

Ecuaciones



Estándares - Examen

B2.C4.1. Realiza operaciones con polinomios.

B2.C4.2. Conoce y utiliza los productos notables.

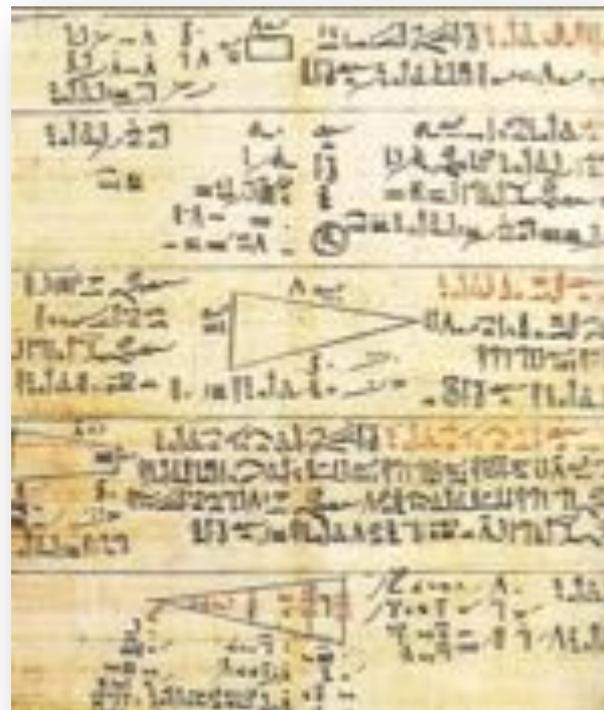
B2.C4.3. Factoriza polinomios con la regla de Ruffini, identidades notables y factor común.

B2.C5.1. Lenguaje Algebraico. Resuelve problemas de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Introducción

Primeras Ecuaciones

papiro egipcio de 1550 a.C. aparece resuelto el siguiente problema
El montón más un séptimo del montón es igual a 24. ¿Cuántos hay en el montón?



Introducción

Primeras Ecuaciones

El primero que lo afrontó de forma rigurosa fue el griego **Diofanto**, en el siglo III.

En su obra aparecen problemas de este tipo:

Si al número de elefantes que beben en el río le sumo el número de colmillos y el número de patas, obtengo su cuadrado. ¿Cuántos elefantes son?



Introducción

Avances en el Álgebra

En el siglo IX, en Bagdad aparece un personaje clave, el árabe **Al-Jwarizmi**, que dio otro importantísimo paso. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala* es un referente fundamental en la historia del álgebra. Fue estudiado y traducido a todos los idiomas en siglos posteriores. El título viene a ser “transposición y cancelación” y alude a los trasiegos que se realizan con los coeficientes para despejar la incógnita.



Introducción

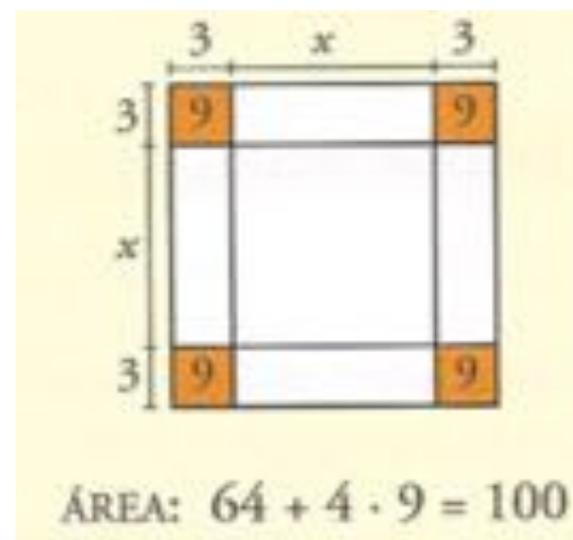
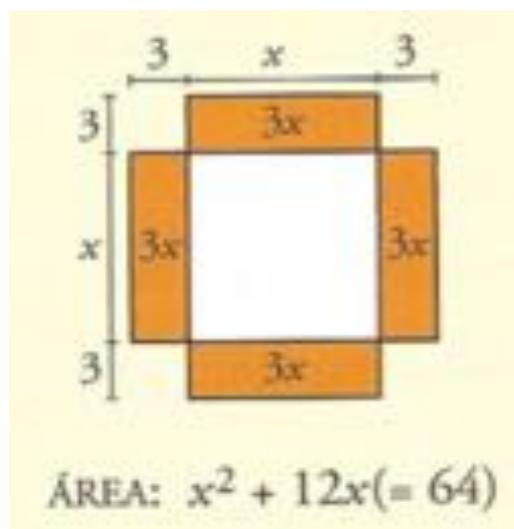
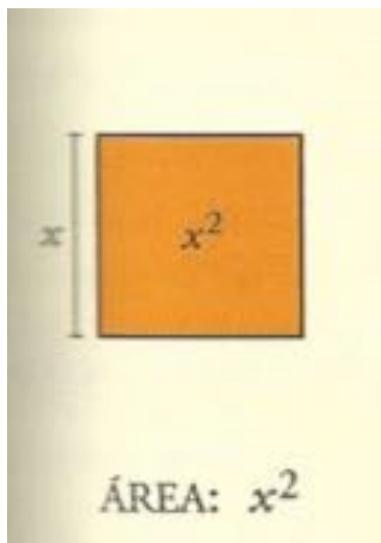
Evolución de la Simbología del Álgebra

