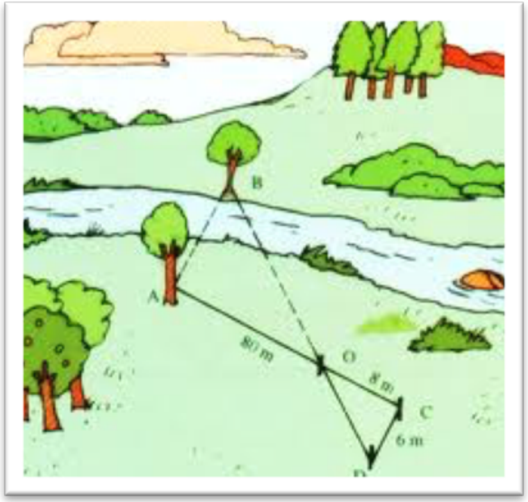
Trigonometría



Recordatorio:

Trigonometría

Relaciones entre sus lados

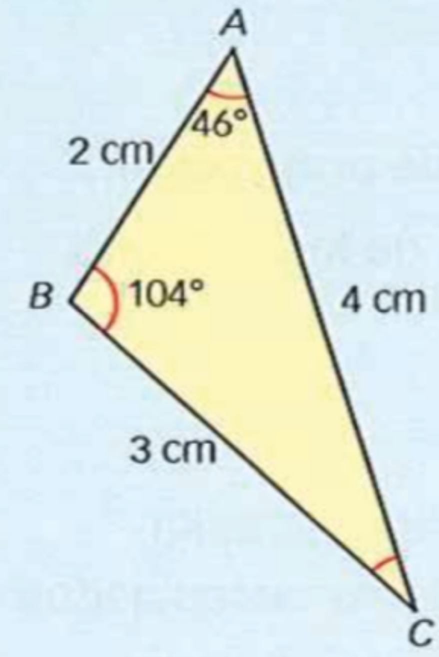
Dado un triángulo *ABC*, siempre se cumple que:

- El lado mayor es menor que la suma de los otros lados.

Relaciones entre sus ángulos

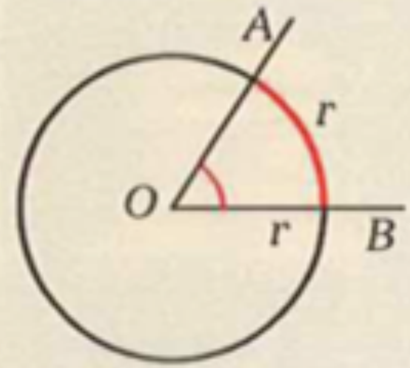
La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180°.

EJEMPLO



1. Medida de un ángulo

Se llama **radián** a la amplitud del ángulo central de una circunferencia cuyo arco mide lo mismo que su radio. Su abreviatura es rad.



- Sistema Sexagesimal → Los ángulos se miden en grados
- Sistema internacional → Los ángulos se miden en radianes

<u>¿Qué longitud en grados mide un radián?</u>

La longitud de una circunferencia es $2\pi r$, es decir, 2π veces el radio. Luego,

$$2\pi r \text{ ------------------------ } 360^{\circ}$$
$$1\ r \text{ ------------------------ } x$$

¿Cuándo usar grados y cuándo radianes?

Los grados se usan generalmente para problemas de trigonometría, astronomía, navegación y resolución de triángulos en general.

Los radianes se utilizan más en la representación y estudio de las funciones trigonométricas

¿Cuándo usar grados y cuándo radianes?

1. Medida de un ángulo

EJEMPLOS

1. Expresa 60° en radianes.
2. Expresa $\frac{2\pi}{3}$ rad en grados.

Pag.136

1 **PRACTICA.** Expresa en radianes estos ángulos.

a) 180° b) 540° c) 900° d) 1 080° e) 1 440°

2 **APLICA.** Expresa en grados sexagesimales.

a) 7π rad b) $\frac{\pi}{6}$ rad c) $\frac{3\pi}{4}$ rad

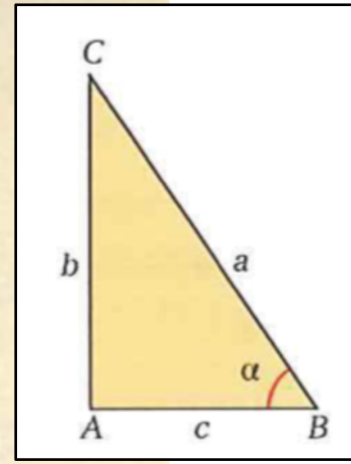
2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

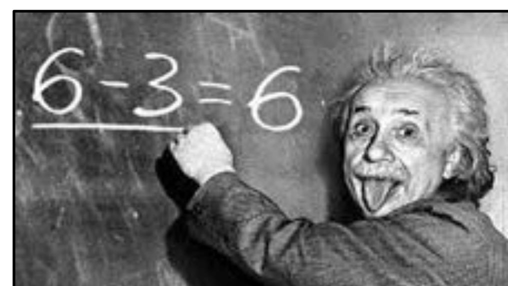
Dado un triángulo rectángulo, las **razones trigonométricas** de un ángulo agudo, α, son las razones obtenidas entre cada dos lados del triángulo.

$$\text{seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

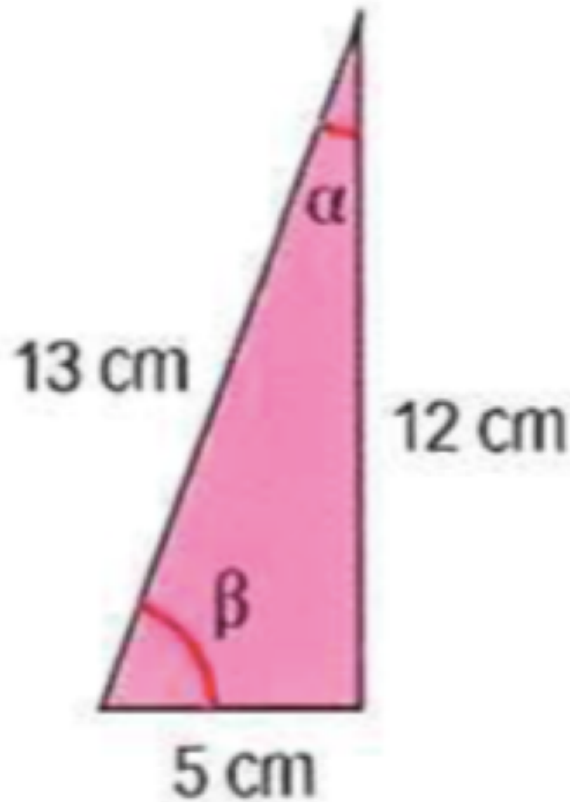




2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Halla las razones trigonométricas de los ángulos marcados del triángulo.



2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Utilidad a situaciones de la vida real

- ¿Cómo medir distancias en la vida real?

