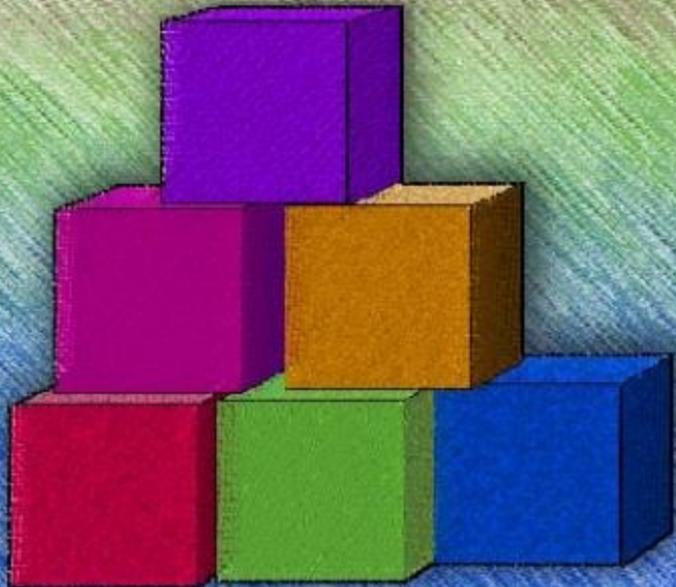


SUCESIONES



Estándares - Examen

B2.C3.1. Calcula términos de una **sucesión numérica recurrente** a partir de términos anteriores

B2.C3.2. . Identifica la presencia de las sucesiones en la naturaleza y las finanzas y obtiene una ley de formación para el término general.

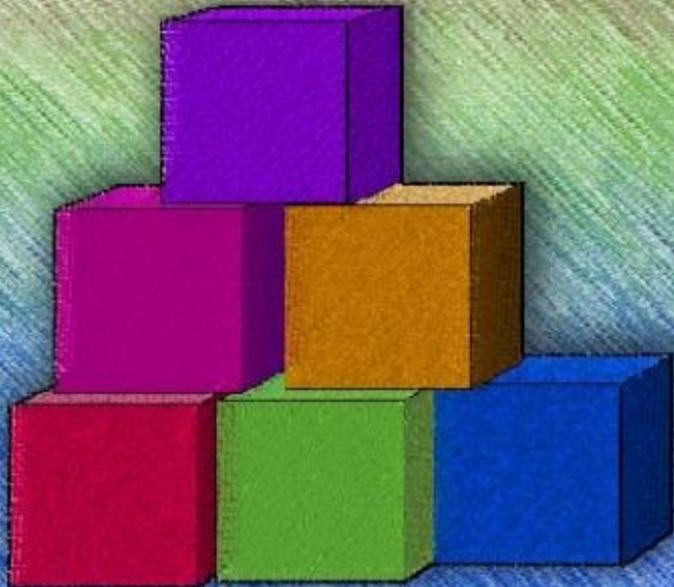
B2.C3.3. Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los “n” primeros términos, suma los infinitos términos de una progresión geométrica de razón menor que 1 y emplea estas fórmulas para resolver problemas.

SUCESIONES GENERALES

SUCESIONES ARITMÉTICAS

SUCESIONES GEOMÉTRICAS

SUCESIONES GENERALES



Una sucesión es un conjunto ordenado de números reales a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , A cada número de la sucesión se le llama término.

A la fórmula que nos permite calcular cualquier término de la sucesión le llamamos término general.

Ejemplos:

a) 1, 2, 3, 4, 5, ... // b) 3, 7, 11, 14, 17, ...

c) 3, 6, 12, 24, ... // d) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8 ,... (Sucesión de Fibonacci)

0

***Dada las siguientes sucesiones
calcula los términos indicados***

a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...

$a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_8 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

$a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_8 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$

c) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

$a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_8 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$

d) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

$a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_8 = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$

1

Indica que regla siguen estas sucesiones:

- 1,4,7,10,13,16,19...
- 1,2,4,8,16,32,...
- 1,4,9,16,25,36,...
- 1,-3,9,-27,81,...
- 2,4,6,10,16,26,...
- 110,90,70,50,30,...
- 6,8,16,18,26,28,36,38,...

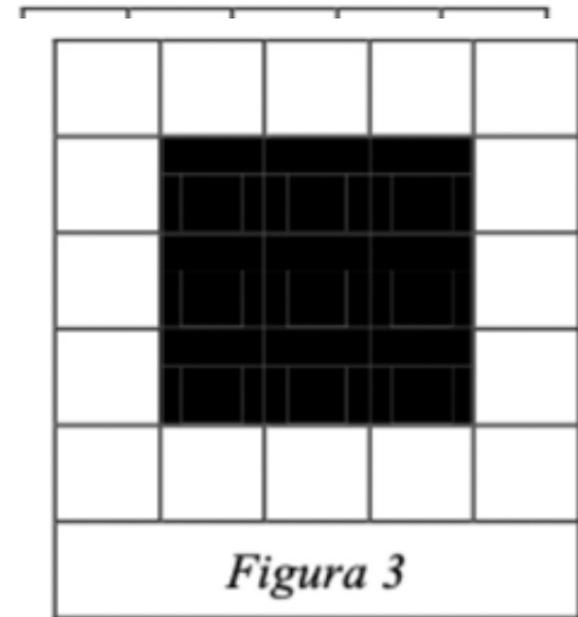
¿Cuál es el siguiente número de esta sucesión?

- 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, ...

Solución: Es 200 ya que todos empiezan por “d”

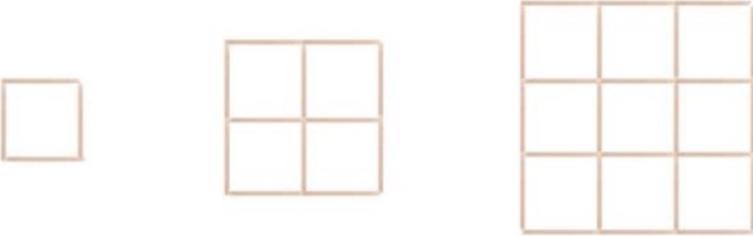
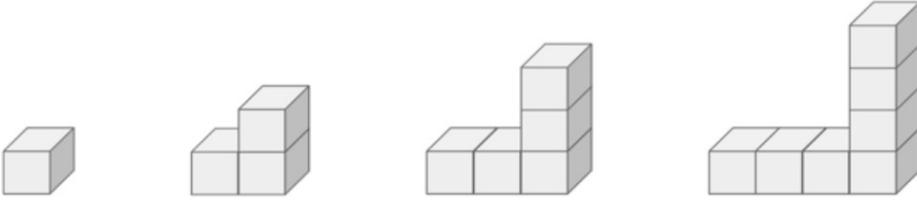
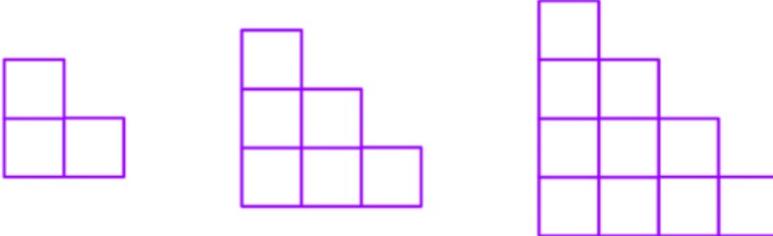
3

Observe la siguiente secuencia, cuente la cantidad de cuadros blancos en cada caso y determine el número de cuadros blancos de la figura n-ésima.



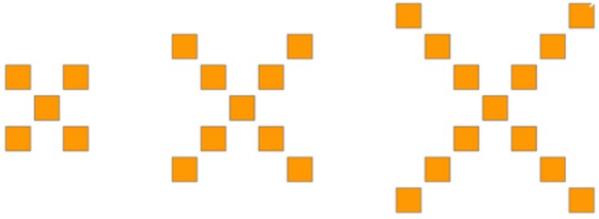
3

Adivina los siguientes términos de la sucesión y trata de obtener una fórmula para el término n-ésimo de la sucesión:.