FECHAS DE INTRODUCCIÓN DE ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS		
Año	Personaje	Símbolo
1228	Leonardo de Pisa	Línea de quebrado
1464	Regiomontano	Punto de la multiplicación
1489	Widmann	Los signos + y - de imprenta
1524-1525	Ries-Rudolff	Signo de raíz
1557	Recorde	Signo de igualdad
1593	Vieta	Uso frecuente de parentésis
1617	Neper	Coma decimal
1637	Descartes	Escritura de potencias a^3 , b^4

Introducción

Los algebristas árabes ingeniaron curiosos métodos para resolver geoméricamente algunos tipos de ecuaciones.

Observa cómo resolvían ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2 + 12x = 64$:



El área del último cuadrado es 100.

Por tanto, su lado es 10 y $x = 4$.

ECUACIONES

Una **ecuación**, más que una igualdad, es una **propuesta de igualdad** en la que interviene una letra llamada **incógnita**.

Una **solución** de la ecuación es un valor de la incógnita que hace que la igualdad sea cierta.

Resolver una ecuación es hallar su solución, o soluciones, o llegar a la conclusión de que no existe solución.

Resuelve la ecuación $6x - 7 = 2x$.

TIPOS DE ECUACIONES

- **Ecuaciones polinómicas.** En ellas, la incógnita aparece solamente en expresiones polinómicas. Las ecuaciones:

$$3(x-5) + \frac{x-3}{2} = 15 \quad x^2 - 2 = 2(x+3) \quad x^3 - 9x = (x+1)^2 + 3$$

- **Con radicales.** $\sqrt{x+17} + 2 = x - 1$

- **Con la x en el denominador.** $\frac{x+2}{x+3} - \frac{3}{x-1} = \frac{1}{8}$

- **Con la x en el exponente.** $2^x = 64$; $3^x = 81$; $x^x = 3125$

1.  ¿Es 5 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Justifica tu respuesta:

a) $8x + 3 = 11x - 12$

b) $x^4 - x^3 = 500$

c) $3x - 7 = x^2 - 10$

d) $1^x = 5$

e) $x^2 - 12 = 4x - 7$

f) $2^{x-1} = 16$

g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$

h) $10x + 25 = x^3$

i) $x^2 - 20 = 2x - 5$

j) $\sqrt{3x + 1} = 16$

k) $(2x - 3)^2 = 144$

l) $3(x^2 + 3) - 84 = 0$

Pag. 105 RESOLUCIÓN POR TANTEO

 Tanteando, halla la solución entera de estas ecuaciones:

a) $2x^2 = 50$

b) $2x^3 + x^2 = 20$

c) $4 \cdot 10^x = 40\,000$

d) $(x - 12)^4 = 81$

e) $(3 + x)^{(x-6)} = 121$

f) $\sqrt[3]{x - 23} = 2$

g) $x^3 + x^2 = 150$

h) $3^x = 2\,187$

i) $x^x = 46\,656$

j) $\sqrt{7x + 4} = 9$

k) $5^{x+1} = 15\,625$

l) $\sqrt{x - 12} = x - 8$

ECUACIONES DE GRADO 1

Resuelve.

