UD5.-ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES.
Ubicación: **Nº Sesiones: 10** **Justificación de la Unidad**

1.- Relación de la unidad con el currículo de CLM.

Objetivos Materia	Criterios de Evaluación del Currículo de CLM	Contenidos del Currículo de CLM
		-Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. - Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita. - Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. -Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de ecuaciones.

2.-Elementos Básicos: Objetivos, Contenidos y Criterios de Evaluación para la Unidad.

Competencias	Objetivos, Contenidos y Criterios de Evaluación para la Unidad
Competencia Matemática	Al acabar la U.D. los alumnos serán competentes para: -Resolver problemas de la vida real en los que intervengan ecuaciones de primer grado. -Resolver problemas de la vida real en los que intervengan ecuaciones de segundo grado. - Resolver problemas de la vida real en los que intervengan sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. -Saber si un problema de ecuaciones o sistemas está bien resuelto a partir de las soluciones obtenidas.
Competencia Lingüística	- Identifica información relevante en problemas de matemáticas. (7)

Conocimiento e interacción con el mundo físico.	- Conoce los efectos del cambio climático. (57)
Competencia Digital	
Competencia Social y Ciudadana Competencias cultural y artística. Aprender a aprender Autonomía e iniciativa personal. Competencia emocional	- Respeta las opiniones de los demás. (69) - Practica diálogo, mediación, arbitraje y consenso. (71) - Sabe trabajar en equipo. (72) - Sabe autovalorar el trabajo realizado. (75) - Expresa su opinión personal sobre textos y problemas realizados.(76)

3.-Desarrollo de las sesiones.

Fase Inicial

Sesión 1

- Actividad 1:

Plantear a los alumnos un debate con la siguiente cuestión:
Seguramente, de otros cursos te sonará la palabra "ecuaciones", ¿te has planteado alguna vez para qué pueden servir las "famosas" ecuaciones? ¿Y los sistemas de ecuaciones?

- Actividad 2:

Presentar a los alumnos los siguientes textos: "Describiendo nuestros océanos", "Diseñando aviones" y "Ecuaciones" (Anexos).

a) Leer los textos en voz alta por los alumnos designados por el profesor.
b) Buscar información en Internet sobre los cambios climáticos a los que se refiere el texto "Describiendo nuestros océanos" e investigar sobre sus efectos. Realizar un pequeño resumen.
c) Realizar un trabajo en equipo. Buscar diferentes fractales en Internet y realizar una presentación donde aparezcan dichos fractales, explicando a qué situación de la vida real pertenecen o podrían pertenecer.

Fase de Desarrollo

Sesión 2 (Ecuaciones de primer grado)

- Actividad 1:

Proyectar la presentación "Ecuac1grado".

- Actividad 2:

Colocar a los alumnos en grupos y presentarles el siguiente problema para que lo resuelvan como quieran.

Para un aprovechamiento total del trabajo conviene que cada grupo de alumnos, en un breve párrafo, relate cómo llegó a la solución expuesta incluyendo los intentos previos, aunque éstos hayan sido infructuosos.

En el corral de una granja-escuela hay sólo conejos y gallinas. Luis y Ana deben informar a su maestra de cuántos animales hay allí. Cada uno cuenta a su manera. Cuando regresan Luis dice que contó 192 patas y Ana, que contó las cabezas, llegó a 60.
¿Cuántos animales de cada clase hay en el corral?


Dejar el tiempo suficiente para que los alumnos intenten resolverlo y relaten cómo llegaron a la solución o el camino seguido aunque no llegaran a la solución. A continuación, explicar detenidamente cada una de las formas de resolución propuestas a continuación:

PRIMERA SOLUCIÓN:
Teniendo en cuenta que las cabezas deben sumar 60, probemos:
Supongamos 50 corderos y 10 gallinas. Calculemos la cantidad de patas que tendría que haber:
Conejos: sabiendo que cada uno tiene 4 patas, el total de patas de conejos se obtiene multiplicando por 4 la cantidad supuesta de conejos, es decir, 4.50 = 200.
Gallinas: sabiendo que cada una tiene 2 patas, el total de patas de gallinas se obtiene multiplicando por 2 la cantidad supuesta de gallinas, es decir, 2.10 = 20.
El total de patas sería 200+20 = 220. ¡Nos pasamos!
Vamos a suponer ahora que hay 20 conejos y 40 gallinas. En este caso, procediendo como lo hicimos anteriormente, resulta que el total de patas sería de 160. ¡Nos quedamos cortos!
Seguimos probando hasta encontrar que, si consideramos que hay 36 conejos y 24 gallinas, se verifican las condiciones del problema.
Respuesta: En el corral hay 36 corderos y 24 gallinas.

SEGUNDA SOLUCIÓN:
Podríamos suponer que las gallinas se paran en una pata y los corderos en las patas traseras; ahora tendríamos 60 cabezas y 96 patas.
Como las gallinas tienen una sola pata en la tierra, las patas que quedan (96-60) corresponden cada una a un conejo; hay entonces 36 conejos y 24 gallinas.

TERCERA SOLUCIÓN:
Si llamamos "x" a la cantidad de conejos e "y" a la cantidad de gallinas, tenemos:

$$4.x + 2.y = 192 \text{ patas}$$
$$x + y = 60 \text{ cabezas}$$

De la segunda relación resulta $y = 60 - x$
que reemplazada en la primera nos dice $4.x + 2.(60-x) = 192$,
es decir, $4.x + 120 – 2x =192$,
o sea, $2.x = 72$, de donde $x = 36$
Para conocer y, volvemos unos renglones atrás y nos encontramos con que $y = 60 – x$, es decir, $y = 60 - 36 = 24$
Respuesta: en el corral hay 36 conejos y 24 gallinas.

Tarea para casa

1. Plantear y resolver los siguientes problemas:

a) Tres mamás se juntan en el parque para hablar de sus tres hijos. Comentan sus edades, sus comidas preferidas, sus caprichos, ... Una vez con sus hijos, las madres les plantean el siguiente juego: “Cada uno, por separado y sin hablar entre vosotros, debéis averiguar la edad que tiene cada uno, como pista os diremos que entre los tres sumáis 30 años y que Juan, que es el mayor, tiene un año más que Pedro y que Pedro tiene un año más que Jorge ”. Ayúdalos a resolver el juego.

b) Calcula las edades de un padre y un hijo, sabiendo que la edad del padre es 7 veces la del hijo y la suma de ambas edades es igual a 40 años.

c) Calcula el lado de una habitación cuadrada cuyo perímetro es 12 m.

d) Calcula las dimensiones del suelo de un baño rectangular sabiendo que el lado más grande mide 35 cm más que el lado pequeño y que su perímetro es 8,7 m.

