 000€?

6. El almacén. El almacén de Patricio ha vendido hoy a un centro comercial 35 televisores de 127€ cada uno. ¿A cuánto ascenderá la factura?

7. El camión de arena. Un camión transporta 8 500kg de arena en cada viaje que hace. ¿Cuántos kilos habrá transportado en 18 viajes?

8. La fábrica. De cierta fábrica salen 624 coches al día. Si cada coche vale unos 19850€, ¿cuánto dinero supone 5 días de trabajo?

9. Alquiler. Una empresa paga semestralmente (180 días) 7920€ por el alquiler de sus instalaciones. ¿Cuánto les cuesta el alquiler cada día?

10. Harina. Un camión transporta 7850kg de harina, dispuesta en sacos de 50kg. ¿Cuántos sacos hay en el camión?

11. La feria. Los abuelos de Moisés les han dado 36€ a sus 3 nietos para que montarse en las atracciones de la feria. Deben repartirlo a partes iguales.

a) ¿Cuánto dinero le corresponde a cada nieto?
b) Si cada viaje vale 4€, ¿cuántas veces puede montarse cada uno?

12. Patatas. Lucas y Teresa han recogido hoy 283kg de patatas. Van a guardarlos en sacos de 5kg.

a) ¿Cuántos sacos llenarán?
b) ¿Cuántos kg de patatas sobran?

13. Beneficios. Los 4 socios de una pastelería han recaudado 871€ este fin de semana. Se han gastado 127€ en materiales. El resto, lo reparten a partes iguales. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

14. Los palés. Un camión lleva una carga de 2 578kg, consistente en un bidón de 130kg y 12 palés iguales. ¿Cuánto pesa cada palé?

15. Avicultura. En una granja avícola han recogido 585 huevos, que se colocarán en cartones de docena.

a) ¿Cuántos cartones llenarán?

b) ¿Cuántos huevos sobran?

16. Naranjas. En un almacén han recepcionado 4212kg de naranjas. Van a distribuirlas en cajas de 15kg.

a) ¿Cuántas cajas llenarán?

b) ¿Cuántos kg sobrarán?

17. Botellas. En una fábrica de vidrio producen 258 botellas cada minuto. ¿Cuántas botellas habrán producido en un cuarto de hora?

18. Recados. Laura ha ido al comercio con 280€ a por algunos encargos. Compró 1 colgante, 5 faldas, 1 vestido y 2 vaqueros.

a) ¿Cuánto dinero se gastó?

b) ¿Cuánto le sobró?

OFERTAS	€
mochila	15
camisa	22
falda	18
colgante	6
vestido	21

19. En la carnicería. El carnicero del barrio ha vendido hoy un total de 47kg de carne de ternera y 51 de cerdo. La ternera costaba a 12€ el kg, y el cerdo a 8€ el kg.

a) ¿Cuánto dinero ha ingresado por cada tipo de carne?

b) ¿Y en total?

20. De compras. Pedro fue a ir a la tienda a comprar. Sabemos que compró: 1 camiseta, 4 camisas y 1 corbata. Tiene 120€ para sus compras.

a) ¿Cuánto dinero se gastó en las compras?

b) ¿Cuánto le sobró del dinero que llevaba?

OFERTAS	€
vaquero	29
camisa	21
diadema	1
vestido	20
colgante	6
chaleco	12
camiseta	12
corbata	10

21. Ropa. Ángel tiene 100€ para comprar ropa. Ha elegido 1 camisa, 3 gorras y 4 camisetas.

a) ¿Cuánto dinero se gastará?

b) ¿Le sobrará dinero?

OFERTAS	€
camisa	19
bufanda	9
media	4
camiseta	12
gorra	10

4.1. Soluciones a los problemas

1. Transporta 8057kg.

2. Ha vendido por valor de 2210€

3. Quedaron 389 huéspedes.

4. Ha vendido 779 entradas.

5. Necesitará 94 593€.

6. La factura es de 4445€.

7. Habrá transportado 153000kg.

8. Son 61 932 000€.

9. Les cuesta 44€ diarios.

10. Hay 157 sacos de harina.

11. Son 12€ para cada uno, y pueden montarse 3 veces.

12. Llenan 56 sacos. Sobran 3kg.

13. Son 186€ cada uno.

14. Cada palé pesa 204kg.

15. Llenan 48 cartones y sobran 9 huevos.

16. Llenan 280 cajas. Sobran 12kg.

17. Producen 3870 botellas.

18. Se gasta 173€. Le sobran 170€.

19.Ternera: 564€, cerdo: 408. Total: 972€.