a) $-11x = -4x + 15$

b) $-1 - 2x = -3x - 11$

c) $7x - 4 = -5 - 6x$

d) $4x - 8 = 6x + 2$

Halla la solución de esta ecuación.

$$3(x + 2) = 3x + 6$$

ECUACIONES DE GRADO 1

Resuelve estas ecuaciones.

a) $2x + 5 = 2 + 4x + 3$

b) $3x - 5 = 2x + 4 + x - 9$

c) $3x + 8 = 5x + 2$

d) $4x - 5 = 3x - 2 + x - 5$

e) $9x - 11 = 4x + 6 + 5x + 5$

f) $6x + 2x + 4 = 3x + 3 - 5x - 9$

L Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$$

ECUACIONES DE GRADO 1

ERRORES CLÁSICOS EN ÁLGEBRA

CON EL MENOS DELANTE DE UNA FRACCIÓN AL APLICAR LA REGLA DEL PRODUCTO PARA ELIMINAR LOS DENOMINADORES EN UNA ECUACIÓN.

$$\frac{x+3}{6} - \frac{2x-10}{6} = \frac{x}{6}$$

$$x+3-2x-10=x$$

ERROR



LO CORRECTO ES:

$$x+3-(2x-10)=x$$

$$x+3-2x+10=x$$


EL MENOS DELANTE DE LA FRACCIÓN CAMBIA EL SIGNO A TODO EL NUMERADOR.

$$\text{b) } \frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$$

$$c) \frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$$

$$d) \frac{13 + x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10 + x}{5} + \frac{1 - 12x}{10}$$

Pag. 107

ECUACIONES DE GRADO 1

$$e) 3x - \frac{x + 3}{4} = 13$$

$$f) 4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$$

$$g) \frac{x}{2} - \frac{2(x+2)}{7} = \frac{x-3}{4}$$

$$\text{h) } \frac{1-x}{25} - \frac{x}{6} + \frac{x+7}{9} = \frac{2}{5} - \frac{3x}{15}$$

$$\text{i) } \frac{(1+x)^2}{5} = \frac{2x+4}{25} + \frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$$

$$j) \frac{x-4}{8} + \frac{9-x}{12} - \frac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$$

Pag. 107

ECUACIONES DE GRADO 1

$$k) x + \frac{9(5+x)}{5} = 9 - x$$

$$1) \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{4} = \frac{3(4x^2 + 1)}{12} - x$$

ECUACIONES ANÓMALAS

- $4x - 6 = 4(x + 3) \rightarrow 4x - 6 = 4x + 12 \rightarrow 0 \cdot x = 18$

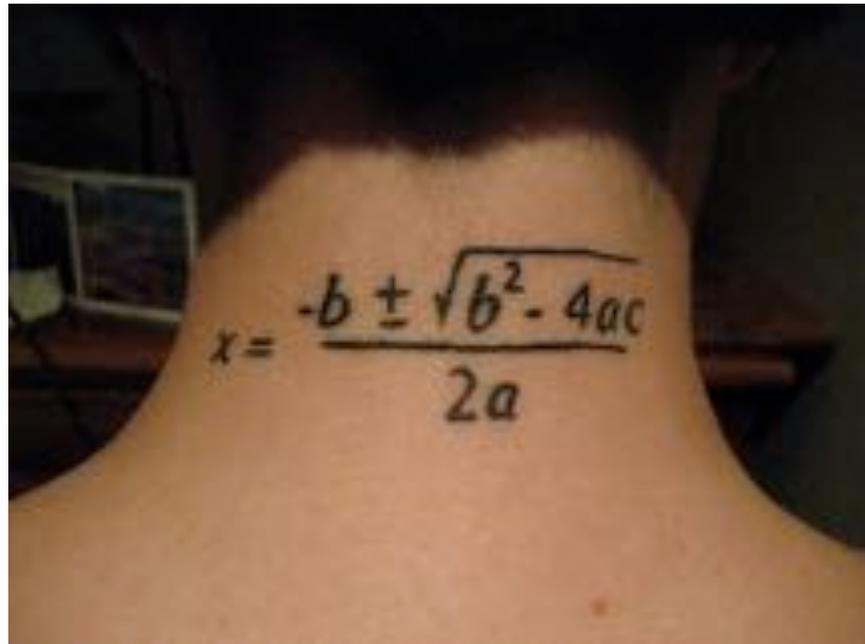
No puede ser $0 \cdot x = 18$. Por tanto, la ecuación **no tiene solución**.