Sesión 3

- Actividad 1:

El profesor dejará que los alumnos salgan a la pizarra y expliquen a sus compañeros los procesos seguidos para resolver los problemas planteados el día anterior como tarea para casa.

Una vez concluido cada problema, el profesor preguntará a los alumnos por qué creen que esa es la solución correcta y no otra, explicando, de este modo, cómo se comprueban las soluciones de una ecuación.

- Actividad 2:

Colocar a los alumnos en grupos y presentarles el siguiente problema

Ana salió de casa con una cierta cantidad de dinero. Gastó la tercera parte del dinero que llevaba en una camiseta y las dos terceras partes de lo que le quedaba en una falda. Al volver a casa todavía le quedaban 12 euros. ¿Con cuánto dinero salió?

Dejar el tiempo suficiente para que los alumnos intenten resolverlo y relaten cómo plantearon la ecuación y cómo la resolvieron.

SOLUCIÓN:
En primer lugar, plantearemos la ecuación:
Supongamos que Ana salió de casa con x euros.
El enunciado dice: "Gastó la tercera parte del dinero que llevaba en una camiseta". Por tanto, Ana gastó en la camiseta: $\frac{1}{3}x$.
"Y las dos terceras partes de lo que le quedaba en una falda". Primero debemos calcular lo que le quedaba: Si salió con x euros y gastó $\frac{1}{3}x$, le quedaba: $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$. Por tanto, Ana gastó en la falda: $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x\right)$.
Planteamos la ecuación:

$$x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x\right) = 12$$

Pasamos a resolverla:
1º Eliminar paréntesis.

$$x - \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}x = 12$$

2º Eliminar los denominadores. Previamente, se reducen ambos miembros de la ecuación a denominador común.

$$9x - 3x - 4x = 108$$

3º Trasponer términos. Los términos que contengan la variable a un miembro y los términos independientes al otro.
- En nuestro caso, ya los tenemos ordenados.
4º Reducir términos semejantes.

$$2x = 108$$

5º Despejar la incógnita.

$$x = \frac{108}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 54$$

Respuesta: Ana salió de casa con 54 euros.

Tarea para casa

1. Imagina que trabajas dirigiendo una empresa de excavación. El Ayuntamiento te pide que excaves en un parque, un estanque rectangular rodeado por un camino de 2 m de ancho. El estanque debe tener 8 m de ancho y te piden que para que quede bonito, el estanque tenga un área igual que la del camino. ¿Cuántos metros de largo deberá tener el estanque?

2. El profesor dará a los alumnos el texto “La leyenda de Lilavati” y estos resolverán los problemas que se plantean comprobando la solución obtenida en cada caso.

~~Lee la leyenda de Lilavati (extraído del libro “El hombre que calculaba” de Malba Tahan) y resuelve los problemas que se plantean, comprobando la solución obtenida.~~

El origen de *Lilavati* es muy interesante. Voy a relatarlo. Báskara tenía una hija llamada Lilavati. Cuando esta nació, él consultó a las estrellas y verificó, por la disposición de los astros, que su hija estaba condenada a quedar soltera toda la vida, no siendo requerida por los jóvenes nobles. Báskara no se conformó con esa determinación del Destino y recurrió a los astrólogos más famosos de la época. ¿Cómo hacer para que la graciosa Lilavati pudiese encontrar esposo, y ser feliz en el casamiento? Uno de los astrólogos consultados por Báskara, le aconsejó casar a Lilavati con el primer pretendiente que apareciera, pero dijo que la hora propicia para la ceremonia del enlace sería marcada, en cierto día, por el cilindro del Tiempo. Los hindúes medían, calculaban y determinaban las horas del día con ayuda de un cilindro colocado en un recipiente lleno de agua. Ese cilindro, abierto apenas en su parte superior, tenía un pequeño orificio en el centro de la base. La cantidad de agua que entraba por el orificio llenaba lentamente el cilindro que se iba hundiendo hasta desaparecer completamente bajo el agua a una hora previamente determinada.

Con agradable sorpresa para su padre, Lilavati fue pedida en matrimonio por un joven rico y de buena familia. Fijado el día y señalada la hora, se reunieron los amigos para asistir a la ceremonia. Báskara colocó el cilindro de las horas y aguardó que el agua llegase al nivel marcado. La novia, llevada por irresistible y verdaderamente femenina curiosidad, quiso observar la subida del agua en el cilindro. Al aproximarse para acompañar la determinación del Tiempo, una de las perlas de sus vestidos se desprendió y cayó dentro del vaso. Por una fatalidad, la perla, llevada por el agua, obstruyó el pequeño orificio del cilindro, impidiendo que pudiese entrar el agua. El novio y los convidados esperaron largo rato con paciencia. Pasó la hora fijada sin que el cilindro marcara el tiempo, como previera el sabio astrólogo. El novio y los convidados se retiraron para que fuese fijada otra fecha, después de consultar los astros.
El joven brahmán desapareció algunas semanas después, y la hija de Báskara quedó para siempre soltera.

Reconoció el inteligente geómetra que era inútil luchar contra el Destino y dijo a su hija:

Escribiré un libro que perpetuará tu nombre. Vivirás en el pensamiento de los hombres más de lo que hubieran vivido los hijos que pudieron haber nacido de tu malogrado matrimonio.

La obra de Báskara se hizo célebre y el nombre de su hija surge inmortal en la Historia de la Matemática.

Problema 53 de Lilavati
Un tercio, un quinto y un sexto de cierta cantidad de limpísimas flores de loto fueron ofrecidos a Shiva, Visnu y al Sol, y un cuarto a Parvati. Los seis lotos que quedaron fueron ofrecidos a los pies del maestro. Rápidamente dime el número total de flores de loto.

Problema 54 de Lilavati
Un peregrino dio la mitad de su dinero a Prayaga, dos novenos del resto a Kasi, un cuarto del resto como honorarios de paso, y seis décimos del resto a Gaya. Sesenta y tres *niskas* le quedaron y regresó a su propia casa. Dime la cantidad inicial de su dinero si el método de reducción de restos está claro para ti.

Problema 55 de Lilavati
La quinta parte de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de kadamba; la tercera parte en una flor de silinda; el triple de la diferencia entre estos dos números vuela sobre una flor de krutja; y hay una abejilla que vuela indecisa de una flor de pandanus a un jazmín. Dime hermosa niña el número exacto de abejas.