20. Se gasta 106€. Le sobran 14€.

21. Se gastará 97€. Le sobran 3€.

5. Problemas de Evaluaciones de Diagnóstico

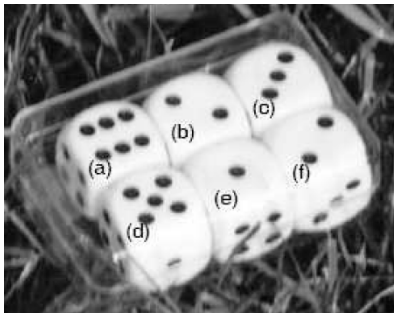
En cualquier situación de nuestra vida cotidiana pueden surgir problemas relacionados con los números naturales[1]. Resuelve los siguientes problemas:

1. Cubos

(Pruebas liberadas PISA)

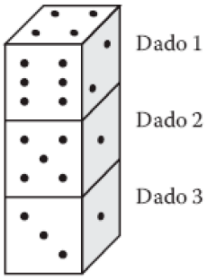
En esta fotografía puedes ver seis dados, etiquetados desde (a) hasta (f). Hay una regla que es válida para todos los dados:

En todo dado, la suma de los puntos de cada dos caras opuestas es siete



PREGUNTA 1. Escribe en cada casilla de la tabla siguiente el número de puntos de la cara inferior del dado correspondiente al de la foto.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)



PREGUNTA 2. A la derecha se pueden ver tres dados colocados uno encima del otro. El dado 1 tiene cuatro puntos en la cara de arriba. ¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras horizontales que no se pueden ver (cara de abajo del dado 1, caras de arriba y de abajo de los dados 2 y 3)?

2. Estanterías

(Pruebas liberadas PISA)

Para construir una estantería un carpintero necesita lo siguiente:

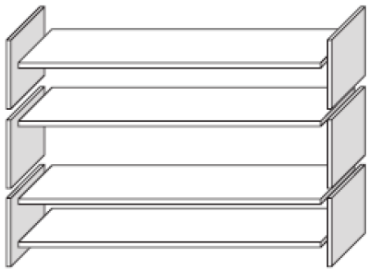
4 tablas largas de madera,

6 tablas cortas de madera,

12 ganchos pequeños,

2 ganchos grandes,

14 tornillos.



PREGUNTA 1: El carpintero tiene en el almacén 26 tablas largas de madera, 33 tablas cortas de madera, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes y 510 tornillos.

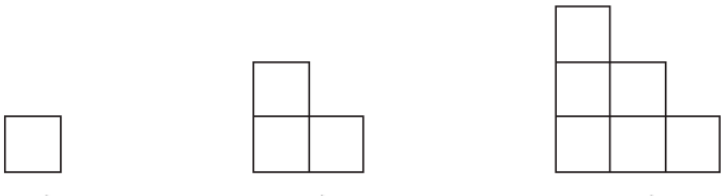
¿Cuántas estanterías completas puede construir este carpintero?

[1] Junto a cada problema aparece indicada la evaluación de diagnóstico en la que fue propuesto.

3. Esquema de escalera

(Pruebas liberadas PISA)

Roberto construye el esquema de una escalera usando cuadrados. He aquí los pasos que sigue:



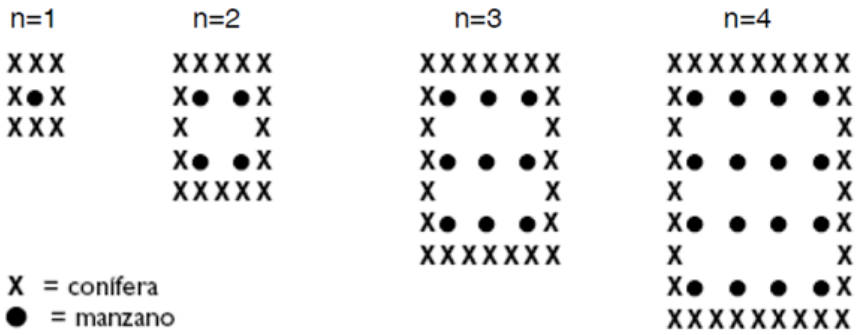
Pregunta 1. Como se puede ver, utiliza un cuadrado para el Nivel 1, tres cuadrados para el Nivel 2, y seis para el Nivel 3.
¿Cuántos cuadrados en total deberá usar para construir hasta el cuarto nivel?.