- $4x - 6 = 4(x - 2) + 2 \rightarrow 4x - 6 = 4x - 6 \rightarrow 0 \cdot x = 0$

$0 \cdot x = 0$ es cierto cualquiera que sea x , pues $0 = 0$. Por tanto, la ecuación **tiene infinitas soluciones**.

ECUACIONES DE GRADO 2

Resolver $ax^2+bx+c=0$



A photograph of a person's back with the quadratic formula written on their skin. The formula is $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ECUACIONES DE GRADO 2



Ejercicios – Pag 108

1.  Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

Ejercicios Propuestos

Determina el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 7x - 12 = 0$

b) $x^2 + 9x + 18 = 0$

c) $3x^2 - x + 12 = 0$

Halla cuántas soluciones tienen estas ecuaciones de segundo grado. Después, calcula su valor.

a) $x^2 - 6x + 4 = 0$

d) $x^2 - 5x + 9 = 0$

b) $2x^2 = 4 - 10x$

e) $7x^2 + 1 = 6x$

c) $3x^2 = 6x$

f) $8x^2 = -3$

Ecuaciones 2º Grado Incompletas

CASO 1. Si $b = 0$. Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$.

CASO 2. Si $c = 0$. Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$.

Ec.Incompletas– Pag 108.



Resuelve estas ecuaciones:

$$a) 7x^2 - 28 = 0$$

$$b) 7x^2 + 28 = 0$$

$$c) 4x^2 - 9 = 0$$

$$d) 3x^2 + 42x = 0$$

Ec.Incompletas– Pag 108.

$$e) 3x^2 = 42x$$

$$f) 11x^2 - 37x = 0$$

$$g) 2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$$

$$h) 7x^2 + 5 = 68$$

Pag 110.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 2(x + 5) = (x + 3)^2 - 19$

b) $(3x + 4)(5x - 7) = (2x + 7)^2 + 53$

c) $(2x + 4)(x - 1) + (3x + 5)^2 = 3(2x + 5)^2 + x$

d) $(x - 2)(4x + 2) + (3 - 3x)^2 = 4(5x + 1)^2 - (x - 1)$

Pag 111.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$c) \frac{3x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

$$d) \frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x}$$

PROBLEMAS – PAG. 116

- 19.**  La suma de tres números naturales consecutivos es igual al quintuple del menor menos 11. ¿Cuáles son esos números?
- 20.**  Calcula un número tal que sumándole su mitad se obtiene lo mismo que restando 6 a los $\frac{9}{5}$ de ese número.
- 21.**  Halla tres números impares consecutivos tales que su suma sea 117.

PROBLEMAS – PAG. 116

22.   He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?
23.  Calcula la altura de un árbol que es un metro más corto que un poste que mide el doble que el árbol.
24.  El precio de unos zapatos ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?

PROBLEMAS – PAG. 117

25. Con 3,50 € más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €. ¿Cuánto dinero tengo?
26. Si al cuadrado de un número le restamos su triple obtenemos 130. ¿Cuál es el número?
27. Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.
28. Si al producto de un número natural por su siguiente le restamos 31 obtenemos el quintuple de la suma de ambos. ¿De qué número se trata?

Problemas de Mezclas

Se muelen conjuntamente 50 kg de café de 8,80 €/kg y 30 kg de otro café de inferior calidad, de 6,40 €/kg. ¿A cómo resulta el kilo de la mezcla obtenida?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ SUPERIOR	50 kg	8,80 €/kg	$50 \cdot 8,80 = 440 \text{ €}$
CAFÉ INFERIOR	30 kg	6,40 €/kg	$30 \cdot 6,40 = 192 \text{ €}$
MEZCLA	80 kg		632 €

$$\text{Precio de la mezcla} = \frac{\text{Coste total}}{\text{Peso total}} = \frac{632 \text{ €}}{80 \text{ kg}} = 7,90 \text{ €/kg}$$

Problemas de Mezclas – Pag. 92

82. Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia, a 5,20 €/kg, y otro de la India, a 6,20 €/kg, y queremos obtener 100 kg de té a 6 €/kg. ¿Cuántos kilos hemos de mezclar de cada tipo?

