Álgebra

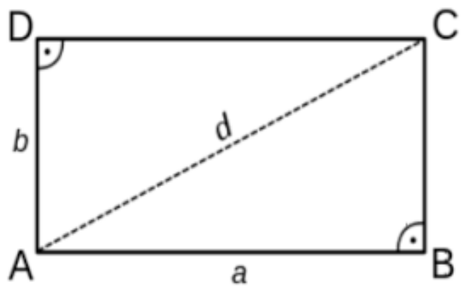
Estándares - Examen
B2.C4.2. Resuelve ecuaciones (algebraicas o no algebraicas) y problemas de ecuaciones
B2.C3.2. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
B2.C4.1. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas con método Gauss
B2.C1.2. Intervalos. Inecuaciones.

Lenguaje Algebraico

Es el lenguaje que nos permite traducir situaciones de la vida real a lenguaje matemático mediante el uso de letras en combinación con símbolos y números.

1. Dado un cubo de lado x, escribe la expresión algebraica que representa la suma del perímetro de una de sus caras, del área de una de las caras y del volumen del cubo.

2. Determina el perímetro de un rectángulo, sabiendo que la longitud del lado mayor es cuatro veces la del lado menor. Determina también su área y su diagonal.



Polinomios. Factorización.

Polinomios

$$P(x)= a_n x^n+\ldots+a_2 x^2+a_1 x+a_0$$

Grado del P(x) → n // Término independiente → a_0

<u>Operaciones con polinomios</u>

Suma/Resta ($P(x)\pm Q(x)$)

Producto ($P(x) \cdot Q(x)$) // División ($P(x) : Q(x)$)

<u>Valor numérico de P(x) en x=a</u>

P(a) = Sustituir x por en a y operar

<u>Raíz de un polinomio</u>

x=a es raíz de un polinomio si P(a)=0

Polinomios. Factorización.

Regla de Ruffini para dividir entre x-a

Método para obtener cociente y resto de $P(x):(x-a)$

Teorema del resto

Resto de $P(x):(x-a)$ es $P(a)$. Si $P(a)=0 \rightarrow a$ raíz de $P(x)$

Teorema del factor

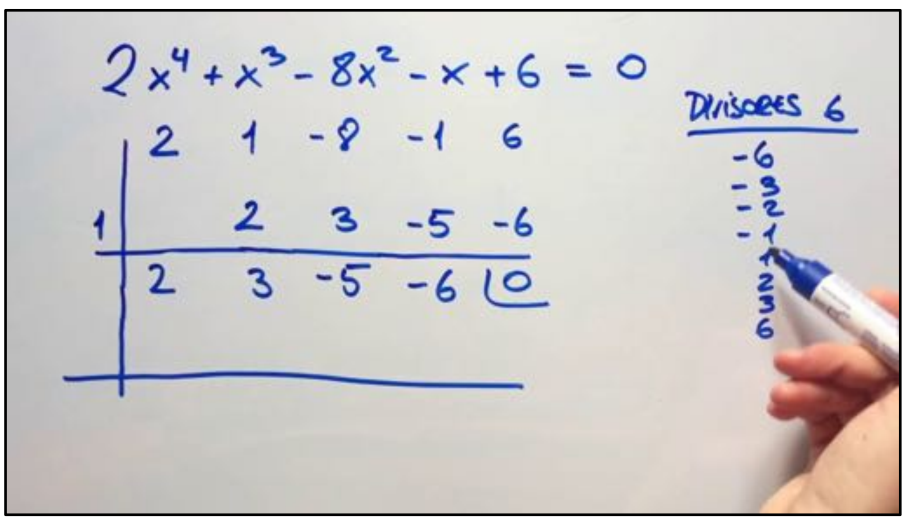
a es raíz de $P(x) \Leftrightarrow (x-a)$ es un factor de $P(x)$

Polinomios. Factorización.

Factorizar un polinomio P(x) consiste en expresar dicho polinomio como producto de factores irreducibles (los cuales son también polinomios de grado 1 o 2)

$$P(x)= (x-a)\cdot(x-b)\cdot(x^2+cx+d)\ ...$$

- Si grado P(x) es 1 o 2 → Resolveremos P(x)=0
- Si grado P(x) >2 → Utilizaremos la Regla de Ruffini.



Polinomios. Factorización.