3. **Las manzanas.**
Un jardinero vendió al primero de sus compradores la mitad de las manzanas de su jardín más media manzana; al segundo, la mitad de las restantes más media; al tercero, la mitad de cuantas quedaron más media, etc. El séptimo comprador adquirió la mitad de las manzanas que quedaban más media, agotando con ello la mercancía ¿Cuántas manzanas tenía el jardinero? (Pista: Quizás necesites recordar alguna de las propiedades de las sucesiones vistas en temas anteriores)

(El profesor puede recoger esta actividad para así evaluar el indicador "Reconoce progresiones aritméticas y geométricas en la vida (22)")

Sesión 4

- Actividad 1:

El profesor dejará que los alumnos salgan a la pizarra y expliquen a sus compañeros los procesos seguidos para resolver los problemas planteados el día anterior como tarea para casa.
Además, explicará detenidamente el problema “3. Las manzanas”

Solución al problema “Las manzanas”

Si el número inicial de manzanas era *x*, el primer comprador adquirió

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$$

el segundo

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2}$$

el tercero

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{2^2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3}$$

el séptimo

$$\frac{x+1}{2^7}$$

Tenemos la ecuación

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

o

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right)=x$$

Hallada la suma de los miembros de la progresión geométrica comprendida en los paréntesis, resultará:

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7}$$

$$x=2^7-1=127$$

El hortelano tenía 127 manzanas.

- Actividad 2:

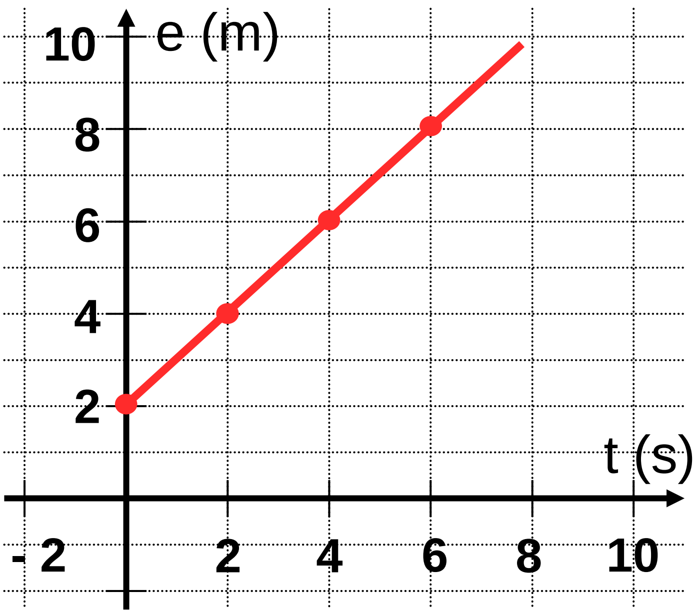
Realizar la presentación “mru” referida al movimiento rectilíneo uniforme y realizar las siguientes actividades:

a) Una moto comienza a moverse a 5 m del origen con una velocidad constante de 35 m/s. ¿Qué posición ocupa a los 5 s?, ¿y a los 10 s?, ¿y al cabo de una hora?

b) Un coche que se mueve de forma rectilínea y uniforme, circula a una velocidad de 50 km/h, pasadas 2 horas, el coche se encuentra a 107 km del origen de nuestro sistema de referencia. ¿Dónde empezó su movimiento?

c) La siguiente recta representa el movimiento de un cuerpo. Utilízala para resolver las siguientes cuestiones:

i) ¿Dónde se encontraba el cuerpo en el momento inicial?
ii) ¿Dónde se encuentra el cuerpo a los 5 segundos?
iii) ¿Qué distancia ha recorrido en ese tiempo?
iv) ¿Cuál es su velocidad?



- Actividad 3:

Introducir las ecuaciones de segundo grado realizando la presentación "mrua" referida al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Tarea para casa

Se pide a los alumnos que hagan grupos y se les plantean las siguientes cuestiones:

1. Busca en Internet o en cualquier otro medio que tengas a tu alcance, información sobre las ecuaciones de 2º grado y su resolución. Seguro que darás con una fórmula, sigue investigando y haz una presentación de la demostración de dicha fórmula para exponerla a tus compañeros.

2. Un móvil que se encuentra en el origen, comienza a moverse con una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s^2. Plantea la ecuación de su movimiento y represéntala gráficamente.
A partir de la gráfica, contesta:
i) ¿Sabrías decir en qué momento el móvil se encuentra a 4 m del origen?
ii) ¿Cuándo se encuentra a 28 m del origen?
Utiliza la fórmula que has encontrado en tu investigación del ejercicio anterior para resolver analíticamente las dos cuestiones planteadas.

Sesión 5

- Actividad 1:

Los grupos de alumnos presentarán el trabajo realizado al resto de sus compañeros. El profesor resolverá todas las dudas que se planteen y concretará el método de resolución de las ecuaciones de 2º grado, así como la forma de comprobar las soluciones. También resaltará el hecho de que, aunque una ecuación de un problema tenga dos soluciones, es posible que sólo una de ellas sea una solución válida para el problema (como ocurre al resolver analíticamente las cuestiones planteadas en la actividad 2)

- Actividad 2:

Calcula cuánto miden los lados de un solar rectangular sabiendo que uno de ellos es dos metros mayor que el otro y que el área del solar es de 24 m^2.

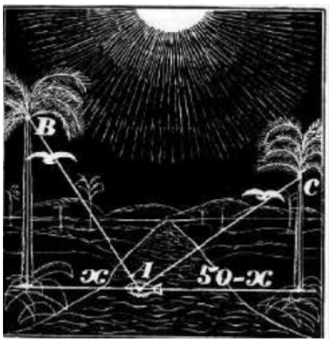
- Actividad 3:

Un operario compra un lote de baldosas cuadradas. "¿Cuántas baldosas hay en el lote?" le pregunta al vendedor, el cual responde: "Si con ellas formásemos un cuadrado de x baldosas por lado sobrarían 27, y si se tomasen x+1 por lado faltarían 40". Ayuda al operario a resolver el problema.

Tarea para casa

1. Un móvil que se encuentra a 2 m del origen de nuestro sistema de referencia, comienza a moverse con una velocidad de 1 m/s y una aceleración de 2 m/s^2. ¿En qué momento el móvil se encuentra a 6 m del origen?

2. Este problema, de origen árabe, data del siglo XI.
A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. Sus alturas son de 20 y 30 pies, y la distancia entre sus troncos (que suponemos verticales) es de 50 pies. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Ambos descubren simultáneamente un pez en la superficie del río justo entre las palmeras. Los pájaros se lanzan a la vez y volando directamente hacia el pez, lo alcanzan al mismo tiempo. Si los pájaros vuelan a la misma velocidad ¿A qué distancia de la palmera más alta apareció el pez? (Pista: Busca, si no lo conoces, información sobre el teorema de Pitágoras y aplícalo para resolver el problema)



(El profesor puede recoger esta actividad para así evaluar el indicador "Aplica el teorema de Pitágoras a la vida real.(34)")

3. Raquel reparte 35 bombones entre sus amigos, dándole a cada uno tantos bombones como amigos son, más dos bombones. ¿Cuántos amigos tiene Raquel?