Forma clásica

Más modernos: Apps para móvil

iOS

Medidas

android

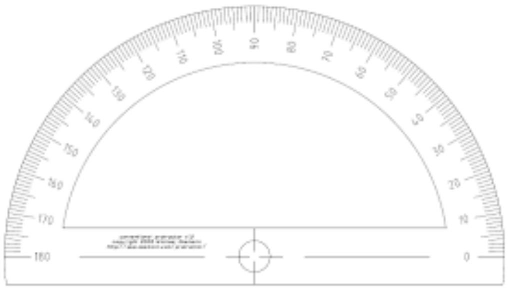
Medidor de distancias

Smart Meassure

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

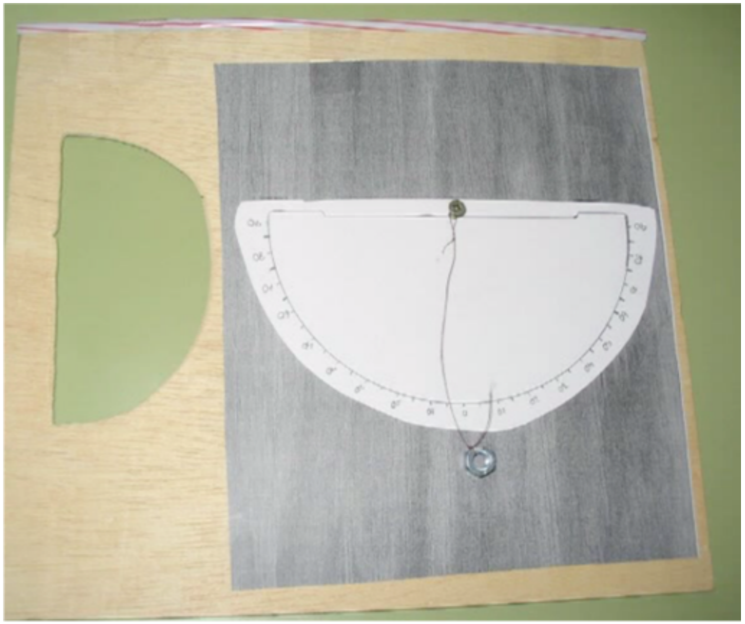
Utilidad a situaciones de la vida real

- ¿Cómo medir ángulos en la vida real?



Transportador de ángulos

Teodolito



Teodolito Casero

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Utilidad a situaciones de la vida real

- ¿Cómo medir ángulos en la vida real?

Más modernos: Apps para móvil

iOS

360-degree protractor

Mover para medir

Transportador

Theodolite

Android

Transportador

Angulus

Transportador

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Utilidad a situaciones de la vida real

- Queremos poner una cuerda desde el techo al fondo del clase. ¿Cuánto medirá para ir al comprarla a Ferretería Juanma?

Opción 1: Sin ángulos. ¿Cómo hacerlo?

Opción 2: Con ángulos. ¿Cómo medirlos y cómo hacerlo?

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Utilidad a situaciones de la vida real

- Y si no tenemos ninguna herramienta para medir ángulos, cómo podríamos saber el ángulo que forma el suelo de la clase con la diagonal que va desde el fondo de la clase hasta el techo.

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

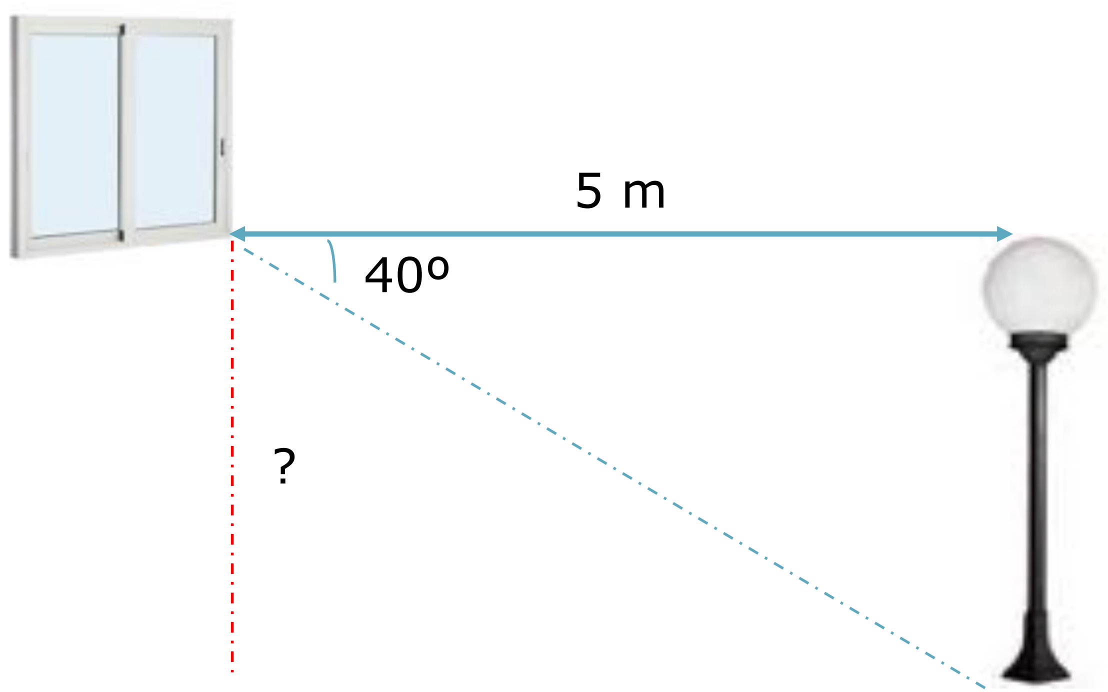
Utilidad a situaciones de la vida real

- ¿Qué ángulo formará mirando desde una mesa?

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Utilidad a situaciones de la vida real

Imaginad que miráis por una ventana de la clase y veis una farola en línea recta a 5 metros y el suelo forma con esa línea recta 40º. ¿A qué altura está la ventana del suelo?



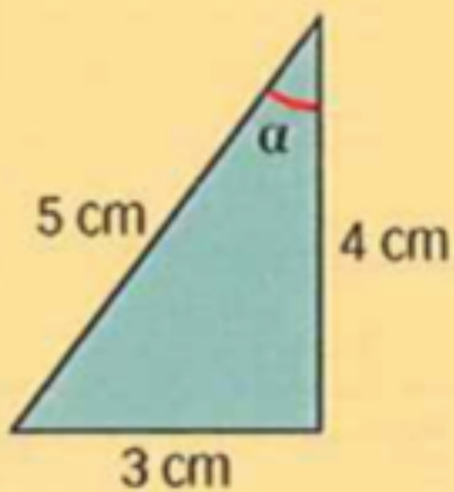
Vídeo "Trigonometría, una herramienta para medir alturas"

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

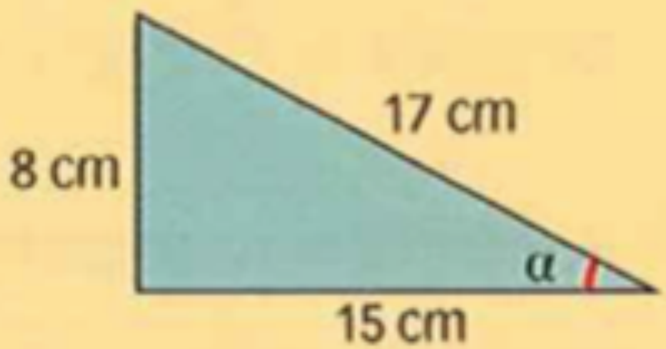
Pag.137

4 PRACTICA. Dados los siguientes triángulos, calcula las razones trigonométricas del ángulo α.

a)