Regularidad geométrica	Sucesión	Fórmula
		
		
		

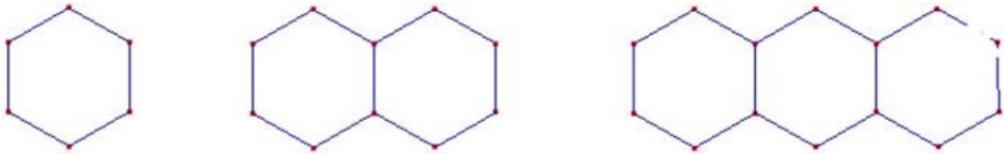
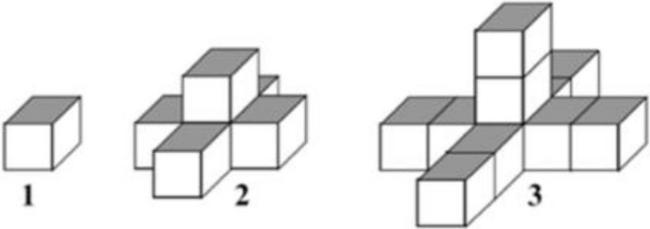
3

Adivina los siguientes términos de la sucesión y trata de obtener una fórmula para el término n-ésimo de la sucesión:.

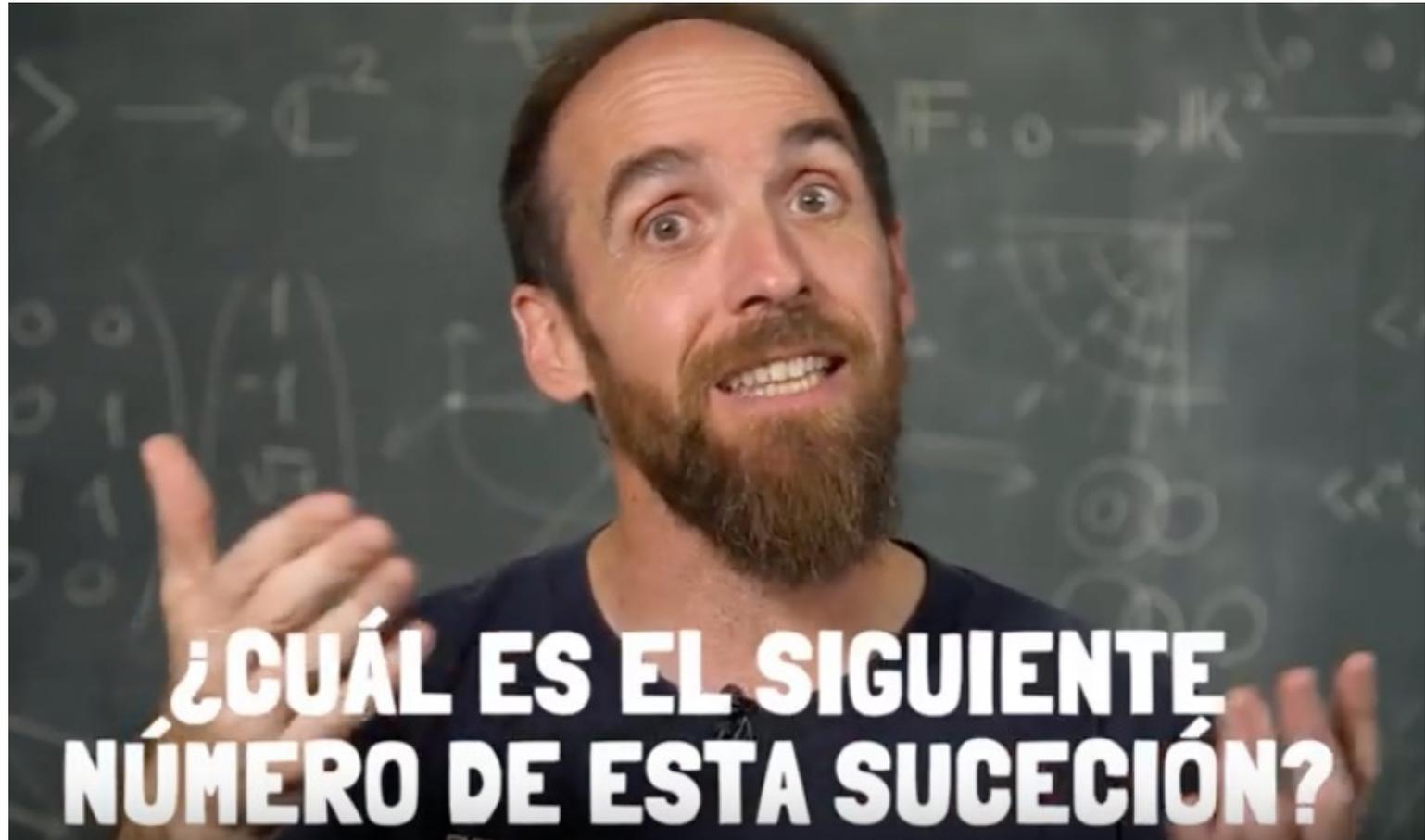
		
		
		
		

3

Adivina los siguientes términos de la sucesión y trata de obtener una fórmula para el término n-ésimo de la sucesión:.

Regularidad geométrica	Sucesión	Fórmula
		
 <p>1 2 3</p>		

VIDEO



<https://www.youtube.com/watch?v=YghBJcxkhPY>

Cálculos a partir del término general

- Término general como fórmula:

$$a_n = n^2 - 1 \rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0, a_2 = 2^2 - 1 = 3, a_3 = 3^2 - 1 = 8, \dots$$

- Término general expresado de forma recurrente

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 15 - 4 = 11$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 33 - 10 = 23$$

$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 23 - 2 \cdot 11 = 69 - 22 = 47$$



4 Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

Término general	Cálculo de sus 5 primeros términos
$a_n = 5 + 3(n+1)$	
$b_n = 2n^2 + 1$	
$c_n = (n+1)(n+2)$	
$d_n = \frac{2n-3}{3n}$	
$e_n = n^3$	
$f_n = 3n - 1$	
$g_n = 2^n - 6$	

5 Dadas las siguientes sucesiones recurrentes, escribe sus 5 primeros términos:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad , a_1=2 \quad , a_2=7$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

$$a_5 =$$

$$d_n = 5d_{n-1} - d_{n-2} \quad , d_1=2 \quad , d_2=4$$

$$d_3 =$$

$$d_4 =$$

$$d_5 =$$

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2} \quad , b_1=1 \quad , b_2=1$$

$$b_3 =$$

$$b_4 =$$

$$b_5 =$$

$$e_n = 3e_{n-1} - 2e_{n-2} \quad , e_1=1 \quad , e_2=1$$

$$e_3 =$$

$$e_4 =$$

$$e_5 =$$

6

Imagina que eres un investigador y estudias el crecimiento de 4 plantas. Al final has obtenido las siguientes 4 fórmulas te dan la altura en centímetros de las plantas en función de “n” que representa el número de días de vida de la planta.

a) $a_n = n^2 - n$ b) $b_n = 5n - 2$ c) $c_n = 3 \cdot (2^n)$ d) $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$, $d_0 = 1$, $d_1 = 3$

A los 6 días de vida. ¿Cuál de las 4 plantas es más alta?



FIBONACCI



- Leonardo de Pisa (Fibonacci) nació en Pisa en 1170 y vivió hasta 1250.
- Su padre era representante de una Casa comercial italiana en el norte de Argelia (África).
- Este hecho hizo que Fibonacci tuviera contacto con maestros árabes que le enseñaron Aritmética y el Sistema de Numeración hindu-arábico.
- Consiguió introducir este Sistema de Numeración en todo Europa y escribió muchos libros sobre este tema.

SUCESIÓN DE FIBONACCI

- La sucesión empieza con dos unos.
- Cualquier término de la sucesión se obtiene de sumar los dos anteriores.
Por ejemplo, el noveno término de la sucesión se construye sumando el séptimo y el octavo.
- La sucesión es infinita.