4. El siguiente problema fue hallado en el capítulo IX del libro chino: "Chu Chang Suan Shu": En medio de una laguna circular de 3m de diámetro, crece un junco que sobresale 30 cm del agua. Cuando se inclina hasta que lo cubre el agua, alcanza justamente la orilla de la laguna, ¿qué profundidad tiene la laguna?

Sesión 6

- Actividad 1:

El profesor resolverá las dudas que existan acerca de los problemas planteados en la tarea para casa, y hará especial hincapié en recordar el Teorema de Pitágoras.

- Actividad 2:

Realizar la presentación “SistEcuac” para introducir los sistemas de ecuaciones.

- Actividad 3:

Consideremos dos coches con movimiento rectilíneo uniforme, cuyas ecuaciones de movimiento son: $e-25t=5$ y $e-30t=0$, respectivamente. ¿Sabrías decir si los coches se encontrarán en algún momento? Y si fuese así, ¿dónde lo harán?

- Actividad 4:

Realizar la presentación “SolSisEc” sobre el número de soluciones que tiene un sistema lineal.

Tarea para casa

1. Andrés y María salieron al campo de excursión. Por el camino fueron recogiendo insectos, Andrés encontró una lombriz y una hormiga y María cogió un caracol y un escarabajo. Al llegar a casa decidieron hacer un juego: compararían el movimiento de la hormiga con el de los demás insectos a través de unos pequeños raíles rectos y suponiendo que se moviesen, cada uno de ellos, siempre a la misma velocidad. Así, suponen que la ecuación que describe el movimiento

de la hormiga es $e-t=2$, la del escarabajo $e-2t=1$, la de la lombriz $2e-2t=4$ y la del caracol $e-t=1$. ¿Podrías ayudarlos? Indica de qué tipo es cada uno de los sistemas que se plantean y, en los casos que sea posible, indica la solución.

2. En el ejercicio anterior, alguno de los sistemas que planteaste, resultó ser compatible determinado. Ya aprendimos a comprobar la solución de una ecuación, utiliza esto, para comprobar la solución de dicho sistema.

Sesión 7

- Actividad 1:

Los alumnos saldrán a la pizarra y resolverán las actividades planteadas explicándolas al resto de sus compañeros. El profesor insistirá en el modo de comprobar las soluciones de un sistema de ecuaciones.

- Actividad 2:

Realizar la presentación “ResSisEc” acerca de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

- Actividad 3:

Un investigador privado observa por la cerradura de una puerta una placa de un parking que pone “18 plazas”, y en una placa justo debajo de la anterior “Completo”. Después observa por debajo de esa misma puerta, pero sólo ve las ruedas de los vehículos y cuenta que son 58. ¿Cómo podría averiguar cuántas motos y coches hay en ese momento en el parking? Plantea el sistema de ecuaciones y revuélvelo por todos los métodos que conoces.

Tarea para casa

Resuelve por el método que consideres más apropiado y comprueba la solución:
1. Una tienda de videojuegos vende 84 videojuegos a dos precios diferentes: unos cuestan 45 euros y otros 36 euros. Si con la venta de todos ellos ha obtenido 3105 euros. ¿Cuántos videojuegos vendió de cada clase?

2. Una plaza triangular tiene un perímetro de 65 m. La plaza tiene forma de triángulo isósceles y cada uno de los lados iguales mide el doble del lado desigual. ¿Cuánto mide cada lado de la plaza?

3. Imagina que estás trabajando en una empresa que coloca aparatos de Aire Acondicionado. Tú y un compañero estáis acabando la instalación de un nuevo modelo de aparato de aire que ha llegado a la tienda. Os ponéis a leer las instrucciones y en ellas os indican que hay dos depósitos de líquido. Tenéis que vaciar el contenido de un tercio del primer depósito en el segundo y después de mezclarlo bien, ¼ del segundo en el primero.
Justo de después de hacer la mezcla tu compañero se da cuenta de que habéis olvidado apuntar la cantidad inicial de líquido que tenía cada depósito, dato que os hace falta para seguir con el procedimiento de arranque del aparato. ¿Sabrías decirle a tu compañero que cantidad en litros tenía cada depósito si tras mezclarlos los dos tienen 6 litros?.

4. Presentamos ahora un problema más antiguo que el del ajedrez.
Es el problema de repartición del pan, registrado en el célebre papiro egipcio de Rind. Este papiro, hallado por Rind a fines del siglo pasado, fue escrito unos 2 000 años antes de nuestra era y constituye una copia de otra obra matemática aún más remota que data seguramente del tercer milenio antes de nuestra era.

Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron siete veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?
(Pista: Para resolver este problema quizás necesites utilizar lo que sabes sobre sucesiones)

Fase de Síntesis

Sesión 8

- El profesor resolverá los problemas planteados en la tarea para casa de la sesión anterior y hará una recopilación de lo trabajado hasta ahora:

Solución Actividad 3

	Depósito 1	Depósito 2
Sin mezclar nada	x	y
Primera mezcla	$\frac{2}{3}x$	$y+\frac{x}{3}$
Segunda mezcla	$\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\left(y+\frac{x}{3}\right)$	$\frac{3}{4}\left(y+\frac{x}{3}\right)$

Sistema
$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\left(y+\frac{x}{3}\right)=6 \\ \frac{3}{4}\left(y+\frac{x}{3}\right)=6 \end{array}\right\}$$

Solución Actividad 4

Es evidente que las cantidades de trigo distribuidas entre los cinco participantes en el reparto constituyen una progresión aritmética creciente. Supongamos que el primer miembro sea *x*, y la diferencia, *y*.

En ese caso tendremos:

Parte de la 1ª	x
2ª	$x+y$
3ª	$x + 2y$
4ª	$x + 3y$
5ª	$x + 4y$

De acuerdo con las premisas del problema establecemos estas dos ecuaciones:

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100,$$

$$7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x + 3y)+(x+4y)$$

Después de su simplificación, la primera ecuación será

$$x + 2y = 20,$$

y la segunda:

$$11x = 2y.$$

Al resolver este sistema resultará

$$x = 1\ 2/3,\ y = 9\ 1/6$$

Por consiguiente, el trigo debe ser repartido en las siguientes proporciones:

1 2/3, 10 5/6, 29 1/6, 38 1/3

- Presentar actividades de repaso de resolución de problemas con ecuaciones de 1º grado, de resolución de problemas con ecuaciones de 2º grado y de resolución de problemas utilizando sistemas de ecuaciones.