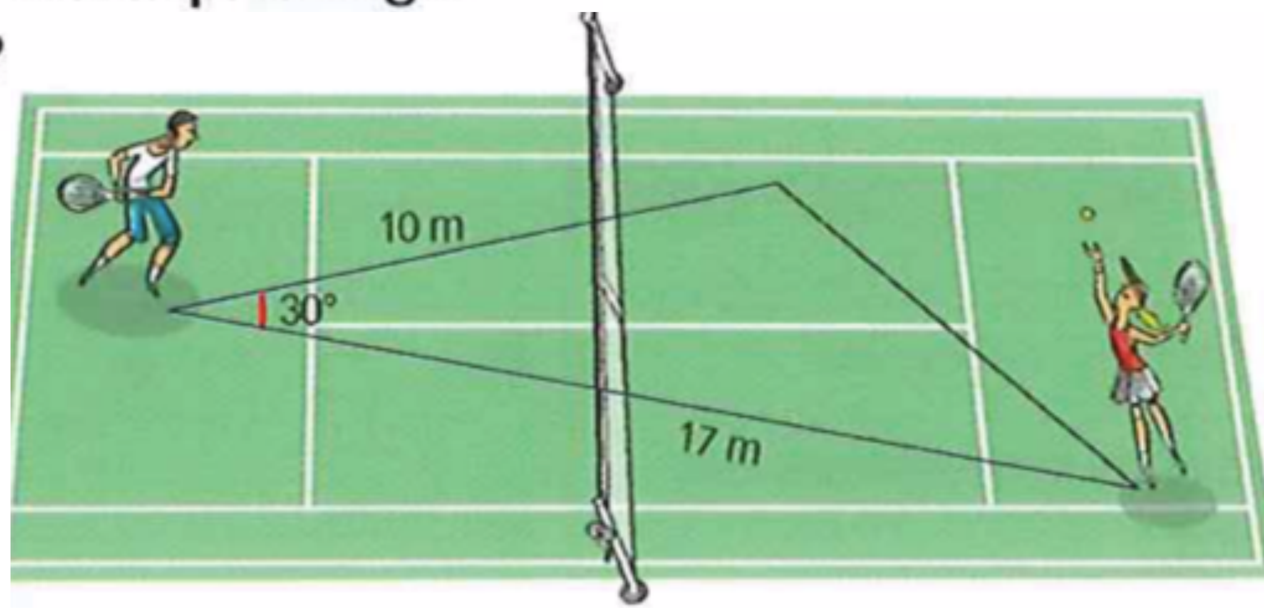


b)



2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Marta y Javier están jugando al tenis. Marta lanza la pelota y esta recorre 17 m. Javier la devuelve con un ángulo de 30°, y esta vez la pelota recorre 10 m. ¿Qué distancia deberá recorrer Marta para llegar hasta la pelota?



2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Pag.147

36 Debido al viento, una cometa atada al suelo ha alcanzado una altura de 5 m. Calcula la longitud de la cuerda si cuando ha alcanzado esta altura estaba totalmente estirada, formando además un ángulo de 60° con respecto al suelo.

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Pag.147

37 Fernando va a tirar un penalti en un partido de fútbol donde la portería mide 2,44 m de altura y golpea recto con un ángulo de inclinación de 38°. Si el punto de penalti se encuentra a 11 m, ¿conseguirá meter el balón en la portería?

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Pag.152

99 En un río hay dos embarcaderos, uno enfrente del otro, y Jorge quiere ir desde uno hasta el otro en una barca. Debido a la fuerza del río, acaba recorriendo una distancia de 30 m, con 30° de desviación. Calcula la anchura del río y cuánta distancia tiene que andar para llegar al embarcadero.

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Pag.152

100 Para un campeonato de *motocross*, se tiene que colocar una rampa para sortear un foso de 10 m de ancho. Halla el grado de inclinación de la rampa para que los corredores lo salten y lleguen a una altura máxima de 5 m a la mitad del foso.

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Pag.137

5 APLICA. Si el cateto contiguo a un ángulo en un triángulo rectángulo mide 3 cm y la tangente de ese ángulo vale $\frac{4}{3}$, ¿cuánto valen los demás lados?

6 REFLEXIONA. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2 cm y la tangente de uno de sus ángulos vale 1, ¿cuánto miden los otros lados?

3. Relaciones entre razones trigonométricas

Para cualquier ángulo agudo α se cumplen estas relaciones:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \qquad sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \qquad tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

Demostraciones:

3. Relaciones entre razones trigonométricas

Pag.138

7 PRACTICA. Comprueba si estas parejas de razones trigonométricas pertenecen al mismo ángulo.

a) $\cos \alpha = 0{,}1736$ y $tg\ \alpha = 0{,}4663$

b) $\cos \alpha = 0{,}9397$ y $tg\ \alpha = 0{,}3640$

c) $\cos \alpha = 0{,}2588$ y $sen\ \alpha = 0{,}1485$

d) $\cos \alpha = 0{,}7313$ y $tg\ \alpha = 0{,}9325$

e) $\cos \alpha = 0{,}6691$ y $sen\ \alpha = 0{,}2754$

3. Relaciones entre razones trigonométricas

Pag.139

10 Si el ángulo α es agudo, calcula su seno conociendo las siguientes razones.

a) $\cos \alpha = 0{,}4321$

b) $\cos \alpha = 0{,}1357$

c) $\cos \alpha = 0{,}9531$

d) $\cos \alpha = 0{,}2864$

3. Relaciones entre razones trigonométricas

Pag.139

11 Dado un ángulo agudo α, calcula su coseno conociendo las siguientes razones.

a) $sen\ \alpha = 0{,}1827$

b) $sen\ \alpha = 0{,}9542$

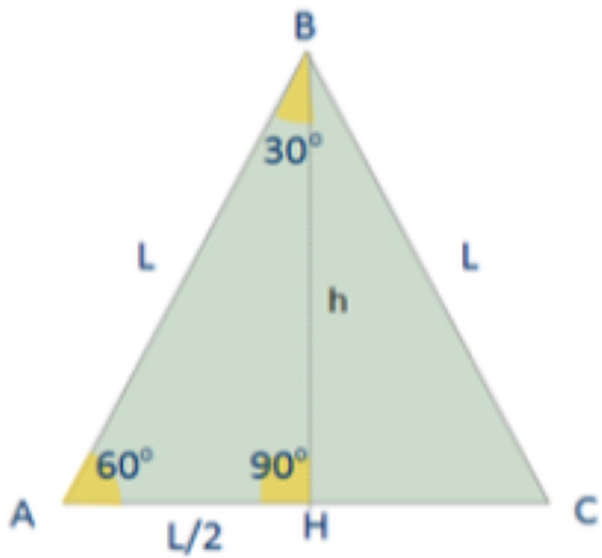
c) $sen\ \alpha = 0{,}4531$

d) $sen\ \alpha = 0{,}7988$

12 A partir de un ángulo agudo α, calcula su seno en cada caso sabiendo que:

a) $tg\ \alpha = 3$ b) $tg\ \alpha = 1$

4. Razones Trigonométricas de 30º y 60º



Aplicando Pitágoras

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Con la definición:

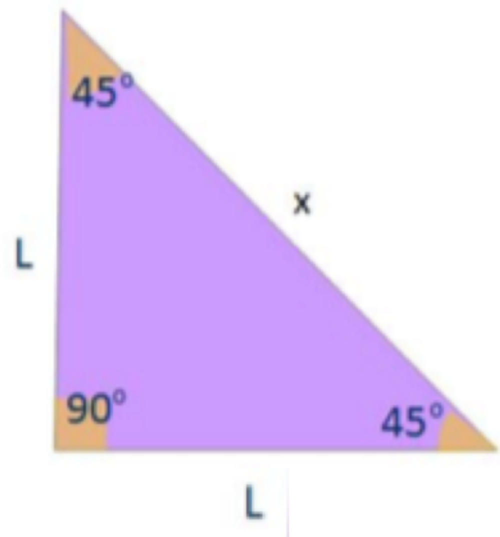
sen 30º =

cos 30º =

sen 60º =

cos 60º =

4.Cálculo Razones Trigonométricas de 45º



Aplicando Pitágoras

$$x = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$

Con la definición:

sen 45º =

cos 45º =

4. Razones Trigonométricas más habituales

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0
tg					…

4. Razones Trigonométricas más habituales

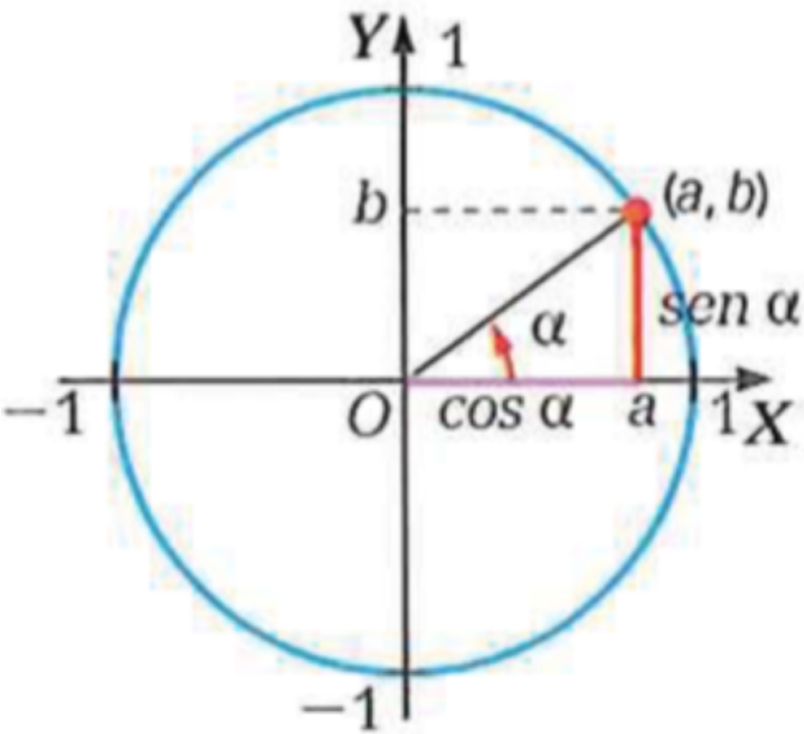
Pag.140

15 PRACTICA. Halla la altura de un triángulo equilátero de lado 5 cm sin usar el teorema de Pitágoras.

16 APLICA. Halla, usando razones trigonométricas, la diagonal de un cuadrado de 3 cm de lado.

5. Circunferencia Goniométrica (Radio = 1)

La **circunferencia goniométrica** es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas.

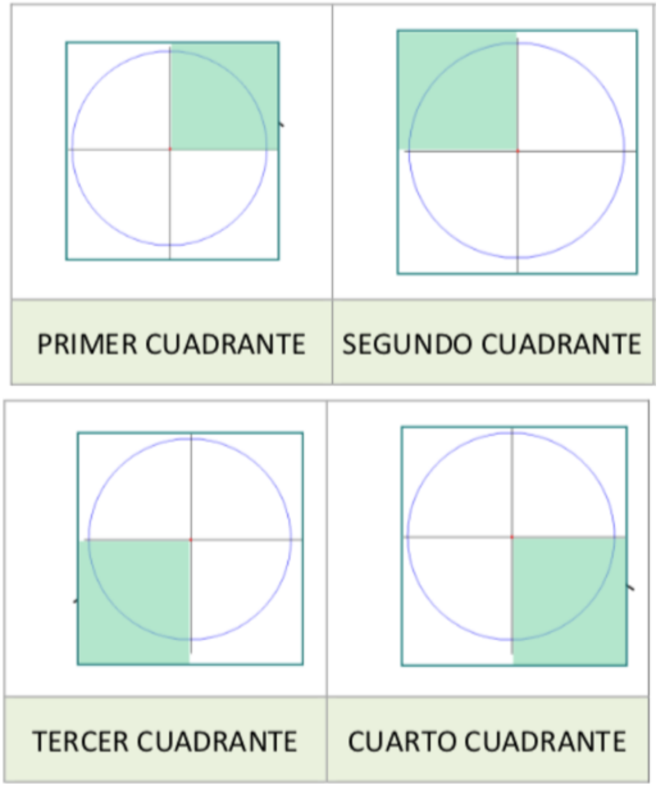


$$(a, b) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

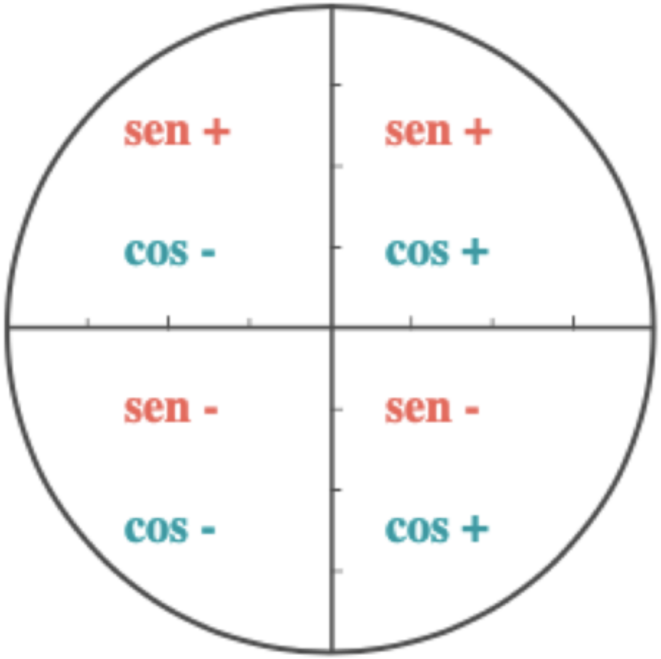
Como la hipotenusa del triángulo mide 1:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{1} = b \qquad \cos\alpha = \frac{a}{1} = a$$

5. Circunferencia Goniométrica (Radio = 1)



Signo según el cuadrante



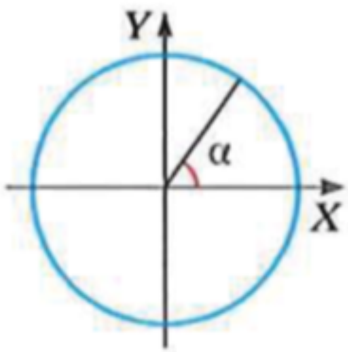
1.^{er} cuadrante: $0° < \alpha < 90°$ 2.º cuadrante: $90° < \alpha < 180°$

3.^{er} cuadrante: $180° < \alpha < 270°$ 4.º cuadrante: $270° < \alpha < 360°$

5. Circunferencia Goniométrica (Radio = 1)

Signo según el cuadrante

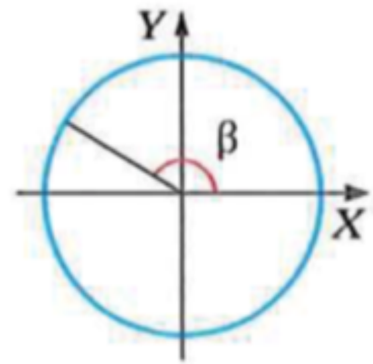
Los ángulos del 1.^{er} cuadrante miden entre 0° y 90°.



$sen\ \alpha > 0$

$cos\ \alpha > 0$

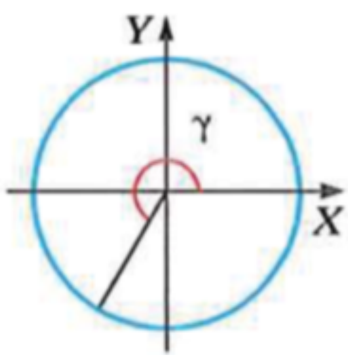
Los ángulos del 2.º cuadrante miden entre 90° y 180°.