SUCESIÓN DE FIBONACCI

**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,
34, 55, 89, 144, 233, 377, 610
, 987, 1597, 2584, 4181, 6765,
10946, 17711, 28657, 46368, 75025,
121393, 196418, 317811, 514229,...**

**Fibonacci sin pretenderlo había hallado la llave
del crecimiento en la Naturaleza.**

PETALOS DE LAS FLORES

LOS PÉTALOS DE LAS FLORES SON NÚMEROS DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI.



1 pétalo
white calla lily



2 pétalos:
euphorbia



3 pétalos:
trillium



5 pétalos:
columbina



8 pétalos
bloodroot



13 pétalos:
black-eyed susan



21 pétalos
shasta daisy

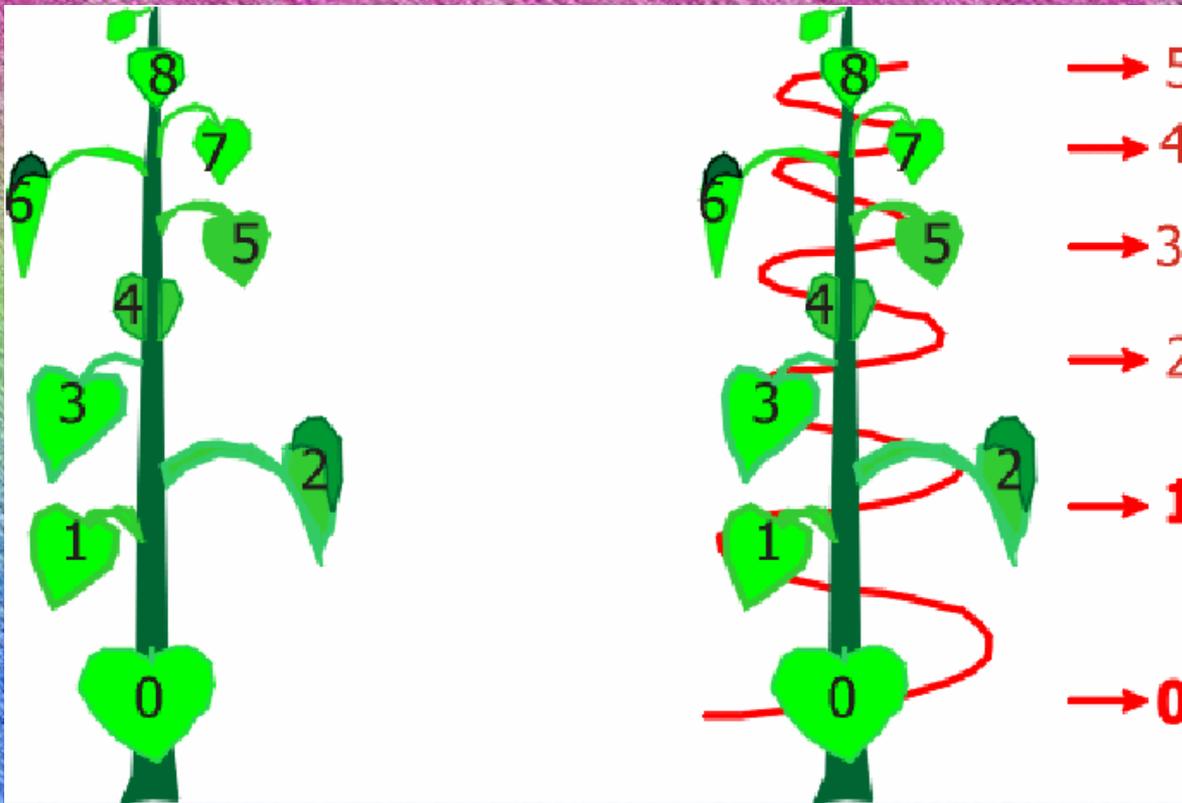


Las margaritas silvestres
suelen tener 34 pétalos

RAMAS Y HOJAS DE LAS PLANTAS

Las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior.

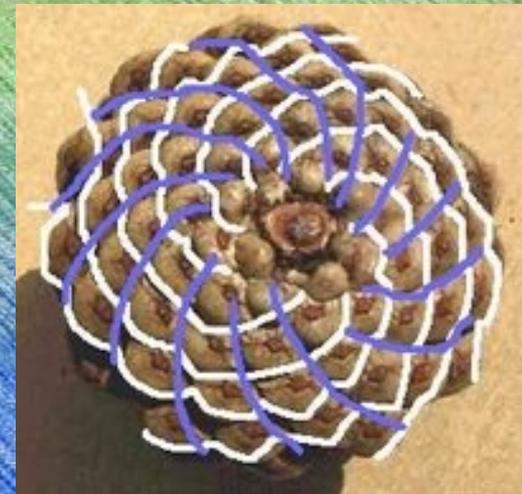
La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas números de la sucesión de Fibonacci.



PIÑA DE PINO

Si cogemos una Piña y contamos las hileras espirales de escamas. Descubriremos 8 espirales enrollándose hacia la izquierda y 13 espirales que se enrollan hacia la derecha, o bien 13 hacia la izquierda y 21 hacia la derecha, u otras parejas de números.

Lo más impactante es que estas parejas de números siempre son números consecutivos de la famosa sucesión de Fibonacci.



PIÑA TROPICAL



Las escamas de una piña forman una serie de espirales cuyo número pertenece siempre a la sucesión de Fibonacci

SEMILLAS DE GIRASOL



El número de espirales que forman las semillas de girasol son números de la sucesión de Fibonacci.

Película

“DOPO MEZZANOTTE”

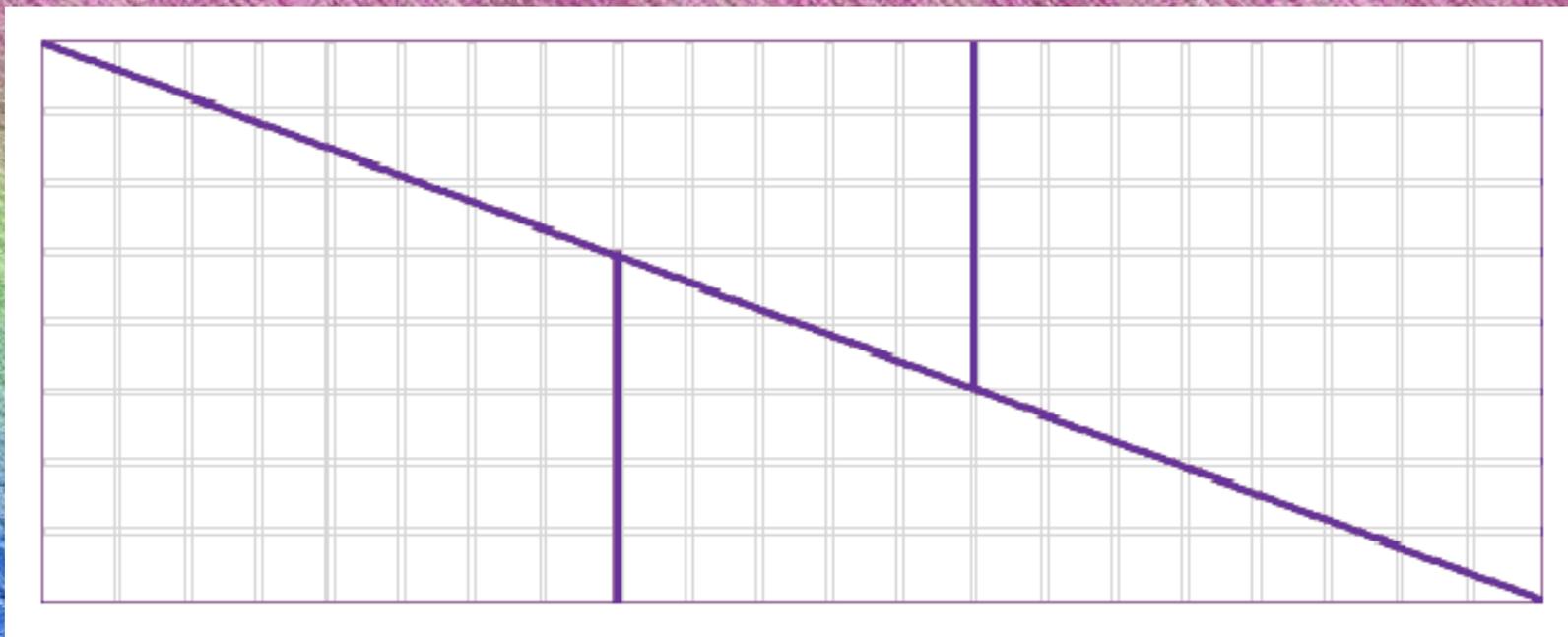
El protagonista usa sus
Conocimientos sobre la
Sucesión de Fibonacci
para ligar...