PRIMERO. Planteamiento.

	Kilos	Precio
Té tailandés	x	$5,2x$
Té indio	$100 - x$	$6,2(100 - x)$
Mezcla	100	$5,2x + 6,2(100 - x)$

$$\text{Precio por kg de mezcla} = \frac{5,2x + 6,2(100 - x)}{100} = 6$$

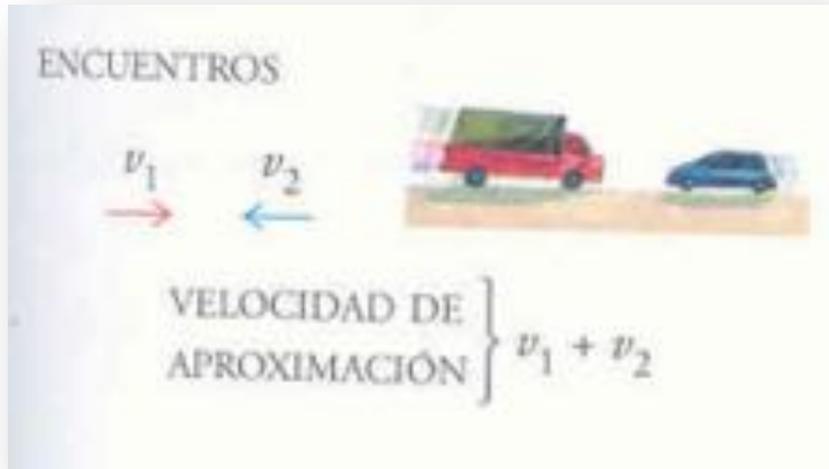
Problemas de Mezclas – Pag. 92

83. ●● ¿Cuántos litros de leche de $0,75 \text{ €/ℓ}$ hay que mezclar con leche de $0,85 \text{ €/ℓ}$ para conseguir 100 litros a $0,77 \text{ €/ℓ}$?

Problemas de Mezclas – Pag. 92

84. ●● En una fábrica de ladrillos se mezcla arcilla de 21 € la tonelada con arcilla de 45 € la tonelada. ¿Cuántas toneladas de cada clase hay que emplear para conseguir 500 toneladas de arcilla a 39 € la tonelada?

Problemas de Móviles



$$E = V * T$$



$$\text{N}^\circ \text{Litros} = \text{Caudal} * T$$

Problemas de Móviles – Pag.92

86. Un camión sale de una ciudad a una velocidad de 80 km/h y, dos horas más tarde, sale un coche de la misma ciudad a 120 km/h. ¿A qué distancia de la ciudad alcanzará el coche al camión?

Problemas de Móviles – Pag.92

87. ●●● Esther viaja de Sevilla a Barcelona en su coche. Sale a las 8 de la mañana y lleva una velocidad constante de 90 km/h. A 110 km de Sevilla, Juan coge, a esa misma hora, un autobús que viaja a 70 km/h, con la misma dirección que Esther. ¿A qué hora se encuentra Esther con el autobús? ¿Qué distancia ha recorrido cada uno?

Problemas de Móviles – Pag.92

SISTEMAS DE ECUACIONES

Problema propuesto por Diofanto en 1621a

Obtener dos números que suman 20 y cuyos cuadrados suman 208.

SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Esquema del tema:

1

- Resolución de sistemas (3 métodos)

2

- Inventar un sistema con una cierta solución

3

- Posibles soluciones de un sistema

4

- Saber interpretar gráficamente un sistema

5

- Resolver problemas de sistemas

SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Métodos de Resolución:

1

• Método de Sustitución

2

• Método de Igualación

3

• Método de Reducción

Ejercicios – Pag 136.

2.  Resuelve por sustitución.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 8x - 3y = -25 \\ x - 5y = -17 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 7x - y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$$

Ejercicios – Pag 136.

3.  Resuelve por igualación.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y = 6x \\ 7x = 2y - 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - 4y = -4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

Ejercicios – Pag 136.

4.  Resuelve por reducción.

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x + y = 7/6 \end{cases}$$

Método Gráfico – Pag 124

2. Representa las rectas de ecuaciones:

$$2x - y = 6 \quad x + y = 0$$

¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?