$sen\ \beta > 0$

$cos\ \beta < 0$

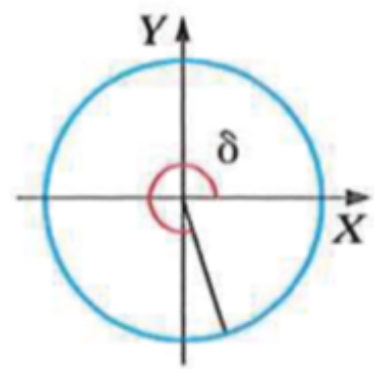
Los ángulos del 3.^{er} cuadrante miden entre 180° y 270°.



$sen\ \gamma < 0$

$cos\ \gamma < 0$

Los ángulos del 4.º cuadrante miden entre 270° y 360°.



$sen\ \delta < 0$

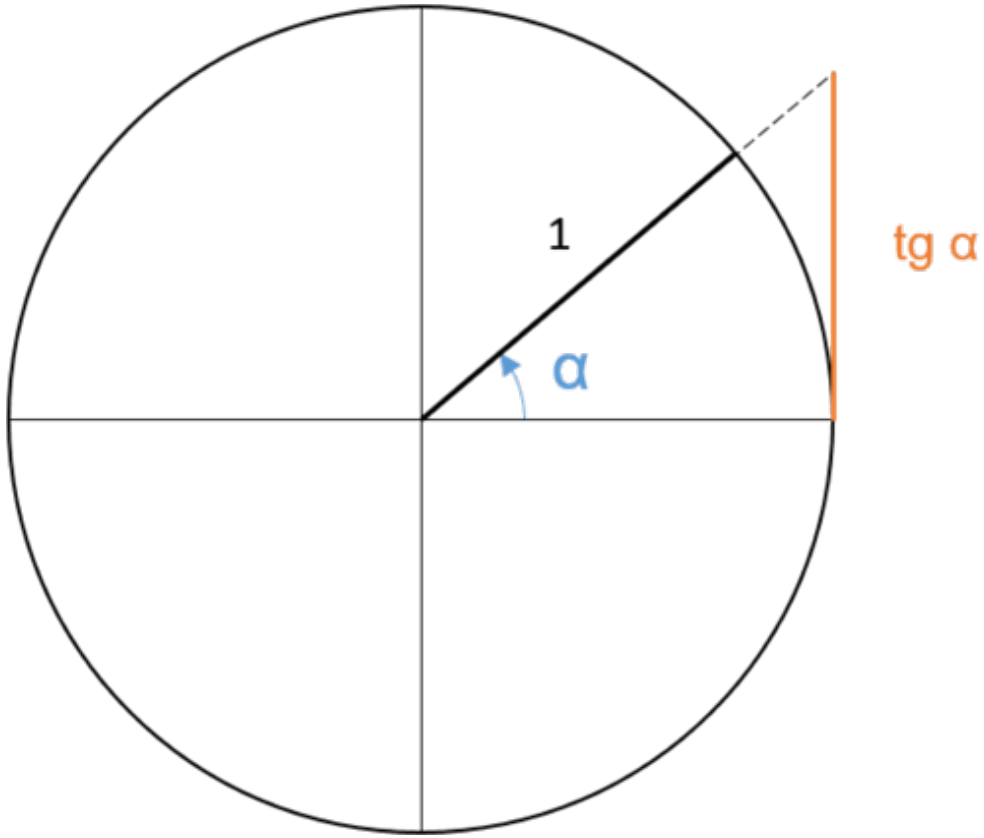
$cos\ \delta > 0$

5. Circunferencia Goniométrica (Radio = 1)

¿Pará que utilizamos la circunferencia goniométrica?

Usando la calculadora, obtén el valor de sin(x)=0,5. ¿Cuántas soluciones tiene?

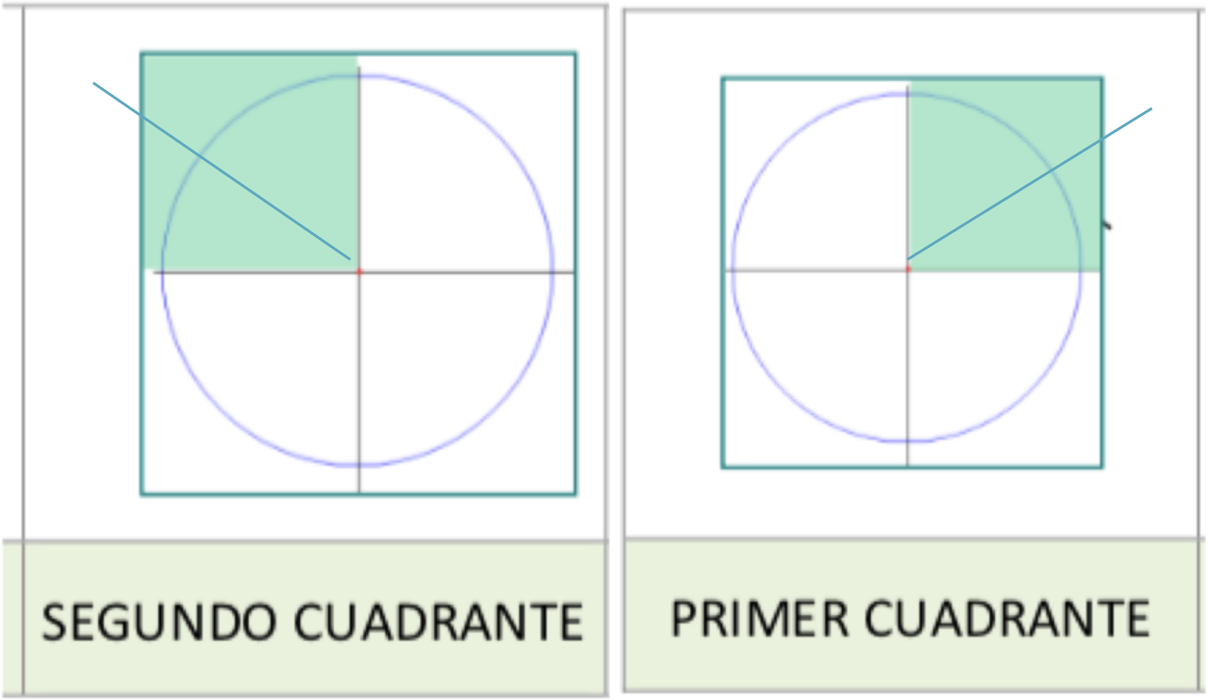
La tangente en la circunferencia Goniométrica



https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVc

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

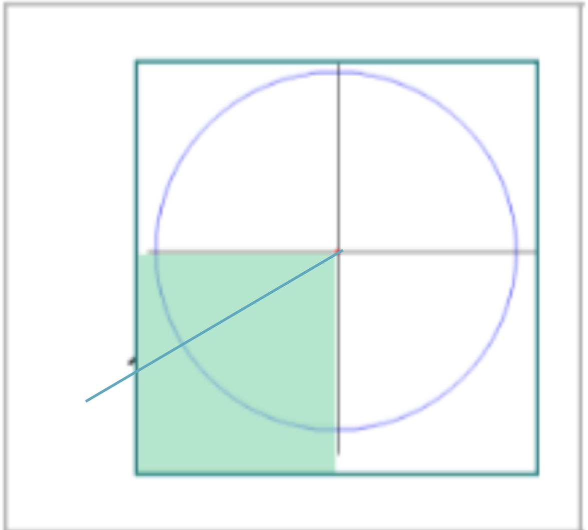
1º Cuadrante y 2º Cuadrante (Ángulos suplementarios-suman 180º)