EJERCICIOS

3. Dado $P(x)=x^3+ax-4$, calcula 'a' sabiendo que el resto de dividir $P(x):(x-2)$ es 8.

4. Halla el valor de m para que el polinomio $P(x)=2x^3-3mx^2+x+3$ sea divisible por $(x+1)$.

5. Encuentra un polinomio de 2º grado que tenga como término independiente -3 y cuyo valor numérico para $x=2$ sea 7 y para $x=-2$ sea 3.

6. Si el cuadrado de un polinomio es $x^4-10x^3+37x^2-60x+36$, ¿Cuál es dicho polinomio?.

Polinomios. Factorización.

EJERCICIOS

7. Factoriza los siguientes polinomios:

a) x^3-5x^2+6x b) $5x^3-5$ c) $x^5+4x^4+5x^3+2x^2$

d) $x^3-4x^2+4x-16$ e) $4x^4-15x^2-5x+6$

Polinomios. Factorización.

EJERCICIOS

8. Intenta factorizar $x^4+4x^3+8x^2+7x+4$

(Observación: dicho polinomio es divisible por x^2+x+1)

Polinomios. Factorización.

EJERCICIOS

9. a) Construye un polinomio de grado 4 tal que posea tres raíces distintas.

b) Determina un polinomio de grado 4 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

c) Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz.

Fracciones Algebraicas

Una fracción algebraica, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, es una fracción que tiene por denominador un polinomio.

<u>Operaciones</u>:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{R(x)}{T(x)} \;\; ; \;\; \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{T(x)} \;\; ; \;\; \frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{T(x)}$$

Fracciones Algebraicas

EJERCICIOS

10. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1}$

b) $\frac{3x}{2x-3} - 6x$

c) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-9} - \frac{5x}{x+2}$

d) $\frac{7x}{x+2} : \frac{1}{x^2-4}$

Ecuaciones 2º grado. Incompletas. Bicuadradas

$ax^2+bx+c=0$ → $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ecuaciones incompletas

$ax^2+bx=0$ → $x(ax+b)=0$ → $x=0$; $x=-b/a$

$ax^2+c=0$ → $x=\pm\frac{\sqrt{-c}}{a}$

Ecuaciones Bicuadradas

$ax^4+bx^2+c=0$ → Cambio $y=x^2$. Resolver $ay^2+by+c=0$

Con las soluciones y_0 , y_1, despejar $x^2=y_0$; $x^2=y_1$

Ecuaciones de grado >2

<u>Ecuaciones de grado ≥3</u>

Expresar P(x)=0 y factorizar utilizando Ruffini.

$$x^3+4x^2+x-2=0$$

	1	4	1	-2
-1		-1	-3	2
	1	3	-2	0

Cociente: $C(x) = x^2 + 3x - 2$

Resto: $R = 0$

Ecuaciones con fracciones algebraicas

$$\frac{2x-3}{x^2-5x}+\frac{x+4}{x}=\frac{3}{4}$$

Ecuaciones con radicales – Tipo I

$$3 - x + \sqrt{3x + 12} = x + 8$$

En las ecuaciones con radicales hay que comprobar si la solución cumple la ecuación porque a veces no es así.

Ecuaciones con radicales – Tipo II

$$\sqrt{4x-9}-\sqrt{2x+1}=2$$

Ecuaciones con radicales

EJERCICIOS

11. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$

b) $6+\sqrt{x}=x$

c) $6-\sqrt{x}=x$

d) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=7$

Ecuaciones con valor absoluto

(1) Se aísla el valor absoluto en uno de los miembros de la ecuación.

(2) Se plantean dos ecuaciones

$$|f(x)| = g(x) \rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

(3) Comprobar que soluciones son válidas.

Ecuaciones con valor absoluto

EJERCICIOS

12. Resuelve las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $|3+5x|-x=6$ b) $|x^2-x-2|+2=x$

Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

a) $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$ b) $5^{x^2-5x+6} = 1$ c) $3^{1-x^2} = 2$ d) $2^x + 2^{x+1} = 12$

Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Practica

Resuelve:

a) $2^{x^2-4x} = \dfrac{1}{16}$

b) $5^{x^2-1} = 7$

c) $3^{x+2} - 3^x = 72$

Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

EJERCICIOS

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4^{3x} = 0{,}25^{3x+2}$

b) $2^{7-x^2} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{9^{x+1}}{3^{x+2}} = 10$

d) $5^{x+3} = 130$

Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

EJERCICIOS

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 3$

c) $2\log(x) - \log(x-1) = 3\log(2)$

d) $4\log_2(x^2+1) = \log_2 625$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones de las que pretendemos encontrar su solución común (o sus soluciones comunes). O bien, reconocer que no tienen ninguna solución común (**incompatibles**).