4. Manzanos

(Pruebas liberadas PISA)

Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado. Con objeto de proteger los manzanos del viento planta coníferas alrededor de la totalidad del huerto.

Aquí ves un esquema de esta situación donde se puede apreciar la colocación de los manzanos y de las coníferas para cualquier número (n) de filas de manzanos:



PREGUNTA 1. Completa la tabla:

n=	Número de manzanos	Números de coníferas
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

PREGUNTA 2. *(adaptada)* Podemos calcular el número de manzanos y coníferas:

Manzanos: elevando al cuadrado el número de filas
Coníferas: multiplicando las filas por 8.

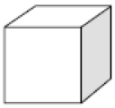
Razona si habrá algún número de filas para el que coincida el número de manzanos y coníferas.

PREGUNTA 3.: Supongamos que el agricultor quiere plantar un huerto mucho mayor, con muchas filas de árboles. A medida que el agricultor vaya aumentando el tamaño del huerto, ¿qué se incrementará más rápidamente: el número de manzanos o el de coníferas?
Explica cómo has hallado la respuesta.

5. Construyendo bloques

(Pruebas liberadas PISA)

A Susana le gusta construir bloques con cubos pequeños como el que se muestra en este gráfico:



Cubo pequeño

Susana tiene muchos cubos pequeños como éste. Utiliza pegamento para unir los cubos y construir otros bloques. Primero Susana pega ocho cubos para hacer el bloque que se muestra en el gráfico A:

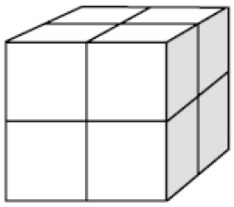


Gráfico A

Luego Susana hace los bloques macizos que se muestran en los gráficos B y C:

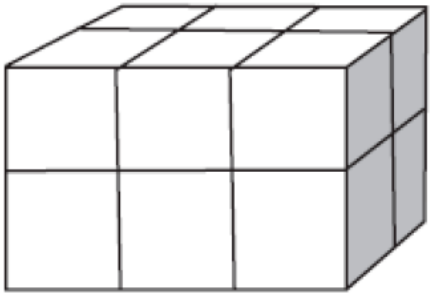


Gráfico B

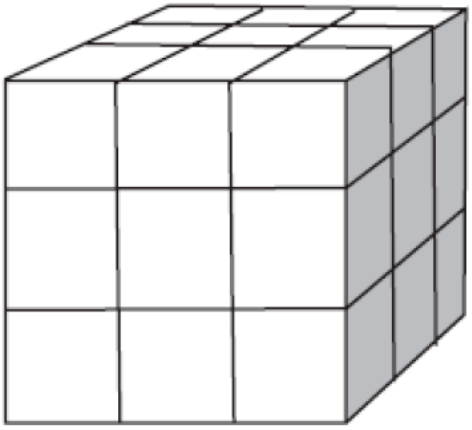


Gráfico C

PREGUNTA 1. ¿Cuántos cubos pequeños necesitará Susana para hacer el bloque que se muestra en el gráfico B?

PREGUNTA 2. ¿Cuántos cubos pequeños necesitará Susana para construir el bloque macizo que se muestra en el gráfico C?

PREGUNTA 3. ¿Cuántos cubos pequeños necesitará Susana para construir el bloque macizo que se muestra en el gráfico C?

6. Monopatín

(Pruebas liberadas PISA)

Marcos es un gran fan del monopatín. Entra en una tienda denominada PATINADORES para mirar algunos precios.

En esta tienda puedes comprar un monopatín completo. Pero también puedes comprar una tabla, un juego de 4 ruedas, un juego de 2 ejes y un conjunto de piezas para ensamblar los tres componentes anteriores y montar tu propio monopatín.

Los precios de los productos de la tienda son: *(zed es un tipo de moneda inventado)*

Producto	Precio en zeds	
Monopatín completo	82 o 84	
Tabla	40, 60 o 65	
Un juego de cuatro ruedas	14 o 36	
Un juego de dos ejes	16	
Un juego de piezas para montar (cojinetes, almohadillas de goma, tornillos y tuercas)	10 o 20	

PREGUNTA 1. A máximo de los monopatines montados por uno mismo en esta tienda?