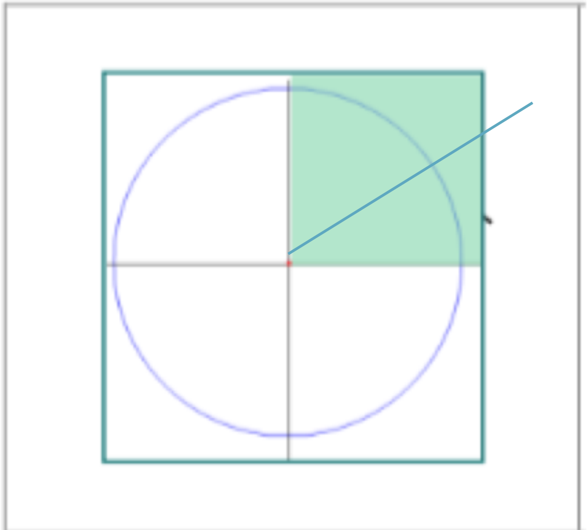
$$sen(180 - \propto) \qquad sen(\propto)$$
$$\cos(180 - \propto) \qquad \cos(\propto)$$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

1º Cuadrante y 3º Cuadrante



TERCER CUADRANTE



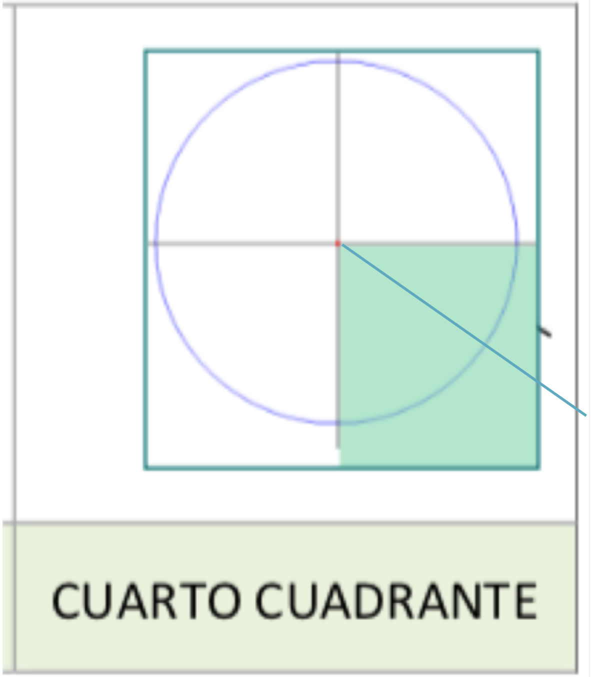
PRIMER CUADRANTE

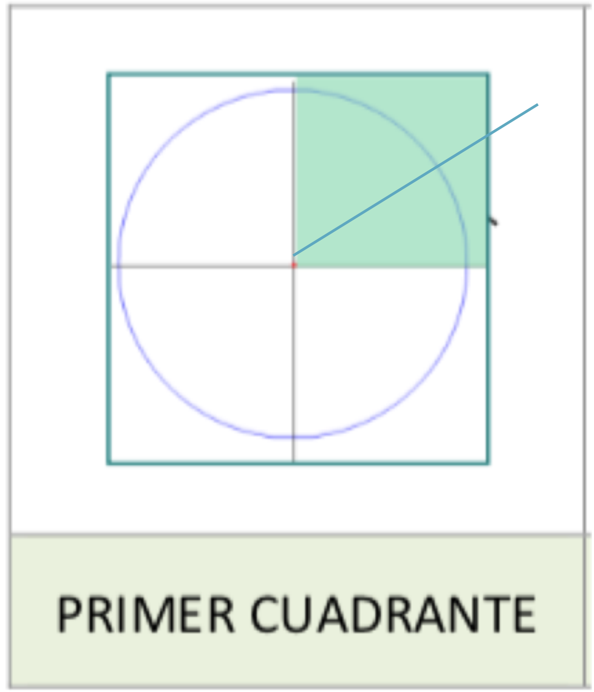
$$sen(180 + \propto)$$
$$\cos(180 + \propto)$$

$$sen(\propto)$$
$$\cos(\propto)$$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

1º Cuadrante y 4º Cuadrante (Ángulos opuestos)



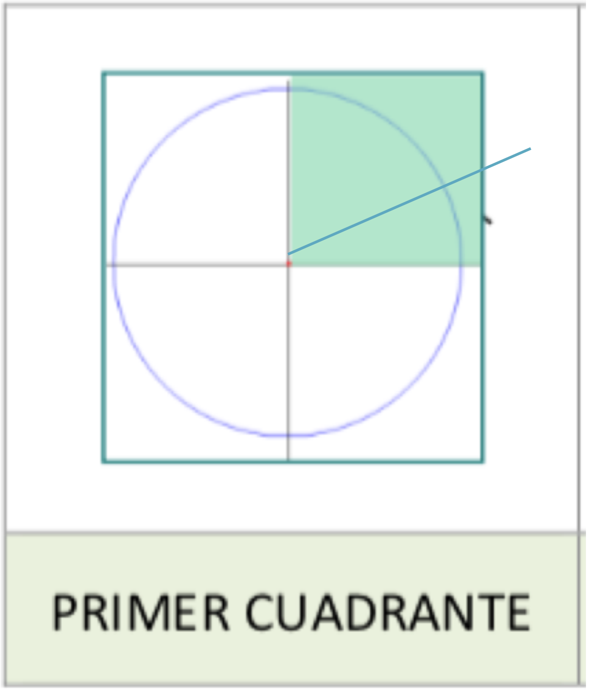


$sen(-\propto)$
$\cos(-\propto)$

$sen(\propto)$
$\cos(\propto)$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

1º Cuadrante (Ángulos complementarios – Suman 90º)



$$sen(\propto)$$
$$\cos(\propto)$$

$$sen(90 - \propto)$$
$$\cos(90 - \propto)$$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

Ángulos mayores de 360º

Escribe los siguientes ángulos en el intervalo [0,360)

a) 375º

b) 470º

c) 715º

d) 2920º

Sin calculadora, completar …

	120°	135°	150°	180°
sen				
cos				
tg				

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

Pag.143

24 Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 120° b) 210° c) 315°

25 Expresa estas razones trigonométricas en función de las de un ángulo del 1.er cuadrante y calcúlalas.

a) *sen* 225° b) *cos* 150° c) *sen* 300° d) *cos* 315°

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

Pag.144

27 APLICA. Calcula las razones trigonométricas de 65°, 155° y 335°, sabiendo que:

$sen\ 25° = 0{,}42 \qquad cos\ 25° = 0{,}91 \qquad tg\ 25° = 0{,}47$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

