Teoría Tema 2. Álgebra

B2.C4.2. Resuelve ecuaciones (algebraicas o no algebraicas) y problemas de ecuaciones.

1. Polinomios

$P(x)= a_nx^n+...+a_2x^2+a_1x+a_0$

Grado del P(x) → n // Término independiente → a_0

Operaciones con polinomios

Suma/Resta ($P(x) \pm Q(x)$) //

Producto ($P(x) \cdot Q(x)$) // División ($P(x) : Q(x)$)

https://www.youtube.com/watch?v=sqSzkXrbmtA

Valor numérico de P(x) en x=a

P(a) = Sustituir x por en a y operar

Raíz de un polinomio

x=a es raíz de un polinomio si P(a)=0

Regla de Ruffini para dividir entre x-a

Método para obtener cociente y resto de P(x): (x-a)

https://www.youtube.com/watch?v=Rp3LEbCfNFs

Teorema del resto

Resto de P(x):(x-a) es P(a). Si P(a)=0 →a raíz de P(x)

https://www.youtube.com/watch?v=8Av_OVd0snM

Teorema del factor

a es raíz de P(x) ⇔ (x-a) es un factor de P(x)

2. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios del menor grado posible. Si un polinomio no se puede factorizar entonces se dice que es irreducible. Los irreducibles son de grado 1 o 2.

$P(x)= (x-a)\cdot(x-b)\cdot \cdot \cdot (x^2+cx+d) \cdots ...$ https://www.youtube.com/watch?v=ozzalwEBhw0

Pasos para factorizar un polinomio P(x) https://www.youtube.com/watch?v=Kn15S7w4IA8

(1) Extraer factor común si es posible (esto se hace cuando no hay término independiente a_0)

(2) Si P(x) es de grado 1 o 2, entonces resolver directamente P(x)=0 para sacar las raíces.

(3) Si P(x) es de grado >2, entonces usar la Regla de Ruffini para buscar raíces enteras.

(4) A partir de las soluciones escribir el polinomio factorizado

3. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, es una fracción que tiene por denominador un polinomio.

Operaciones: $\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{R(x)}{T(x)}$; $\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{T(x)}$; $\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{T(x)}$

https://www.youtube.com/watch?v=fyoP9EWxZRE

4. Resolución de ecuaciones de grado ≥2

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ecuaciones incompletas

$ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x=0$; $x=-b/a$

$ax^2+c=0 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{-c}}{a}$

https://drive.google.com/file/d/1JCQIrHY39q827ifXvFZmGCXyULNe3-ut/view?usp=sharing
https://drive.google.com/file/d/14tMQGqYxF8whcRWrfyLdYXu2dgWebsJ6/view?usp=sharing

Ecuaciones Bicuadradas

$ax^4+bx^2+c=0 \rightarrow$ Cambio $y=x^2$. Resolver $ay^2+by+c=0$

Con las soluciones y_0 , y_1, despejar $x^2=y_0$; $x^2=y_1$

https://www.youtube.com/watch?v=GpsgWkhieC8

Ecuaciones de grado ≥3

Expresar P(x)=0 y factorizar utilizando Ruffini.

https://drive.google.com/file/d/1ewCcwIW7aA3qPmhWzEHHcupd6jUamRLq/view?usp=sharing

5. Ecuaciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{M(x)}{L(x)}$

(1) Calcular el m.c.m de los denominadores.

(2) Multiplicar todos los términos de la ecuación por el m.c.m eliminando los denominadores.

(3) Se resuelve la ecuación resultante.

https://www.youtube.com/watch?v=jOgpPSyu-qM

6. Ecuaciones con radicales ($\sqrt{x+a}+b=cx$)
(1) Si hay un solo radical se aísla en un lado.
(2) Se elevan los dos miembros de la ecuación al índice de la raíz y se resuelve la ecuación.
(3) Se comprueba si las soluciones son válidas.
(4) Si hay más de un radical se repite el proceso.
https://www.youtube.com/watch?v=0kImG9PkGO0

7. Ecuaciones con valor absoluto
(1) Se aísla el valor absoluto en uno de los miembros de la ecuación.
(2) Se plantean dos ecuaciones

$$|f(x)| = g(x) \rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

(3) Comprobar que soluciones son válidas.
https://www.youtube.com/watch?v=R1d6zO8Iu3o

B2.C3.2. Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

8. Ecuaciones exponenciales (Ej: $2^x+2^{x+2}=10$)
(1) Se hace el cambio $y=a^x$.
(2) Se resuelve la ecuación queda tras el cambio (sin exponenciales).
(3) Con la solución, se deshace el cambio ($x=\log_a(y)$)
https://www.youtube.com/watch?v=JhENx5M2Cq4
https://www.youtube.com/watch?v=35yTEZfJqaI

9. Ecuaciones logarítmicas
(1) Se agrupan todos los logaritmos utilizando sus propiedades a cada lado de la igualdad.
(2) Se elimina el logaritmo y se resuelve la ecuación
(3) Se comprueban las soluciones obtenidas.
https://www.youtube.com/watch?v=g9tfN-oiG4s

B2.C4.1. Plantea, clasifica y resuelve sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas por el método de Gauss.