Sesión 9

- Prueba de evaluación para ver el nivel de cumplimiento de los objetivos.

Fase de Generalización

Sesión 10

-Entrega de autocorreción de la prueba de evaluación del día anterior con unos indicadores para que ellos mismos se pongan la nota y determinen cuáles han sido sus carencias en la evaluación. En función de su propia valoración, determinar si van a trabajar actividades de refuerzo o actividades de ampliación.

-Refuerzo para alumnos más retrasados y ejercicios de ampliación para los alumnos más destacados. Se trabajará en grupos de 4 (2 alumnos de refuerzo y 2 de ampliación).
A los alumnos de ampliación que ayuden a alumnos de refuerzo de su grupo, se les premiará por ello.

ACTIVIDADES DE REFUERZO:

1.- Traduce al lenguaje algebraico:
a) Mi hermana tiene cuatro años más que yo.
b) El doble de un número.
c) El doble de un número menos 7 unidades.
d) Tres veces el resultado de sumarle 4 al doble de un número.
e) El triple de un número.
f) El perímetro de una habitación con forma de pentágono regular de lado *y*.

2.- Luis debe comprar 2 cuadernos y 5 bolígrafos. En su pueblo hay tres papelerías, ¿en cuál de ellas le saldrá más barata la compra?

	Papelería "El parque"	Papelería "Luisa"	Papelería "Madrid"
Cuaderno	1,50 euros	1, 55 euros	1, 45 euros
Bolígrafo	0,45 euros	0,35 euros	0, 50 euros

a) Expresa mediante una expresión algebraica el coste total de la compra.

b) Indica en cuál de las tres papelerías le saldrá más barata la compra.

3.- Reduce estas expresiones:

a) $2x^2 + x - 7x + x^2$ b) $x(x+4) - 2x$

c) $x^5 - x^4 + 2x - x^5$ d) $2x(x^2 - x) + 3x^3$

4.- Opera y simplifica:

a) $(4x+2)(5x-7)$ b) $(x+1)\cdot(3x-3)$ c) $(x+3)(-x^2+x-1)$

5. Opera:

a) $(x+1)^2$ b) $(x-1)^2$ c) $(x+a)^2$

d) $(x-2)^2$ e) $(t+1)(t-1)$ f) $(3+x)(3-x)$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución obtenida:

1) $4x - 1 = 7$ 2) $4 - 3x = 4$

3) $13x - 5 - 6x = 9$ 4) $1 - 8x + 5 = 11 - 3x$

5) $10 - 15x + 2 = 10x + 5 - 11x$ 6) $3 - (1 - 6x) = 2 + 4x$

7) $2x - 2(x - 1) + 5 = 4 - 3(x + 1)$ 8) $5 - \frac{x}{2} = 3x - 16$

9) $\frac{3x-1}{2} = \frac{5x-4}{3}$ 10) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$

7. Si a la quinta parte de un número se le añaden 9 unidades, se obtiene la mitad del número. ¿De qué número se trata?

8. Reparte 1000 euros entre tres personas de forma que la primera reciba el doble de la segunda y esta el triple que la tercera.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado y comprueba sus soluciones:

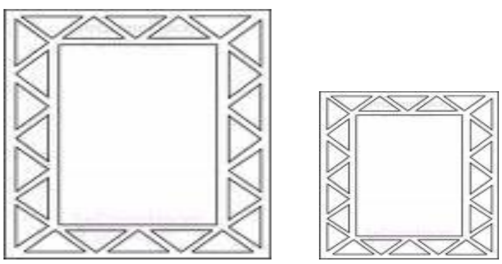
a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x^2 - x - 6 = 0$ c) $x^2 + 6x + 9 = 0$

d) $x^2 = 36$ e) $x^2 = -25$ f) $3x^2 = 1200$

g) $x^2 + 5x = 0$ h) $2x(x - 4) = 0$

10. Miriam tiene 2 años más que José. Si multiplicamos sus edades obtenemos 675. ¿Cuántos años tiene cada uno?

11. El lado de un portafotos cuadrado mide 3 cm más que el lado de otro portafotos también cuadrado. Si la suma de las dos áreas es 89 cm^2, calcula las dimensiones de los portafotos.



12. Representa los pares de rectas correspondientes a cada sistema:

a) $\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x-y=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-5y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

13. Resuelve, por métodos diferentes, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+5y=7 \\ 2x+6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$

14. En la cantina del instituto se venden bocadillos de chorizo ibérico a 2 euros y de jamón a 3 euros. Durante el recreo se han vendido 60 bocadillos por un precio total de 150 euros. ¿Cuántos bocadillos se han vendido de cada tipo?

15. Un grupo de estudiantes ha pagado 150 euros por 3 entradas de patio y 6 de palco. Otro grupo que ha llegado más tarde, por 2 entradas de patio y 2 de palco ha pagado 70 euros. Calcula los precios de cada localidad.

ACTIVIDADES DE AMPLIACIÓN:

1. Efectúa:

a) $(2x^2-3x-1)(x^2+x-1)$ b) $(2x-x^3+x^4+5)(x^3-1)$

2. Calcula:

a) $x\cdot(5x-3)-3\cdot(x^2-x)$ b) $(2x+1)\cdot x^2-(x-1)\cdot x^2$

c) $(5x-2)\cdot(x+1)-(x+1)\cdot(3x-1)$ d) $(2x-1)(x+2)-(x^2-x-4)$

e) $(2x-3y)^2$ f) $(3a+5b)^2$

g) $\left(\dfrac{2}{3}-y\right)^2$ h) $(x^2+y)(x^2-y)$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x-7}{4}+\dfrac{x-1}{3}=x-5$ b) $\dfrac{3x-2}{5}-\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{5x-7}{15}$

c) $\dfrac{2(x+1)}{3}-\dfrac{1-x}{5}=x+\dfrac{3}{10}$ d) $2\left(5x-\dfrac{x-4}{3}\right)=4x$

e) $(3x-1)^2=0$ f) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x}{3}=x-\dfrac{1}{6}$

g) $\dfrac{x^2-1}{3}=\dfrac{x^2-2x+1}{2}$ h) $\dfrac{x^2}{2}+2\left(\dfrac{x}{3}-1\right)=\dfrac{x}{6}(x+3)$

4. Calcula el radio de una plaza circular sabiendo que si aumentamos el radio en 3 m se cuadriplica su área.

5. A una persona le preguntan su edad y responde: “Suma 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultará un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy”. ¿Qué edad tiene?