Pag.142

23 REFLEXIONA. Averigua en qué cuadrante se encuentra α en cada caso y halla la tercera razón trigonométrica.

a) $sen\ \alpha = 0{,}9397$ $\quad cos\ \alpha = -0{,}3420$

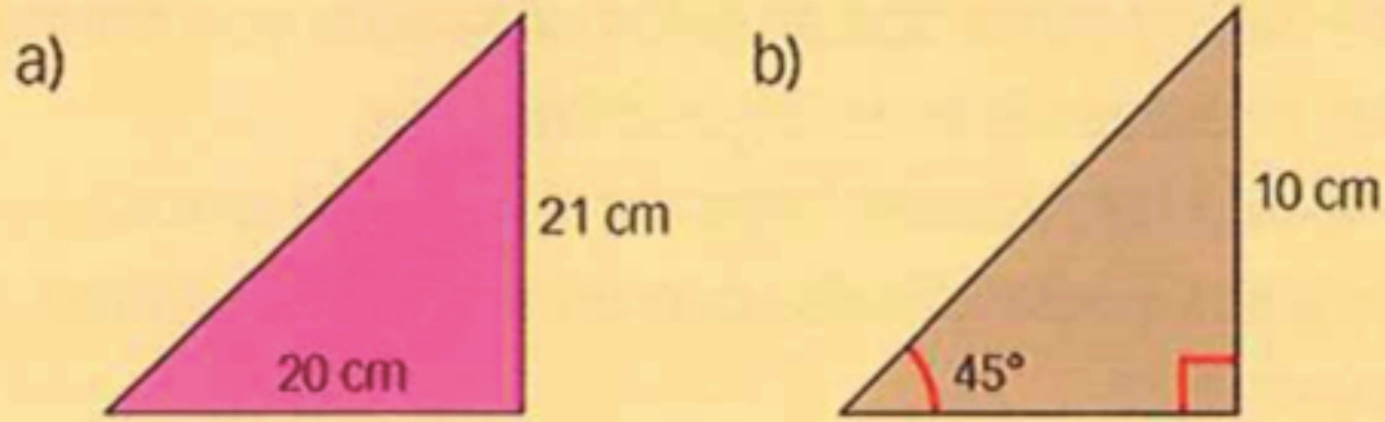
b) $sen\ \alpha = -0{,}7660$ $\quad tg\ \alpha = 1{,}1918$

7. Resolución de Triángulos

- **TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS** - Razones Trigonométricas – T.Pitágoras
- **TODOS LOS TRIÁNGULOS** (Teorema del Seno - Teorema del Coseno)

Pag.146

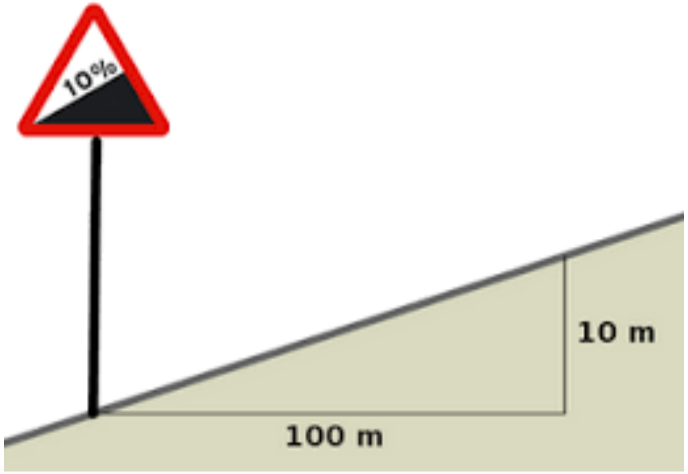
32 PRACTICA. Resuelve los triángulos rectángulos.



7. Resolución de Triángulos

- **TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS** - Razones Trigonométricas – T.Pitágoras
- **TODOS LOS TRIÁNGULOS** (Teorema del Seno - Teorema del Coseno)

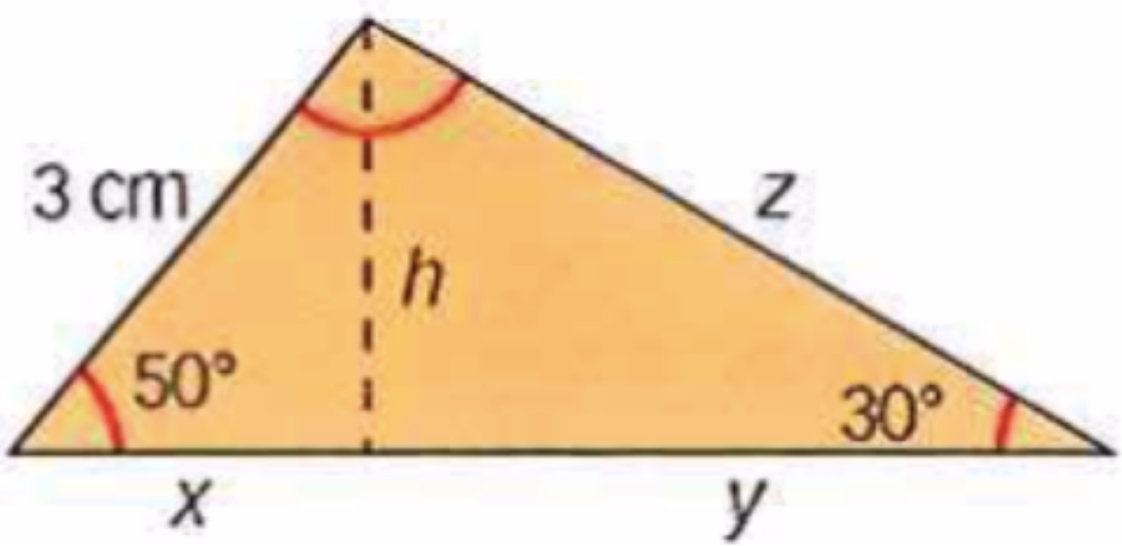
7. En un tramo de carretera la inclinación es del 5% (sube 5 m en 100 m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100 m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?



Problemas en triángulos no rectángulos

Pag.150

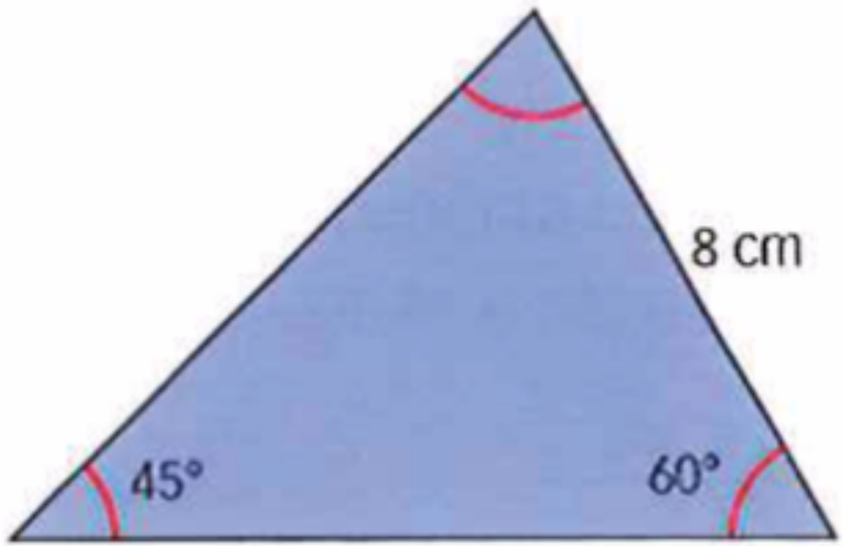
80 Calcula el área de este triángulo.