10. Sistemas de ecuaciones
Posibles casos al resolver un sistema de ecuaciones:
- Sistema Compatible Determinado (SCD) → Tienen una única solución
- Sistema Compatible Indeterminado (SCI) → Tiene infinitas soluciones (alguna ecuación se convierte en 0=0)
- Sistema Incompatible (SI) → No tiene soluciones (alguna ecuación se convierte en nº = 0)

Resolución por Método de Gauss
(1) Queremos transformar nuestro sistema en un sistema triangular. Para ello se escoge como primera ecuación y la primera incógnita aquella cuyos coeficientes sean los mejores para reducir el resto de incógnitas.
(2) Por reducción eliminamos la primera incógnita del resto de ecuaciones (2ª, 3ª, …)
(3) Ahora con la 2ª incógnita de la 2ª ecuación eliminamos por reducción la 2ª incógnita del resto (3ª, …)
(4) Así sucesivamente hasta obtener un sistema triangular. A partir de ahí se resuelven las ecuaciones en orden inverso, es decir, desde la última a la primera.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ x+y+z=3 \\ x+4y+3z=8 \end{cases} \xRightarrow[a\,matriz]{Pasamos} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right) \xRightarrow[1^a\,fila-3^a\,fila]{1^a\,fila-2^a\,fila} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \xRightarrow[2\cdot 2^a\,fila+3^a\,fila]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Con lo que se nos queda el siguiente sistema triangular:

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ y=1 \\ -2z=-2 \end{cases}$$

→ Resolvemos en orden inverso z=1 ; y=1 → x+2·1+1=4 → x=1

https://www.youtube.com/watch?v=Ix9hDqfNuIA

B2.C1.2. Intervalos. Inecuaciones.

11. Intervalos

Abierto (a,b)=$\{x \in R: a < x < b\}$ Cerrado [a,b]= $\{x \in R: a \leq x \leq b\}$

Semiabierto (a,b]= $\{x \in R: a < x \leq b\}$ [a,b)= $\{x \in R: a \leq x < b\}$

Semirectas (a,∞) [a, ∞) (-∞,b) (-∞,b]

Uniones e intersecciones de intervalos. (**https://www.youtube.com/watch?v=RyTk9OoQU38**)

12. Inecuaciones de grado 1

- Grado1. Las inecuaciones de 1º grado se resuelven de forma similar a las ecuaciones de 1º grado pero con la diferencia de que **cuando pasamos multiplicando o dividiendo un número negativo de un miembro a otro, la desigualdad cambia de sentido**. Suelen tener muchas soluciones.

Ejemplo: $\frac{-2x+3}{2} \geq 7 \;\rightarrow\; -2x+3 \geq 14 \;\rightarrow\; -2x \geq 11 \rightarrow x \leq \frac{11}{-2} \rightarrow x \leq -5{'}5 \rightarrow (-\infty, -5{'}5]$

- Grado 1 con valor absoluto.

$|z| < 5 \rightarrow -5 < z < 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 5 \rightarrow Estudiar -5 < \frac{x-2}{3} < 5$

$|z| \leq 5 \rightarrow -5 \leq z \leq 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| \leq 5 \rightarrow Estudiar -5 \leq \frac{x-2}{3} \leq 5$

$|z| > 5 \rightarrow z < -5 \;\text{ó}\; z > 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| > 5 \rightarrow Estudiar\;\; la\; unión\; de\; \frac{x-2}{3} < -5\;;\; \frac{x-2}{3} > 5$

$|z| \geq 5 \rightarrow z \leq -5 \;\text{ó}\; z \geq 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| \geq 5 \rightarrow Estudiar\;\; la\; unión\; de\; \frac{x-2}{3} \leq -5\;;\; \frac{x-2}{3} \geq 5$

13. Inecuaciones de grado >1

- 2º Grado (https://www.youtube.com/watch?v=uRlK2Omifsg)

Igualar a 0 la ecuación, sacar las soluciones, hacer una tabla con esas soluciones y estudiar el signo.

Ejemplo: x^2-5x+6≤0 → Resolver x^2-5x+6=0 → x=2 y x=3

2 3

(-∞,2)	(2,3)	(3, ∞)
+	-	+

(Sustituimos x=0 → 0^2-5·0+6=6 +) (Sustituimos x=2,5 → -) (Sustituimos x=4 → +)

Solución: como pone ≤0 →[2,3]

- Cociente de polinomios. Se hace de manera análoga al tipo anterior pero igualando numerador y denominador a 0. Con las soluciones obtenidas se hace la tabla con los signos. La solución nunca puede contener las soluciones del denominador.

Ejemplo:$\frac{x+1}{x^2-5x+6} > 0$ → Resolvemos x+1=0 y x^2-5x+6=0 → Soluciones: -1, 2 y 3

-1 2 3

(-∞,-1)	(-1,2)	(2,3)	(3, ∞)
-	+	-	+

2 y 3 no pueden incluirse en la solución. Como pone >0 → (-1,2)u(3, ∞)