6. Marta tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno, sabiendo que entre los tres suman 100 años?

7. Resuelve por el método que consideres más adecuado los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x = 6 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3(x-5)}{2} - \dfrac{y-x}{3} = \dfrac{y}{6} + 3 \\ -3(x-y-4) - 10 = y - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2y}{5} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{15} \\ 15x - 15y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{5(x+3)}{2} = y + 2 \\ 2(x+y) - \dfrac{y}{2} = x \end{cases}$

8. En una estadística de un colegio se ha obtenido que el número de familias con 2 o 4 hijos es 57. ¿Cuántas familias hay de cada clase, sabiendo que el número de hijos de estas familias suma 138?

9. En una fiesta de fin de curso se da igual número de regalos a cada uno de los 15 invitados presentes: pero llega un individuo más y hay que dar a cada uno un regalo menos, sobrando así 11 regalos. Halla el número de regalos que se da a cada uno.

10. Halla las edades de la abuela Pepa y de su nieta Paola, sabiendo que hace 10 años la edad de la abuela era 4 veces la edad de la nieta, y dentro de 20 años la edad de la abuela será sólo el doble.

11. Se mezcla café de 7,8 euros el kilo con otro de 7,2 euros el kilo, de modo que la mezcla resulte a 6,5 euros el kilo. ¿Cuántos kilos de cada clase deben mezclarse para obtener 60 kg de mezcla?

12. Un concesionario compra dos coches usados por 16640 euros y los vende por 19444 euros. Con el primero gana el 15% y con el otro el 22%. ¿Cuánto le costó cada uno?

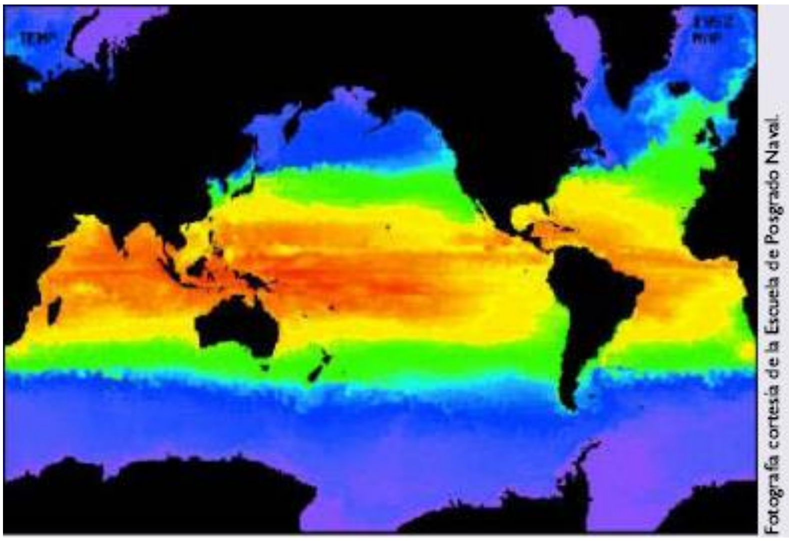
ANEXOS

Describiendo nuestros océanos

Imaginen lo que significaría tratar de describir la circulación y temperatura de la enorme extensión que cubren nuestros océanos. Obtener los modelos adecuados que expliquen el funcionamiento de los océanos beneficiaría no sólo a la comunidad de pescadores de nuestras costas, sino también a los granjeros del interior. Hasta hace muy poco tiempo no disponíamos ni de las herramientas matemáticas necesarias ni de los datos suficientes para construirlos. Hoy en día, la nueva información disponible así como los avances matemáticos hacen posible una predicción rápida, fiable y a corto plazo de los cambios climáticos (por ejemplo, de la llegada del "El Niño").

Pero aún queda mucho trabajo por hacer en el campo de la predicción a largo plazo de los cambios climáticos. Sólo ahora hemos empezado a conocer someramente el funcionamiento de los océanos. La dinámica de ese funcionamiento ya se ha representado mediante ecuaciones, pero la resolución de estas ecuaciones es aún una meta muy lejana. Los ordenadores actuales no tienen la capacidad suficiente para almacenar todos los datos necesarios para obtener buenas aproximaciones a su solución. De ahí que los investigadores recurran a hipótesis simplificadas intentando resolverlas. La fiabilidad de los modelos derivados de dichas hipótesis se prueba con la nueva información disponible. Este es un campo de investigación muy importante, ya que el desciframiento del funcionamiento de nuestros océanos servirá para entender la dinámica de los cambios climáticos.

Más información: *What's Happening in the Mathematical Sciences*, Vol. I, Barry Cipra.



www.ams.org/mathmoments
www.matematicalia.net

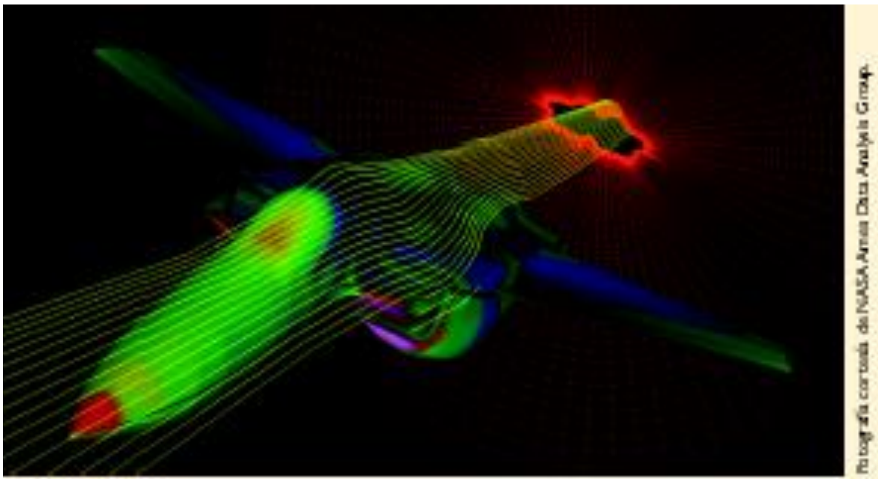
Diseñando aviones

El flujo del aire (y del agua) ha sido estudiado desde hace más de cien años, aunque sólo recientemente los matemáticos han comenzado a entender el complicado fenómeno de la turbulencia, parte esencial de la aerodinámica. Gracias a las matemáticas y a los modernos ordenadores, los túneles de viento se usan cada vez menos en el diseño aeronáutico.

Las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el flujo de los fluidos son ecuaciones en derivadas parciales para las que aún no se conoce una solución precisa. Cuanto más rápido fluye un fluido, más se incrementa el término no lineal de dichas ecuaciones, aumentando la dificultad para generar soluciones numéricas de las mismas.