Problemas en triángulos no rectángulos

Pag.150

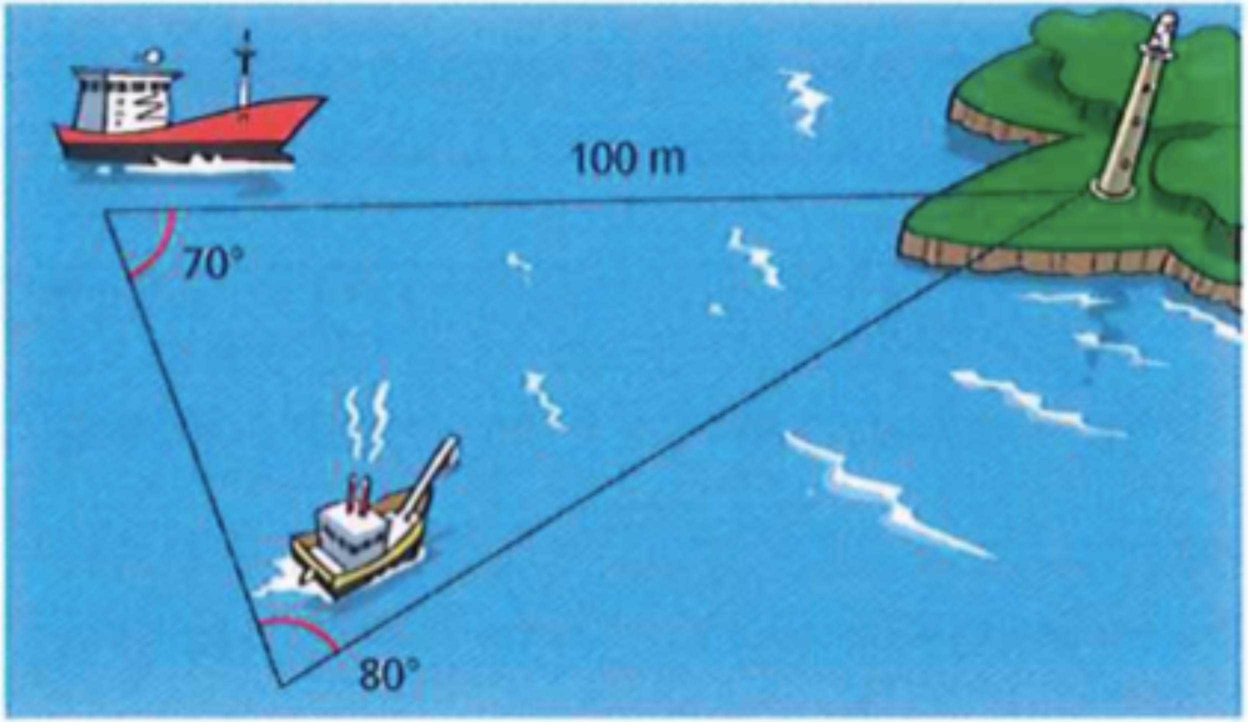
81 Calcula el área de este triángulo.



Problemas en triángulos no rectángulos

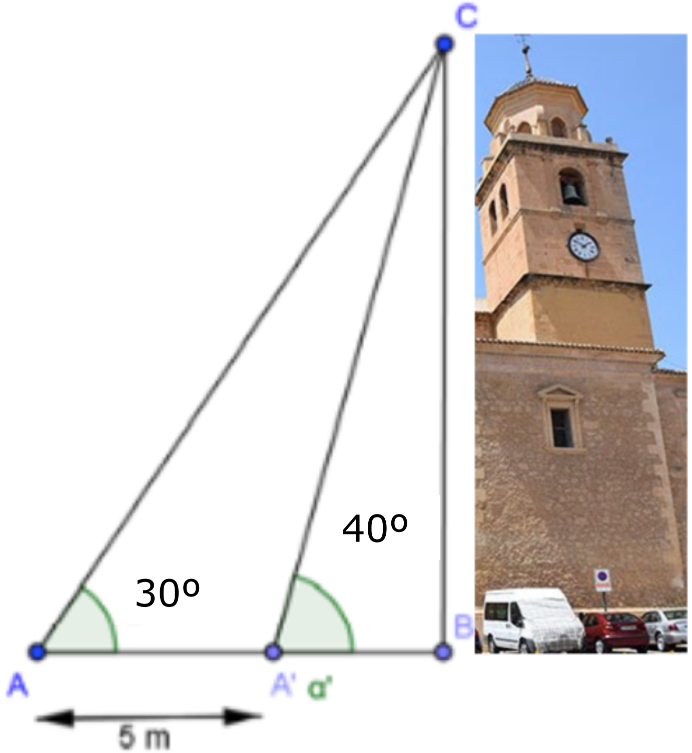
Pag.152

103 Calcula la distancia de los barcos con respecto al faro de acuerdo con la siguiente figura.



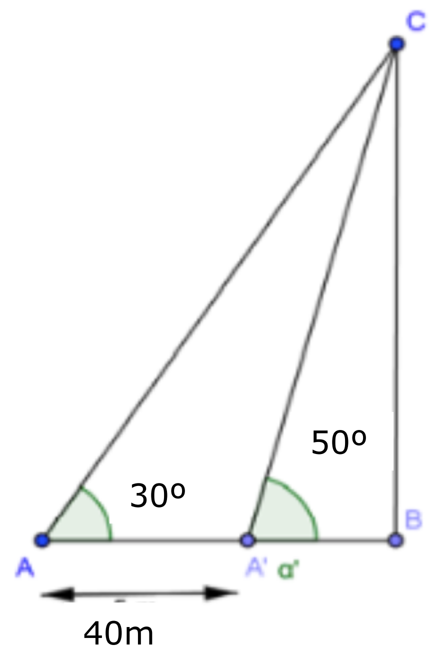
Método de las tangentes

Desde un punto vemos el punto más alto de una Iglesia de la Asunción de Hellín con un ángulo de 30 grados y al acercarnos 5 metros se ve con un ángulo de 40 grados. Calcular la altura de la iglesia.



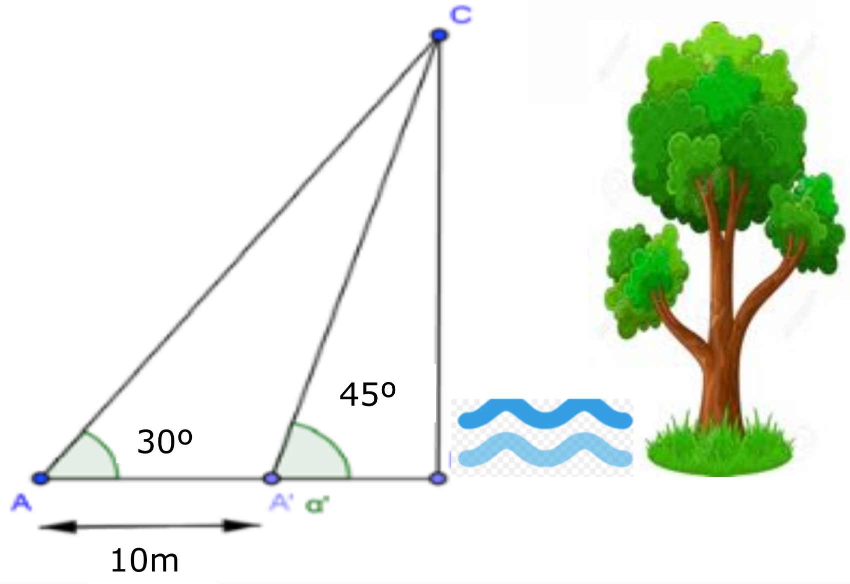
Método de las tangentes

Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?



Método de las tangentes

102 En una de las orillas de un río, se encuentra un árbol que nosotros vemos desde la otra orilla con un ángulo de 45°. Si ahora nos alejamos de la orilla 10 m, conseguimos ver el árbol con un ángulo de 30°. Calcula la anchura del río y la altura del árbol.



Pag.152

Método de las tangentes

108 Una moto sigue a un coche. Cuando les separan 100 m de distancia les sobrevuela un helicóptero. La moto divisa al helicóptero con un ángulo de 40°, y el coche lo ve con un ángulo de 70°. Calcula la distancia del coche al helicóptero y la altura a la que este se encuentra.