Ejercicios – Pag 136.

1.  Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

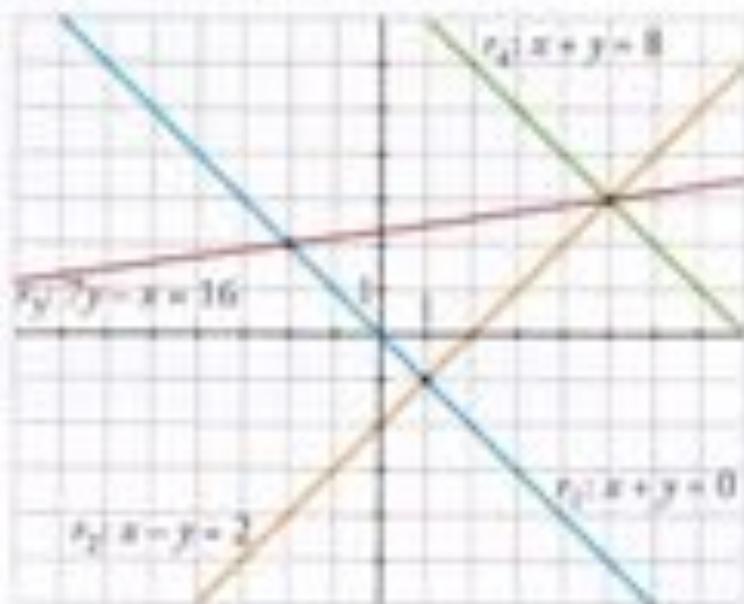
$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 8y = -2 \end{cases}$$

Método Gráfico – Pag 139

52.  Observa la representación de las rectas r_1 , r_2 , r_3 y r_4 y responde sin resolver.



a) ¿Cuál es la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones? ¿Alguno es incompatible o indeterminado?

$$i) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

b) ¿Alguno de estos sistemas tiene solución?

$$I) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases} \quad II) \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$$

Inventar Problemas de Sistemas

Inventa un problema de sistemas que tenga por soluciones $x=2$ e $y=3$

Posibles soluciones de un sistema

Los sistemas de ecuaciones, según su número de soluciones, se pueden clasificar en:

- **Sistemas compatibles determinados.** Tienen una única solución. La representación gráfica del sistema son dos rectas que se cortan en un solo punto.
- **Sistemas compatibles indeterminados.** Tienen infinitas soluciones. La representación gráfica son dos rectas que coinciden.
- **Sistemas incompatibles.** No tienen solución. La representación gráfica del sistema son dos rectas paralelas.

Resolver– Pag 131

4. Resuelve este sistema simplificando previamente:

$$\begin{cases} 5(x + 3) - 2(y - 1) = 3(5x - y) - 8x \\ \frac{x + 1}{7} - \frac{y}{5} = 2 \end{cases}$$

Posibles soluciones de un sistema – Pag 98

9 Resuelve los sistemas y clasificalos.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 1 \end{array} \right\}$$

REFLEXIONA

10 Pon un ejemplo de sistema de ecuaciones compatible determinado, indeterminado e incompatible.

Resolviendo sistemas – Pag. 102

20 Resuelve por el método más adecuado.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 + x + 2y \\ x - 2y - 3 = 3 - 42y \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3y + 3 = x - 2(x + y) \\ \frac{2x + 3y}{2} = 18 \end{array} \right\}$$

Resolviendo sistemas – Pag. 102

21 Resuelve por el método más adecuado.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2x-y}{3} + 2x - y = 4 \\ 2x - y = 4 \end{array} \right\}$$

REFLEXIONA

22 Escribe un sistema de ecuaciones que sea apropiado para resolverlo mediante sustitución, y otro, mediante reducción.

Resolución de problemas de Sistemas

Las edades de un padre y su hija suman 77 años. Dentro de 2 años el padre tendrá el doble de la edad de su hija. ¿Qué edades tienen ahora?

Problemas de Sistemas – Pag.133

PROBLEMAS DE DISTANCIAS

1. *Dos estaciones A y B distan 255 km. Un tren sale de A hacia B a una velocidad constante de 60 km/h. Simultáneamente, sale de B hacia A otro tren a 110 km/h. Calcular el tiempo que tardan en cruzarse y la distancia que ha recorrido cada uno hasta ese instante.*

Problemas de Sistemas – Pag.133

- 2.** Dos poblaciones distan 120 km. En el mismo instante salen un peatón de A hacia B a una velocidad de 6 km/h y un ciclista de B hacia A a 24 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse? ¿Qué distancia recorre el peatón?