Así pues, las turbulencias que afectan a los aviones son especialmente difíciles de entender, sobrepasando incluso la potencia de cálculo de los supercomputadores actuales. Se necesita avanzar en la teoría para que la tecnología actual pueda acceder al problema. Hoy en día los matemáticos tratan de verificar las leyes de Richardson y Kolmogorov, dos hipótesis que intentar explicar el fenómeno de la turbulencia.

Más información:
What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 3, Barry Cipra.



www.ams.org/mathmoments
www.matematicalia.net

Ecuaciones

Un gran chorro puesto en una ecuación.

Hace ya tiempo que se conocen las ecuaciones que modelan el movimiento de los fluidos. Lo que ocurre es que esas ecuaciones, que modelan por ejemplo el comportamiento de los pantanos, son muy complejas de resolver y permiten obtener soluciones exactas sólo en ciertos casos puntuales.
Por eso se recurre al ordenador para resolver estas intratables ecuaciones.

Ecuaciones que modelan los terremotos.

Existen ecuaciones que modelan la propagación de las ondas sísmicas (terremotos) que se han obtenido a partir de modelos teóricos a partir de las medidas realizadas en la superficie.
Estas ecuaciones se conocen desde hace más de 100 años, pero para ellas, no existen lo que los matemáticos llaman *soluciones analíticas*, es decir, una fórmula en la que se tengan que sustituir los datos para obtener los resultados esperados.
Su resolución pasa por técnicas numéricas aplicadas con ordenador para obtener una gran cantidad de números que describen, en cada momento, el estado de cada punto de la corteza o del interior de la Tierra.

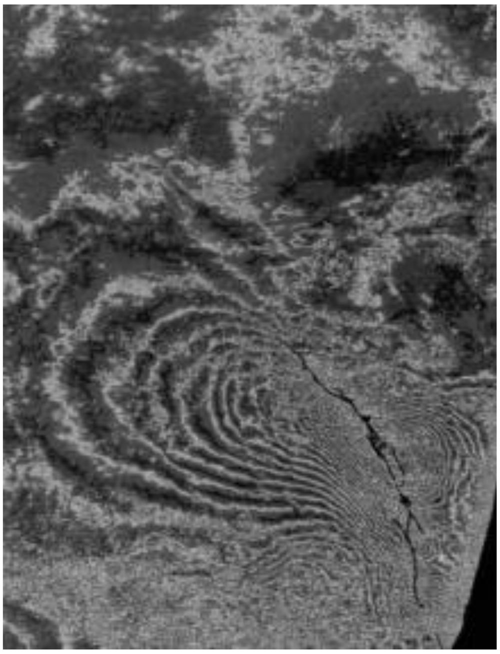


Foto de un Terremoto de magnitud 7,3 en California

Ecuaciones que modelan el tiempo atmosférico
También existen ecuaciones que modelan el comportamiento del tiempo atmosférico pero con los mismos problemas anteriormente comentados.

Ecuaciones que modelan el movimiento de un cohete
Existen ecuaciones que describen el movimiento de un cohete, por ejemplo, se podría modelar la ecuación del movimiento de un cohete que sale de la Tierra, da la vuelta a la Luna y vuelve a la Tierra, en este caso, se trata de una ecuación diferencial.

Otras ecuaciones
Ecuaciones para modelar movimientos económicos, el movimiento de un grano de polen en el agua, el comportamiento de los gases, ...

Si existen ecuaciones que modelan todas estas situaciones tan variopintas, ¿por qué existen problemas para hacer predicciones de futuro?

Edwar Lorenz (matemático) en 1963, se dio cuenta mientras estudiaba un modelo meteorológico sencillo que al poner datos iniciales que diferían menos de una milésima se obtenían predicciones meteorológicas totalmente distintas. Hasta ese momento se pensaba que pequeñas variaciones en los datos iniciales producían pequeñas variaciones en los resultados.

Este comportamiento tan impredecible ha dado lugar incluso a una rama de la Física y la Matemática: **La Teoría del CAOS**.

El Caos reside en todas partes y es el obstáculo fundamental, para que, conociendo los modelos que rigen el Universo, no podamos hacer predicciones. Pero este Caos no significa azar y desorden, sino que tras estudiarlo se ha observado que en él aparecen unos monstruos geométricos: los fractales.

Evaluación de la Unidad Didáctica

La siguiente tabla muestra cómo se van a evaluar los indicadores seleccionados para la Unidad Didáctica "Ecuaciones y Sistemas"

Evaluación	Indicadores
Mediante una prueba.	1.Resuelve problemas de la vida mediante ecuaciones de primer grado. (27) 2.Resuelve problemas de la vida mediante ecuaciones de segundo grado. (28) 3.Resuelve problemas de la vida mediante sistemas de ecuaciones. (29) 4.Comprueba que la solución a un problema es correcta. (30)
	5.Usa el concepto de fracción en la vida. (12) 6.Identifica información relevante en problemas de matemáticas.(7) 7.Sabe autovalorar el trabajo realizado. (75) 8.Expresa su opinión personal sobre textos y problemas realizados. (76)
Mediante recogida de información.	9.Reconocer progresiones aritméticas y geométricas en la vida.(22) 10.Aplicar el teorema de Pitágoras a la vida real. (34) 11.Entender situaciones de la vida mediante modelos lineales. (46)

	12.Conoce los efectos del cambio climático. (57) 13.Respeta las opiniones de los demás. (69) 14.Practica diálogo, mediación, arbitraje y consenso. (71) 15.Sabe trabajar en equipo. (72)

Prueba de evaluación

Varios agentes de policía investigan un caso clasificado como "Alto Secreto".

1. Al comienzo de la investigación los agentes buscaron un código secreto para comunicarse. Así que estuvieron analizando diferentes códigos. Uno de ellos era el que consistía en duplicar un número elevado al cuadrado y sumarle 7. ¿Qué expresión polinómica se utilizaría para este tipo de cifrado? ¿Y para el que consiste en triplicar un número y restarle 2?

2. Un agente retirado les comentó que también podrían utilizar expresiones más complicadas como:

a) $x+5-3x(2x-3)$

b) $x^2-x+1-5x+x^2-3$

Pero uno de los agentes dijo que esas expresiones se podrían transformar en otras más sencillas. ¿Cuáles?

3. El Comisario les propuso que utilizasen expresiones repetidas como:

a) $(x+3)^2$ b) $(3-2x)^2$ c) $(x-5)(x+5)$

Pero al Agente López no le parecieron convenientes porque eran expresiones conocidas. ¿Podrías desarrollarlas?