TRUCO DE FIBONACCI

Sobre un rectángulo de 21 cuadrados de ancho y 8 de alto, trazamos la diagonal principal y otras rectas a 8 cuadritos de las orillas como se muestra en el dibujo

8



21

TRUCO DE FIBONACCI

Si recortamos las piezas de ese rectángulo, podemos construir con ellas un cuadrado de lado 13.

a) Construye ese cuadrado.

b) ¿Qué área tiene el rectángulo?

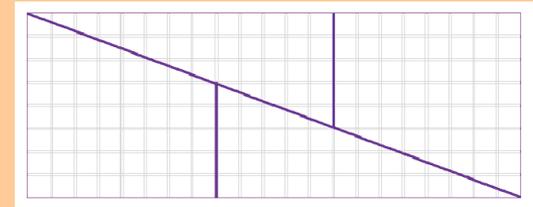
¿Qué área tiene el cuadrado?

¿Son iguales las áreas?

c) ¿Qué está sucediendo?

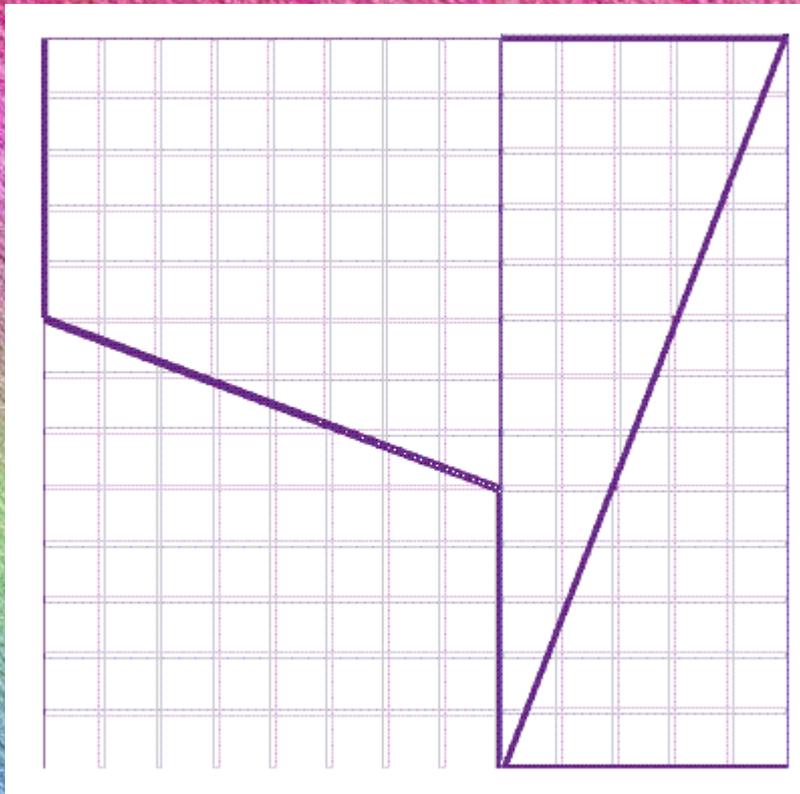
¿es correcto el resultado que obtuviste?

¿Tendrá algo que ver que 8, 13 y 21 sean números consecutivos de la sucesión de Fibonacci?



SOLUCIÓN AL PROBLEMA

13



13

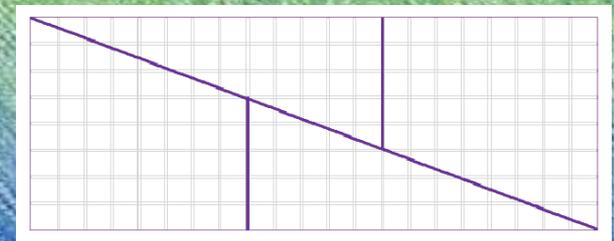
Este sería el cuadrado obtenido de lado 13 cuadraditos.

Su area es de $13 \times 13 = 169$.

La del rectangulo es $8 \times 21 = 168$

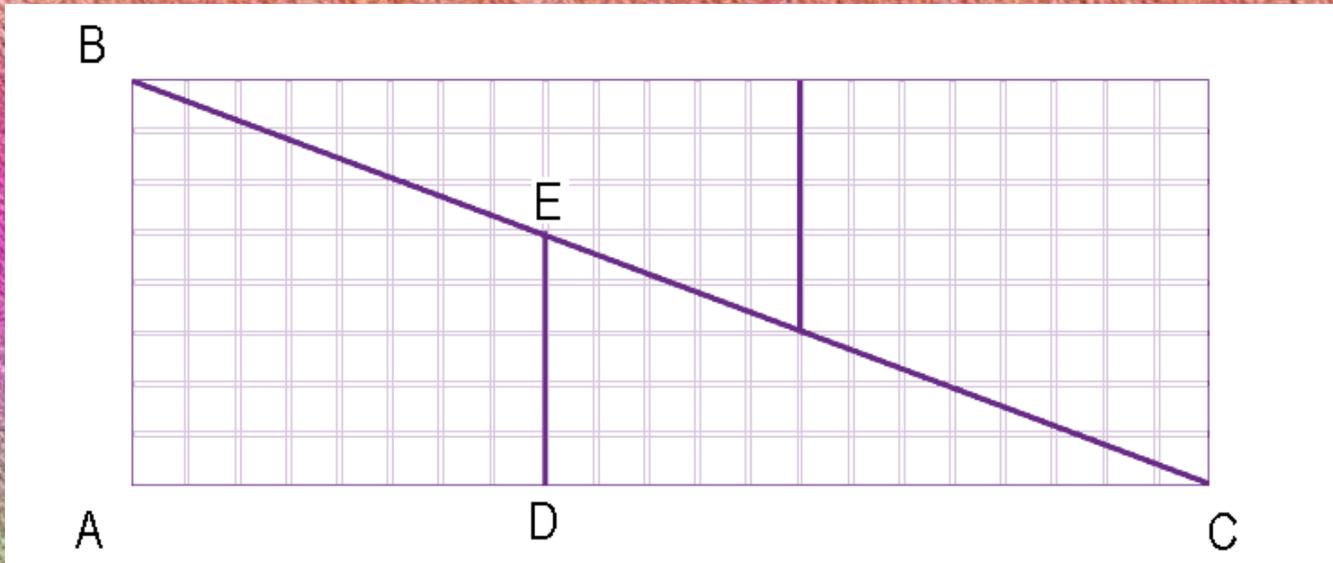
¿Cómo es posible que tengan área diferente?

8



21

SOLUCIÓN AL PROBLEMA



Parece que el lado DE mide cinco unidades. Así al mover las piezas parece que los lados de este cuadrado miden 13 unidades, sin embargo esto no es cierto.