(a) Precio máximo: _____ zeds

(b) Precio mínimo: _____ zeds

PREGUNTA 2. La tienda ofrece tres tablas diferentes, dos juegos diferentes de ruedas y dos conjuntos diferentes de piezas para montar. Sólo hay un juego de ejes para elegir.

¿Cuántos monopatines distintos puede construir Marcos?

a) 6 ***b)*** 8 ***c)*** 10 ***d)*** 12

PREGUNTA 3. Marcos tiene 120 zeds para gastar y quiere comprar el monopatín más caro que pueda. ¿Cuánto dinero puede gastar Marcos en cada uno de los 4 componentes?

Componente	Cantidad (zeds)
Tabla	
Ruedas	
Ejes	
Piezas para ensamblar	

7. Divertilandia

(Extremadura 2013)

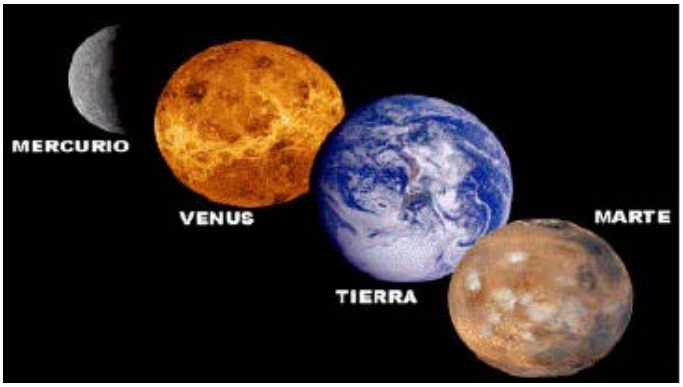
El pasado 23 de marzo fue mi cumpleaños y lo celebré con los siguientes amigos y amigas en el parque de atracciones "Divertilandia": Juan, María, Pepe, Antonio, Marta, Lucía, Marcos y Raúl.

PREGUNTA 1. ¿Todos estábamos deseosos de montarnos en la montaña rusa "Superman", la más grande del mundo. Cada hora hay de media unos 15 viajes, y en cada viaje pueden montarse 35 personas. Sabiendo que las atracciones de "Divertilandia" abren a las 09:00 horas y cierran a las 20:00 horas, **¿cuántas personas podrían montarse durante un día?**

8. Los planetas terrestres

(Extremadura 2010)

Los planetas terrestres son los cuatro del Sistema Solar más cercanos al Sol: Mercurio, Venus, Tierra y Marte.



En la siguiente tabla se muestran una serie de datos de estos cuatro planetas:

	Diámetro (km)	Distancia al Sol (millones de km)
Mercurio	4878	57
Venus	12104	108
Tierra	12756	150
Marte	6794	228

PREGUNTA 1. El cometa Halley pasa cerca de la órbita terrestre cada 75 años. La última vez que fue visto cerca de la Tierra fue en el año 1986, ¿cuántos años quedan para que sea visto de nuevo en la Tierra?

PREGUNTA 2. Observa la distancia al Sol (en millones de kilómetros) de Mercurio y Marte. ¿Observas alguna relación entre las dos medidas? Plantea la operación adecuada y selecciona la solución correcta.

A. La distancia de Marte al Sol es tres veces la de Mercurio.

B. La distancia de Marte al Sol es cuatro veces la de Mercurio.

C. La distancia de Marte al Sol es cinco veces la de Mercurio.

D. La distancia de Marte al Sol es una vez la de Mercurio.

E. La distancia de Marte al Sol es seis veces la de Mercurio.

9. Grabando música

(Andalucía 2011)

Julia tiene un MP4 con 2GB libres. Quiere prepararlo con música para un viaje que tiene previsto estas vacaciones y ha comprobado que cada canción ocupa 5 megabytes (MB).

Para responder a las siguientes preguntas, considera que 1GB tiene 1000MB.

PREGUNTA 1. Completa la siguiente tabla:

Número de canciones	Espacio ocupado
0	
10	
20	
30	
40	

PREGUNTA 2. ¿Podrá grabar 500 canciones? ¿Por qué?

10. El valor de las palabras

(Andalucía 2010)

En el juego de "Palabras cruzadas", cada letra del abecedario tiene un valor numérico. El valor de cada palabra se calcula sumando el valor de las letras que la componen. Sabemos el valor de algunas palabras, pero hemos perdido el de cada letra.

AMA vale 14.

ASA vale 16.