4. En plena investigación, los agentes observan que el sospechoso sale de su escondite con una cierta cantidad de dinero que ellos desconocen. Lo siguen por toda la ciudad, interrogando a todos aquellos con los que se cruza en su camino. De este modo, averiguan que el sospechoso gasta un tercio del dinero que llevaba en un supermercado, un cuarto del resto en una farmacia y 20 euros en una librería. Al llegar de nuevo a su escondite, el sospechoso deja encima de la mesa los 4 euros que le quedaban.

a) Indica las fracciones de dinero que gastó el sospechoso en el supermercado y en la farmacia. Una vez resuelto el problema indica a cuánto dinero corresponden dichas fracciones.
b) ¿Con cuánto dinero salió el sospechoso de casa?
c) Comprueba que la solución obtenida es la correcta.

5. Los agentes escuchan al sospechoso hablar por teléfono con alguien que le indica que construya una tablilla rectangular donde uno de los lados sea 5 cm mayor que el otro de forma que el área de la tablilla sea de 234 cm^2. Los agentes deben averiguar las medidas de la tablilla, ¿podrías ayudarles?
a) Resuelve el problema.
b) Expresa tu opinión personal sobre el problema realizado y explica por qué has tomado esa solución.
c) Comprueba la solución.

6. El sospechoso comienza a fabricar tablillas, pero los agentes descubren que, aunque todas parecen iguales, no pesan lo mismo, sino que existen dos tipos diferentes de tablillas que el sospechoso esconde en cajas de cartón. En una de las cajas, hay dos tablillas de un tipo y tres del otro, y el sospechoso había apuntado en ella: “642 g”. En otra de las cajas, hay una tablilla del primer tipo y cinco del segundo, y en esa caja aparecía la inscripción: “790 g”. ¿Podrías averiguar cuánto pesa cada tablilla?
a) Identifica la información relevante del problema para plantear las ecuaciones necesarias.
b) Resuelve el problema e indica la solución.
c) Comprueba la solución obtenida.

7. Autovaloración del nivel de conocimiento:
i) ¿Cuál crees que es tu nivel de conocimiento para dar una respuesta adecuada a las cuestiones anteriores?
a) Muy bueno b) Bueno c) Regular d) Limitado

ii) ¿El esfuerzo que has realizado en la prueba ha sido suficiente?
a) Mucho b) Bastante c) Poco d) Nulo

Hoja de Autovaloración del alumno

Marcar con una “x” la valoración obtenida en cada pregunta

PREGUNTAS (Indicadores)	0	1	2	3
BLOQUE 1: EXPRESIONES ALGEBRAICAS				
1. Traducir expresiones del lenguaje verbal al lenguaje algebraico (24).	0	1	2	
2. Transformar expresiones algebraicas (25)	0	1	2	
3. Conocer las igualdades notables (26).	0	1	2	3
BLOQUE 2: ECUACIONES Y SISTEMAS				
4.b) Resolver problemas mediante ecuaciones de primer grado (27).	0	1	2	
5.a) Resolver problemas mediante ecuaciones de segundo grado (28).	0	1	2	
6.b) Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones (29).	0	1	2	
4.c), 5.c) y 6.b) Comprobar que la solución a un problema es correcta (30)	0	1	2	3
OTROS INDICADORES				
4.a) Usa el concepto de fracción en la vida. (12)	0	1	2	3
5.b) Expresa su opinión personal sobre textos y problemas realizados. (76)	0	1		
6.a) Identifica información relevante en problemas de matemáticas.(7)	0	1	2	
7. Saber autovalorar el trabajo realizado (75).	0	1	2	

AUTOPROPUESTA DE REFUERZO	
Criterio	**¿Necesita refuerzo?**
“Nota Bloque 1”< 4	Si No

“Nota Bloque 2”< 5	Si No

CRITERIOS DE CORRECCIÓN DE LA PRUEBA
1. La solución a cada una de las preguntas es: $2x^2+7$ y $3x-2$ (es posible utilizar cualquier otra letra), respectivamente. **Si has contestado bien a las dos preguntas te pones 2 puntos, si sólo lo has hecho a una de ellas te pones 1 punto, si no has contestado correctamente a ninguna de ellas te pones 0 puntos.**
2. Las expresiones simplificadas son: a) $-6x^2+10x+5$, b) $2x^2-6x-2$ **Si has conseguido simplificar las dos expresiones te pones 2 puntos, si sólo has conseguido simplificar una de ellas te pones 1 punto.**
3. Las expresiones desarrolladas son: a) x^2+6x+9, b) $4x^2-12x+9$, c) x^2-25 **Te pones 1 punto por cada expresión desarrollada correctamente.**
4.a) La fracción que corresponde al supermercado es $\frac{1}{3}x$ y la que corresponde a la farmacia es $\frac{1}{6}x$. El dinero que corresponde al supermercado son 16 euros y a la farmacia 8 euros. **Te pones 1 punto por cada fracción que hayas averiguado y 1 punto más si, una vez resuelto el problema, has calculado bien las cantidades en euros.**
4.b) La ecuación a resolver es: $\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x+20+4=x$ y el sospechoso salió de casa con 48 euros. **Si has planteado bien la ecuación te pones 1 punto, si también has dado con la solución te pones 1 punto más.**
5.a) La ecuación a resolver es: $x^2+5x-234=0$ y las medidas de la tablilla son: 13cmx18cm. **Si has planteado la ecuación te pones 1 punto, si también has dado con la solución te pones 1 punto más.**

5.b) Al resolver la ecuación se obtienen dos soluciones: $x=13$ y $x=-18$. La segunda solución no es válida porque un número negativo no puede ser el valor de una medida, así que la única solución válida es 13 cm y como un lado de la tablilla es 5 cm mayor que el otro, el otro lado medirá 18 cm (llamando x al lado más pequeño). **Si has expresado tu opinión explicando correctamente por qué has tomado esa solución, te pones 1 punto.**
6.a) El sistema de ecuaciones es: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=642 \\ x+5y=790 \end{array}\right\}$ **Si has planteado bien una ecuación del sistema te pones 1 punto, si has planteado bien el sistema completo te pones 2 puntos.**
6.b) La solución del problema es: El primer tipo de tablillas pesa 120 g y el segundo 134 g. **Si has resuelto el sistema de ecuaciones correctamente te pones 1 punto, si además has dado la solución te pones 1 punto más.**
4.c), 5.c) y 6.c) **Si has sustituido en las ecuaciones de los problemas las soluciones obtenidas, obteniendo finalmente una igualdad, te pones 1 punto por cada apartado bien hecho.**
7. i) Si la respuesta que has dado coincide con el resultado al corregir el examen entonces1 punto. **7. ii) Si lo que pensabas en la prueba coincide con el resultado al corregir el examen entonces 1 punto.** **En total entre los dos apartados puedes sumar 2 puntos.**