Usando el Teorema de Tales de Mileto tenemos: $AB/AC=DE/DC$
Es decir: $8/12=DE/13 \rightarrow DE=104/21=4.952380952380..$

Chocolate Infinito

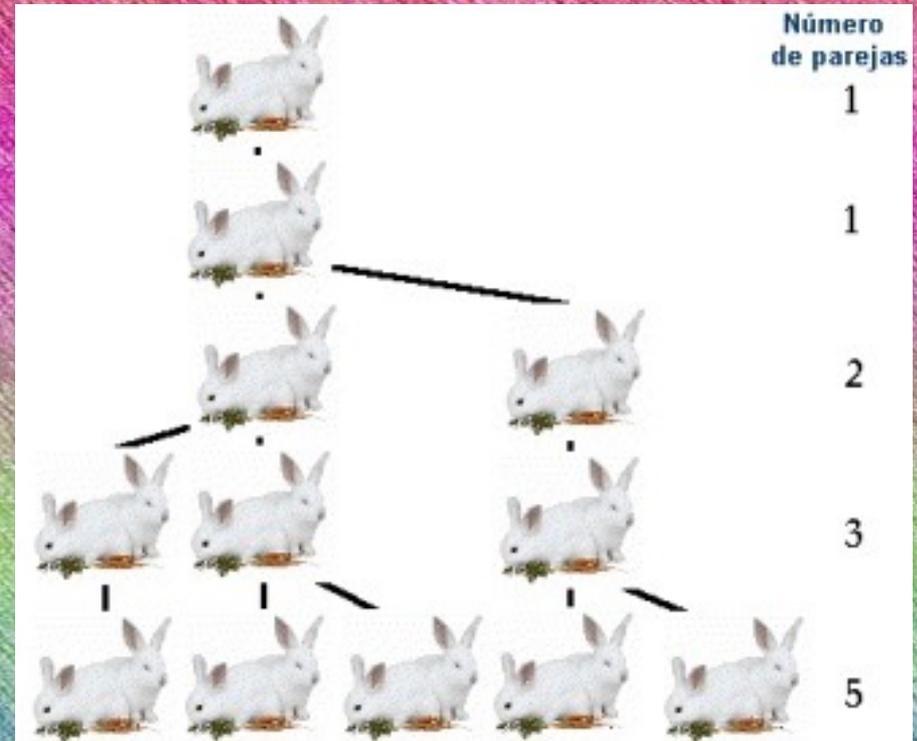


<https://www.youtube.com/watch?v=1ozW0Ow1AZ0>

REPRODUCCIÓN DE CONEJOS

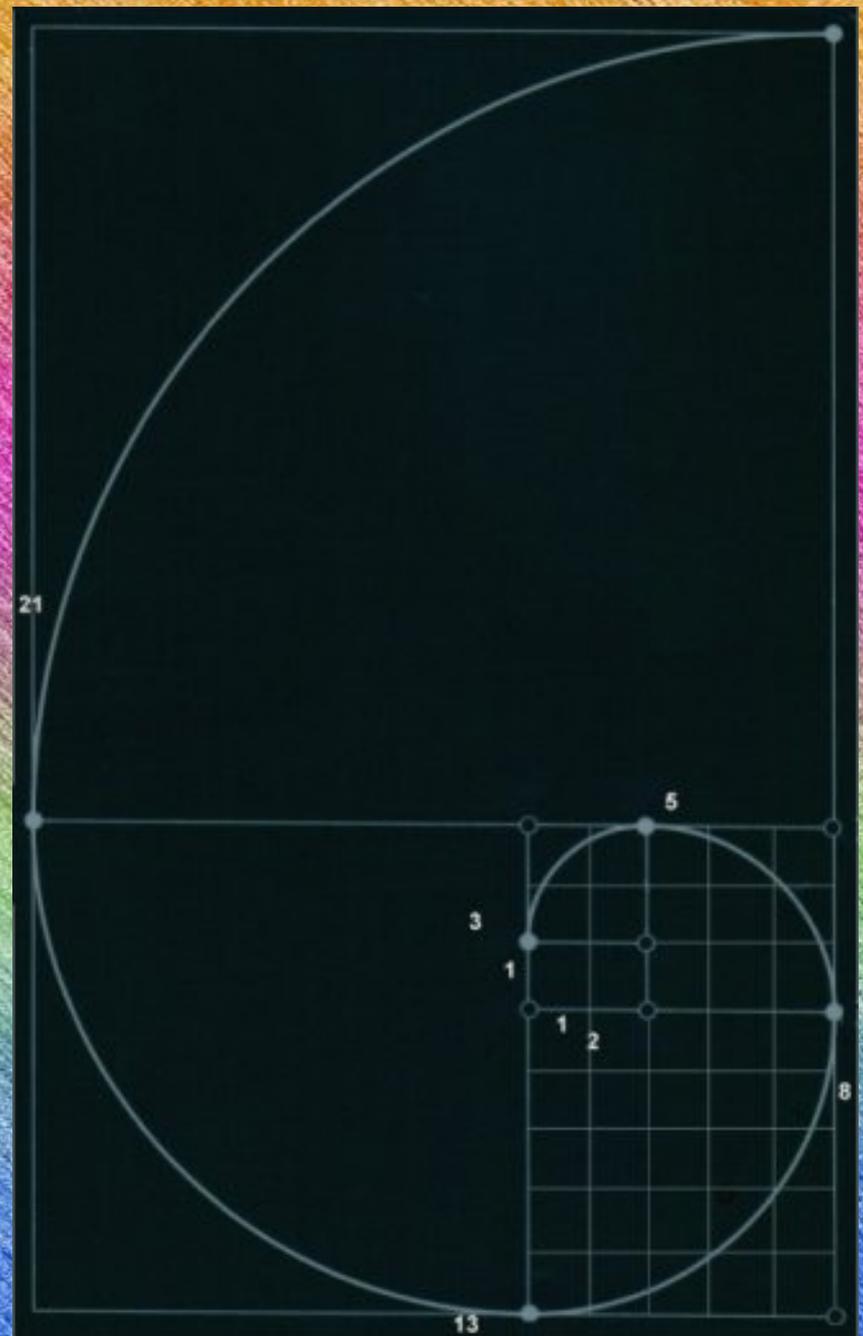
“Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, a partir de ese momento cada vez engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles engendrarán cada mes una pareja de conejos.

¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?”