Problemas de Sistemas – Pag.134

PROBLEMAS DE MEZCLAS

2. *Un bodeguero ha mezclado dos garrafas de vino, la primera, de mejor calidad, a 3 €/l y la segunda, de calidad inferior, a 2,20 €/l. De esta forma ha obtenido 16 l de un vino de calidad intermedia que sale a 2,50 €/l. ¿Qué cantidad de vino había en cada garrafa?*

Problemas de Sistemas – Pag.134

Problemas de Sistemas – Pag.134

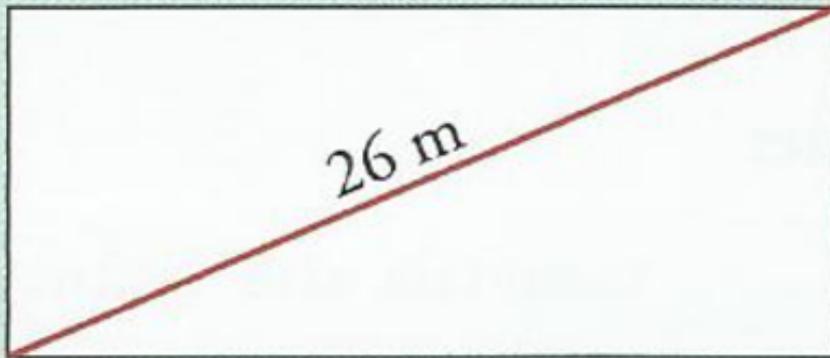
PROBLEMAS DE PORCENTAJES

3. *Mariluz ha comprado un abrigo que estaba rebajado un 15%. Jorge ha comprado otro abrigo 25 € más caro, pero ha conseguido una rebaja del 20%, con lo que solo ha pagado 8 € más que Mariluz. ¿Cuál era el precio original de cada abrigo?*

Problemas de Sistemas – Pag.134

Problemas de Sistemas – Pag.134

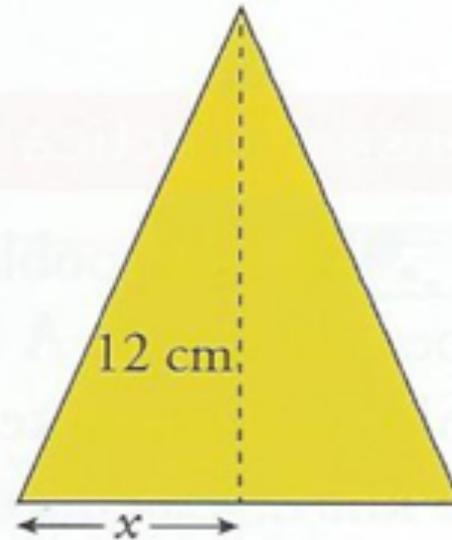
4. *La diagonal de un rectángulo mide 26 m, y el perímetro, 68 m. Calcular la medida de sus lados.*



Problemas de Sistemas – Pag.134

5.  El perímetro de un triángulo isósceles es de 36 cm. La altura relativa al lado desigual mide 12 cm. Calcula la medida de los lados iguales.

 Si llamas x a la mitad de la base, se simplifican mucho los cálculos.



Resolución Problemas de Sistemas

23 La suma de las edades de Fernando y su padre es 40 años. La edad del padre es 7 veces la edad del hijo. ¿Qué edades tienen ambos?

APLICA

24 En un examen contesto diez preguntas. Por cada acierto me dan 2 puntos, y por cada fallo me quitan 1. Si he obtenido 8 puntos, ¿cuántos aciertos tengo?

Resolución Problemas de Sistemas

- 25** Un hotel tiene, entre habitaciones dobles e individuales, 120 habitaciones. Si el número de camas es 195, ¿cuántas habitaciones dobles tiene?
¿Y habitaciones individuales?

REFLEXIONA

- 26** Si cada persona come 5 pasteles, sobran 3; pero si comen 6, falta 1. ¿Cuántas personas y pasteles hay?