Por ejemplo, la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 7 \\ 5x - 2y = -7 \end{array}\right\} \text{ es } x = 1,\ y = 6$$

porque es solución de ambas ecuaciones.

Sistemas de Ecuaciones No Lineales

1 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:*

a) $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x+y} + y = x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \log x - \log y = 5 \\ \log (xy) = 4 \end{cases}$

Sistemas de Ecuaciones

EJERCICIOS

15. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 90 \\ \log(x) + 1 = \log(y) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^{x-1} = 8^{y+3} \\ \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \end{cases}$

Sistemas Escalonados

$$\begin{cases} 3x - 5y - 10z = -15 \\ \qquad 2y + \ 5z = 4 \\ \qquad\qquad\quad 3z = -6 \end{cases}$$

Método de Gauss para resolución de sistemas

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 21 \\ 3x + y - z = -18 \\ 2x - y + 3z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - z = 9 \\ 3x + y - 2z = 13 \end{cases}$$

Ejercicios

Sistemas de Ecuaciones

16. Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 7x+2y-z=0 \\ 3x+5y+4z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ 5x-3y+z=3 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+2y-3z=1 \\ 5x-3y+2z=4 \\ 3x-3y+2z=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+t=3 \\ x+z-t=1 \\ y+z+t=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

Problemas

1. Un estudiante mete una parte de sus ahorros en un banco que le da un 3% de interés. El resto del dinero que es un 40% lo invierte en acciones de la bolsa que le dan un interés del 12%.

a) Determina el polinomio que expresa las ganancias en función de la cantidad de dinero invertida.

b) Si sus ahorros son 2300€, ¿Cuánto dinero ganará con la inversión?.

Problemas

2. Una empresa de Hellín ha determinado que sus ingresos vienen dados por la expresión $I(x)=2200-40x+x^2$ con x el nº de unidades de producto vendidas y sus gastos en nóminas y seguros sociales vienen dados por $C(x)=3400-50x$.

a) Expresa la ganancia de la empresa $G(x)$ en función del nº de unidades vendidas.
b) ¿Cuántas unidades tienen que vender para que no haya pérdidas?.
c) ¿Qué beneficio tendrán si venden 110 unidades?

Problemas

3. Sumando siete unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿De qué número se trata?

4. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Escribe la expresión algebraica que resulta de aplicar el Teorema de Pitágoras y calcula la hipotenusa y los catetos.

Problemas

5. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

6. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.

Problemas

7. Unos pantalones le han subido en diciembre un 20% el precio, en enero se lo han bajado un 30% y en febrero se lo han vuelto a subir un 15%. Si el precio en febrero es de 51,13€. ¿Qué precio tenía a principios de diciembre antes de la primera subida?. ¿Qué porcentaje le han aplicado en total desde diciembre a febrero?.

8. Tenemos dos tipos de baldosas rectangulares, unas rojas de 30x40 cm y otras verdes de 20x50 cm. Si para cubrir una habitación elegimos las rojas necesitamos 40 baldosas menos que si elegimos las verdes. ¿Qué superficie tiene la habitación?.

Problemas

9. Dos grifos llenan un deposito de 1000 litros en 1 hora y 12 minutos. Por separado, el primero tardaría 1 hora más que el segundo en llenar el depósito. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno por separado?.

10. Una balsa se llena en 5 horas utilizando su toma habitual y en 20 horas utilizando una manguera. ¿Cuánto tardará en llenarse si se usan la toma habitual y la manguera a la vez?

Problemas

11. Un granjero espera obtener 36€ por vender una cierta cantidad de huevos. Por el camino se le rompen 4 docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta el precio de la docena en 0,45€. ¿Cuántas docenas tenía al principio?.

12. Un grupo de amigos se gastan 135€ en una cena. Aprovechando un despiste se escapan 4 de los amigos, con lo que para poder pagar la cuenta ahora tienen que poner 12€ más cada uno de los amigos que quedan. ¿Cuántos amigos eran al principio?.

Problemas

13. Calcula las dimensiones de un rectángulo de perímetro 28 cm y diagonal 10 cm.

14. Un triángulo equilátero tiene un área de 30 m^2. ¿Cuánto mide su lado?.

15. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €.Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca .¿Cuánto vale cada cosa?

Problemas

16. Las **tres cifras** de un número suman 24. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 198; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.

17. Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 66 €. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5 €.

Problemas

18. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano. La suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

19. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.