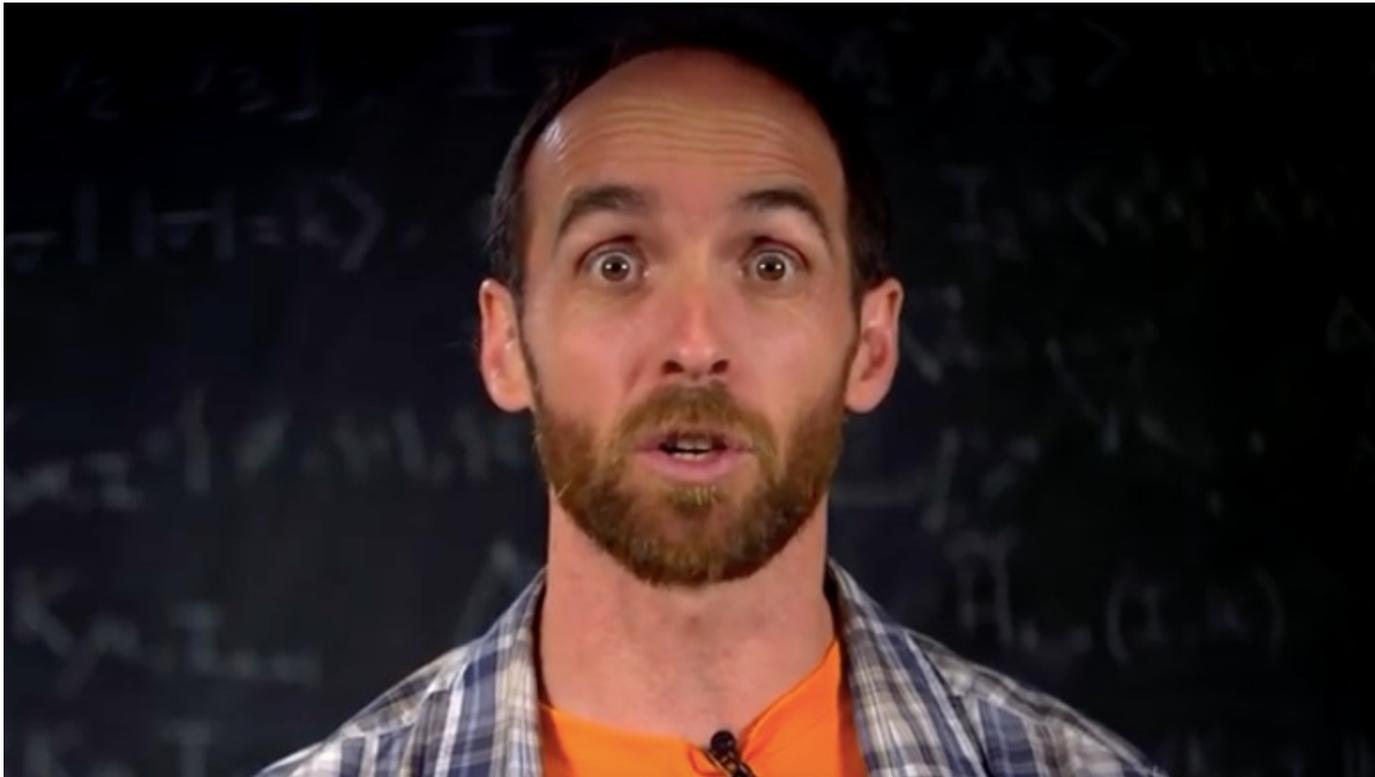


ESPIRALES

Estos números aparecen en la construcción de las espirales del crecimiento de conchas de moluscos, cuernos de rumiantes,...



VIDEO SUCESIÓN FIBONACCI (HASTA MINUTO 4:42)



<https://www.youtube.com/watch?v=yDyMSliKsxl>

RECTÁNGULOS DE FIBONACCI



¿Qué obtenemos al dividir bases entre alturas?

8

¿A qué número se aproximan?



13

OTRA PROPIEDAD DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

Piensa en dos números cualesquiera y construye, empezando con esos números, una sucesión como la de Fibonacci, es decir en la que cada término sea la suma de los dos anteriores.

La suma de los diez primeros términos de tu sucesión será once veces el séptimo término.



PROPIEDAD DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

Fijate que propiedades cumple la sucesión
1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

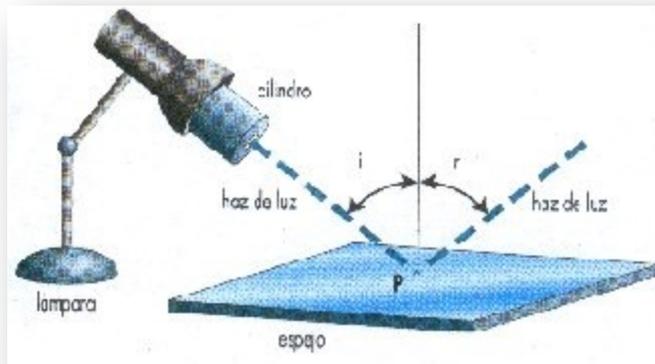
- $1^2+1^2=1*2$
- $1^2+1^2+2^2=2*3$
- $1^2+1^2+2^2+3^2=3*5$

Comprueba la siguiente igualdad que correspondería

$$f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n * f_{n+1}$$

Reflexión de la luz

Leo Moser estudió las trayectorias de rayos luminosos que inciden oblicuamente sobre dos láminas de vidrio planas y en contacto. Cuando los rayos se reflejan, las trayectorias posibles del reflejo siempre son números de la sucesión de Fibonacci: para n reflexiones, el número de trayectorias es F_{n+2} .



Abejas

La sucesión puede utilizarse para contar el número de distintas rutas que puede seguir una abeja que va recorriendo las celdillas hexagonales del panal.

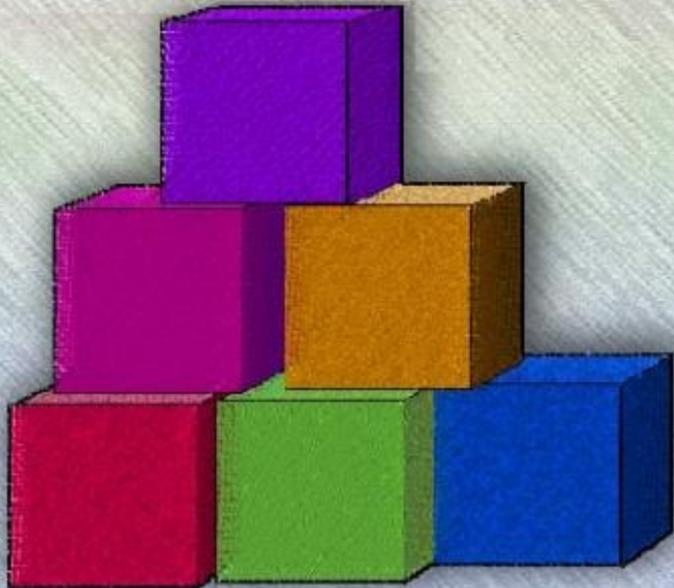
Y ya que viene a cuento, las abejas machos, o zánganos, no tienen padre. Cada zángano tiene una madre, 2 abuelos (los padres de la madre), 3 bisabuelos (y no cuatro, pues el padre de la madre no tuvo padre), 5 tatarabuelos, y así sucesivamente, en sucesión de Fibonacci



En la Actualidad

Actualmente tienen mucho interés con la aparición de los ordenadores, ya que r tiene aplicación en clasificación de datos, recuperación de información, generación de números aleatorios, e incluso en métodos rápidos de cálculo aproximado de valores máximos o mínimos de funciones complicadas, en casos donde no se conoce la derivada.

SUCESIONES ARITMÉTICAS

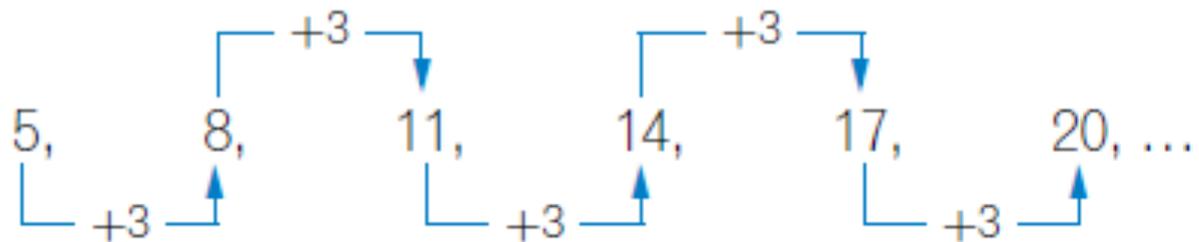


Una sucesión aritmética es una sucesión en la que cada término se obtiene sumándole o restándole una cantidad fija llamada diferencia (d)

Ejemplo: a) 3, 5, 7, 9, 11, ... (d=2)

b) 10, 7, 4, 1, -2, ... (d=-3)

5, 8, 11, 14, 17, 20, ...



El término general de una progresión aritmética es: $a_n = a_1 + (n - 1)d$, siendo a_1 el primer término y d la diferencia.

Encuentra el término general de esta progresión aritmética.

3, 5, 7, 9, 11, ...