DAMA vale 21

MASA vale 20.

PREGUNTA 1. ¿Cuánto vale la palabra "**MAS**"?

Resumen. Números Naturales

Los **números naturales** son los que utilizamos para contar. Su símbolo matemático es $\mathbb{N}$. Son 0, 1, 2, 3, 4, …

- **Operaciones con números naturales:**

Multiplicar: es sumar muchas veces el mismo número. Para escribir una multiplicación usaremos un punto "·" en vez de una cruz "x". Por ejemplo, 2+2+2+2+2 = 2 · 5 = 10. En este caso, los **factores** son 2 y 5, y su **producto** 10.

Dividir: se usa siempre que hay que repartir en partes iguales. Recuerda que

dividendo es igual a **divisor** por **cociente** más **resto**.

Potencia: es multiplicar muchas veces el mismo número. Ejemplo: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$. Aquí, la **base** es 2 y el **exponente** 4.

Cuadrados perfectos: son los números naturales al cuadrado.
Por ejemplo, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, etc.

Raíz cuadrada: es encontrar un número que al cuadrado sea el **radicando** (el número del que queremos sacar la raíz). Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$, porque $3^2 = 9$.

Si no existe, se toma el que se acerque más al radicando.
Por ejemplo, la raíz de 10 es 3 (y el resto es 1), porque $3^2=9$ y 9+1=10.

Orden: Usamos los símbolos $<$ y $>$. Por ejemplo, decimos que $3 < 5$ y que $10 > 2$.

- **Aproximaciones**:

- **Truncar**: sustituimos las cifras por ceros hasta cierto orden.

- **Redondear**: truncamos, pero hay que aumentar en uno la primera cifra que no se cambió por 0 si la siguiente era mayor o igual que 5.

Por ejemplo, aproximando a las decenas, 128 se trunca a 120 y se redondea a 130.

- **Orden de las operaciones** (jerarquía de las operaciones)**:**

No siempre se hacen las cuentas de izquierda a derecha. Hay que hacerlas en este orden:

1) Paréntesis.

2) Potencias y raíces.

3) Multiplicaciones y divisiones

4) Sumas y restas.

• Propiedades de la suma y el producto

▸ Conmutativa:

el **orden** de los sumandos/factores no altera el resultado. Por ejemplo,

Suma : $10+5=5+10=15$. **Producto** : $4\cdot 2=2\cdot 4=8$.

▸ Asociativa:

podemos **agrupar** las sumas/productos como queramos. Por ejemplo,

Suma : $\underbrace{(9+6)+8}_{15+8=23}=\underbrace{9+(6+8)}_{9+14=23}$. **Producto** : $\underbrace{(4\cdot 2)\cdot 3}_{8\cdot 3=24}=\underbrace{4\cdot(2\cdot 3)}_{4\cdot 6=24}$.

▸ Elemento neutro:

al sumar/multiplicar por él, se obtiene el mismo número.

Suma: el **cero, 0**. Ejemplo: $0+9=9$. **Producto**: el **uno, 1**. Ejemplo: $6\cdot 1=6$.

▸ Distributiva:

para multiplicar una suma, podemos multiplicar primero cada sumando.

Ejemplos : $8\cdot(10+3)=80+24=104$, $(4+2)\cdot 5=20+10=30$.

• Propiedades de las potencias

Producto

- *Misma* ***BASE:*** *sumamos los exponentes* — $5^9\cdot 5^2=5^{9+2}=5^{11}$
- *Mismos* ***EXPONENTES:*** *multiplicamos las bases* — $9^6\cdot 4^6=(9\cdot 4)^6=36^6$

Cociente

- *Misma* ***BASE:*** *restamos los exponentes* — $5^{11}:5^2=5^{11-2}=5^9$
- *Mismos* ***EXPONENTES:*** *dividimos las bases* — $36^6:4^6=(36:4)^6=9^6$

Potencia ***de potencia :*** *multiplicamos los exponentes* — $(5^4)^3=5^{4\cdot 3}=5^{12}$

Exponente 1: *igual que no poner exponente* — $5^1=5$

Exponente 0: *el resultado es 1* *(excepto 0^0, que no existe)* — $5^0=1$

Suma/resta : *NO HAY propiedades.* — $3^2+6^2=9+36=45\neq 9^2=81$

Juegos matemágicos con… Números Naturales del Proyecto CREA se encuentra bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento-Compartir igual 4.0 International License