HISTORIA DEL PRODIGIOSO GAUSS



La suma, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$, de los n primeros términos de una progresión aritmética, es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

En la progresión aritmética: 5, 8, 11, 14, 17, 20, ... se cumple que:

5, 8, 11, 14, 17, 20

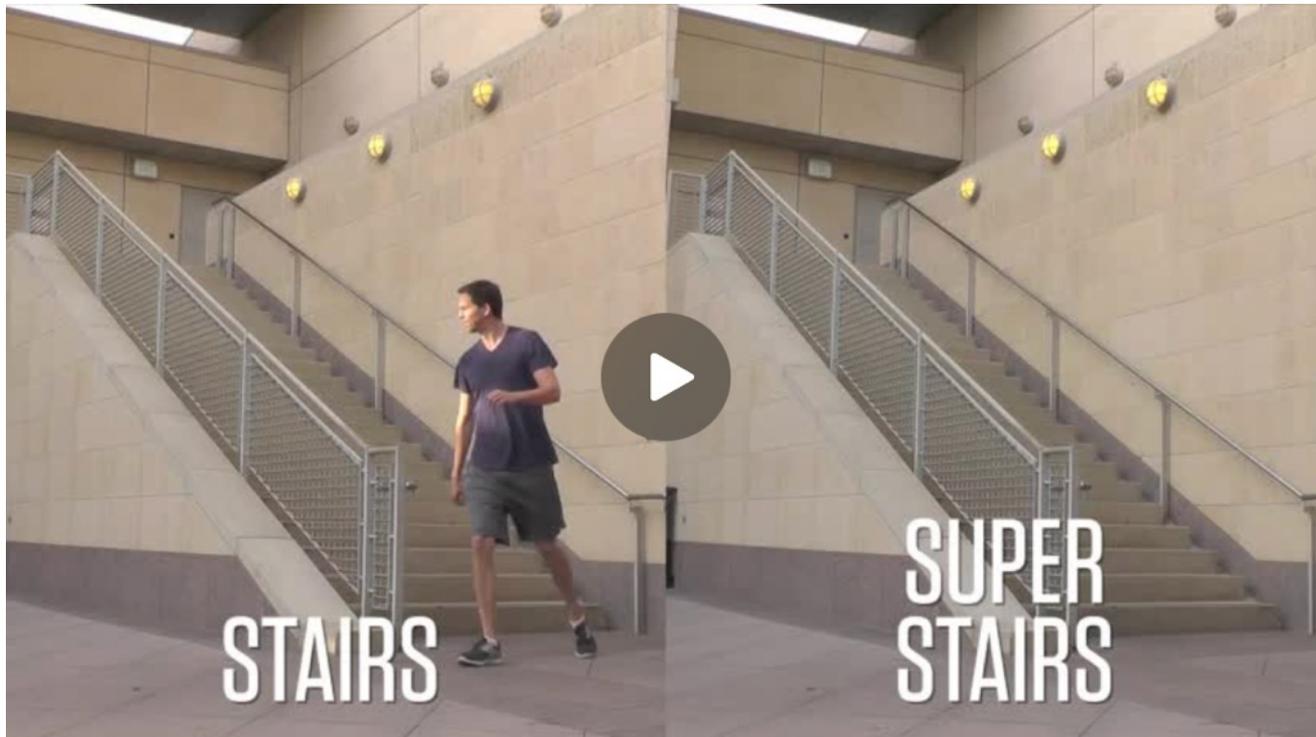
$11 + 14 = 25$

$8 + 17 = 25$

$5 + 20 = 25$

Actividad de Dan Mayer – Contar escalones

<https://www.101qs.com/2714-super-stairs>



21 escalones

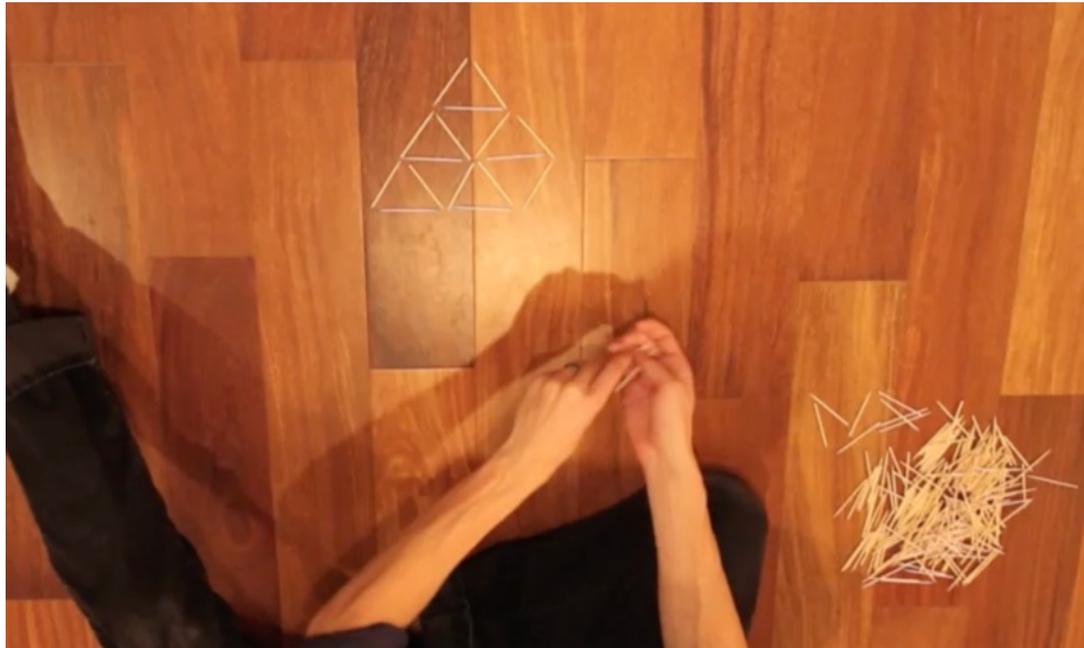
Actividad de Dan Mayer – Número de Perritos

<http://robertkaplinsky.com/work/hot-dogs/>



Actividad de Dan Mayer – Número de filas

<http://threeacts.mrmeyer.com/toothpicks/>



7 Determina si las siguientes sucesiones son o no aritméticas:

a) 2, 5, 8, 11, 14, ...

b) 1, 10, 100, 1000, ...

c) 2, 4, 8, 16, 32, ...

d) 2, 4, 6, 8, 10, ...

e) 8, 4, 0, -4, -8, ...

f) 1, 3, 6, 10, 15, ...

8

En una progresión aritmética donde $a_1=4'2$ y $a_2=4'9$, calcula el valor de “d” y el término a_5 .

9

En una progresión aritmética donde $a_5=8$ y $d=-3$, calcula el valor de a_1 y a_9 .

10

Calcula el término general de las siguientes sucesiones aritméticas:

a) 5, 6, 7, 8, 9, ...

$$a_n =$$

b) -2, 0, 2, 4, 6, ...

$$b_n =$$

c) -1, 1, 3, 5, 7, 9, ...

$$c_n =$$

d) 3, 6, 9, 12, 15, ...

$$d_n =$$

11

Calcula el término treinta de las siguientes sucesiones aritméticas

a) 8, 11, 14, 17, 20, ...

$a_n =$

$a_{30} =$

b) 9, 5, 1, -3, -7, ...

$b_n =$

$b_{30} =$

c) 2, 6, 10, 14, 18, ...

$c_n =$

$c_{30} =$

12

Calcula el primer término de una sucesión aritmética sabiendo que $a_{10}=34$ y $d=3$.

13

Calcula el primer término de una sucesión aritmética sabiendo que $a_{15}=40$ y $d=2$

14 Cálculo del gasto del móvil

Comprobamos que nosotros gastamos una media de 25 euros al mes. Al comprar el móvil nos gastamos 59€. ¿Cuánto nos habremos gastado en 3 años y 3 meses?

¿Y en 5 años y 7 meses?



15

Cálculo del gasto de la hipoteca

Cuota mensual de 550€. De entrada dimos 30000€ ¿Cuánto nos habremos pagado en 4 años y 5 meses?.



16

Halla la suma de los 20 primeros términos de la sucesión 1, 7, 13, 19, 25, ...

17

Halla la suma de los 30 primeros términos de la sucesión 1,4,7,10,13,
...

18

Naipes

- ¿Cuántas cartas necesitamos para construir un castillo de 4 pisos como el de la imagen?
- ¿Y para construir un castillo de 12 pisos?.
- El record del mundo se consiguió con un castillo de 60 pisos. ¿Cuántas cartas se necesitaron?.



10

Halla la suma de los 150 primeros números pares.

20

Un nadador, se somete al siguiente entrenamiento: 11 largos de piscina el primer día y cada día que pasa aumenta en tres largos. ¿Cuántos largos hará en total en 40 días?

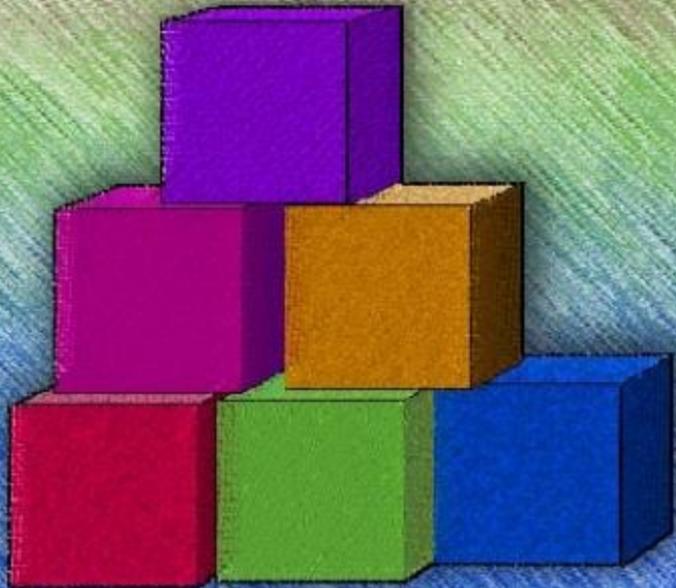


21

Se quiere construir un tejado de forma que en la primera fila haya 10 tejas, en la segunda 11, y así sucesivamente, hasta un total de 20 filas de tejas.
¿Cuántas tejas se necesitan?



SUCESIONES GEOMÉTRICAS



Una sucesión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando una cantidad fija llamada razón (r)

Ejemplo: a) 1, 2, 4, 8, 16, ... ($r=2$)

b) 4, 2, 1, $1/2$, $1/4$, ... ($r=1/2$)

- Término general de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

- Suma de n términos de sucesión geométrica

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(r^n - 1)}{r - 1}$$

- Suma de infinitos términos sucesión geométrica

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1 - r}, \quad -1 < r < 1$$

HISTORIA DEL AJEDREZ



HISTORIA DEL AJEDREZ

El número de granos de trigo de las sucesivas casillas es una progresión geométrica con $a_1 = 1$, $r = 2$ y $a_{64} = 2^{63}$.

La suma de todos sus términos es:

$$S_{64} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

¿Y cuánto es esto? ¿Cuánto abultan $2^{64} - 1$ granos de trigo? Estimamos que en 1 cm^3 caben 15 granos. Según esto, $2^{64} - 1$ granos son $1,23 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$, o bien 1230 km^3 . Con este volumen se podría llenar la ciudad de Nueva York llegando a 1,5 km de altura (naturalmente, se taparían todos sus rascacielos).

22

Determina si las siguientes sucesiones son o no geométricas:

a) 2, 5, 8, 11, 14, ...

b) 1, 10, 100, 1000, ...

c) 2, 4, 8, 16, 32, ...

d) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...

e) 2, 6, 12, 36, ...

f) 1, -2, 4, -8, 16, ...

23

Calcula el término general de las siguientes sucesiones geométricas:

a) 3, 6, 12, 24, 48 ...

$$a_n =$$

b) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...

$$b_n =$$

c) 2, 10, 50, 250, ...

$$c_n =$$

d) 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...

$$d_n =$$

24

Calcula el término octavo de las siguientes sucesiones geométricas:

a) 5, 2'5, 1'25, ...

 $a_n =$ $a_8 =$

b) 1, 2, 4, 8, 16, ...

 $b_n =$ $b_8 =$

c) 7, 14, 28, 56, ...

 $c_n =$ $c_8 =$

25

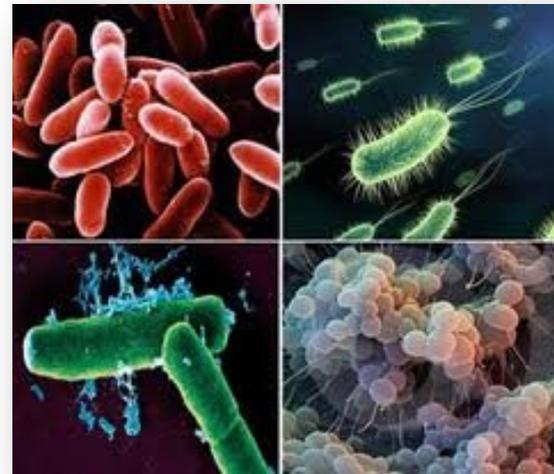
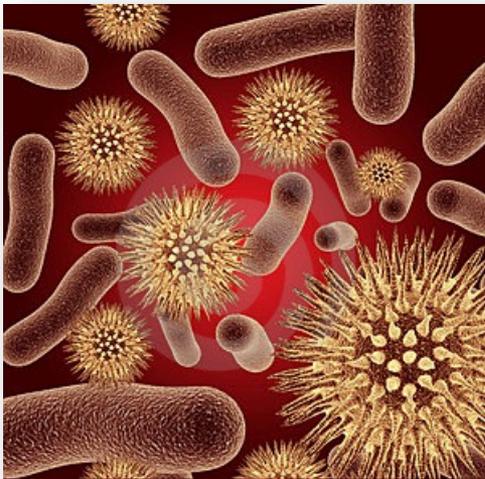
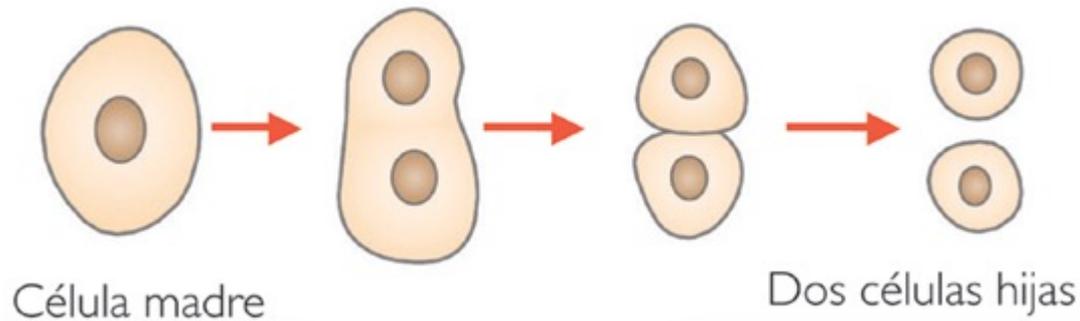
Calcula los seis primeros términos de una sucesión geométrica sabiendo que $a_1=5$ y $r=4$.

26

Calcula los seis primeros términos de una sucesión geométrica sabiendo que $a_1=5$ y $a_2=3$.

27

Una célula se reproduce por bipartición cada 5 minutos. ¿Cuántas habrá al cabo de 10 horas?



28

Depreciación de un coche

Va perdiendo un 11% cada año. Si al principio costaba 30000€, ¿Cuánto valdrá dentro de 7 años?.



29

A Isabel y Andrés les han confiado, a las nueve de la mañana, un secreto. Cada uno de ellos, al cuarto de hora, se lo han contado a tres amigos. Estos a otros tres, ..., etc. ¿Cuánta gente lo sabrá a las 2 de la tarde?

30

Tasa de Crecimiento Anual

Crecimiento anual de un 6%. Si la población es de 40 millones de personas. ¿Cuál será la población dentro de 10 años?



31 Crecimiento del precio de la vivienda

Una vivienda de 90 m² en Albacete costaba 90000€ hace 10 años. Teniendo en cuenta que el crecimiento medio anual en esos 10 años ha sido de un 14%. ¿Qué precio tendría ahora esa casa?



32

Calcula la suma de los 10 primeros términos de la sucesión 2, 6, 12, 24, 48, ...

33

Calcula la suma de los infinitos términos de una sucesión con $a_1 = 6$ y $r = 0.5$.

34

Calcula la suma de los infinitos términos de una sucesión con $a_1 = 60$ y $r = -0.2$