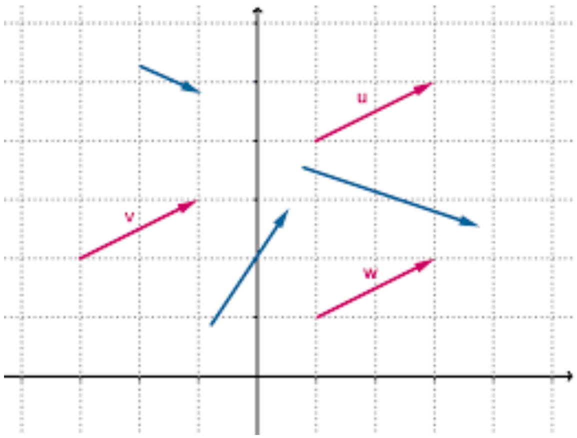
Vectores y rectas



1. Vectores

Un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado determinados por dos puntos A y B y el orden de estos. A se denomina **origen** y B **extremo**.

Elementos de un vector:

1) Módulo. Longitud del vector
2) Dirección. Recta que contiene al vector.
3) Sentido. Viene determinado por el origen y el extremo.

Magnitudes Escalares – Se expresan con un solo número.

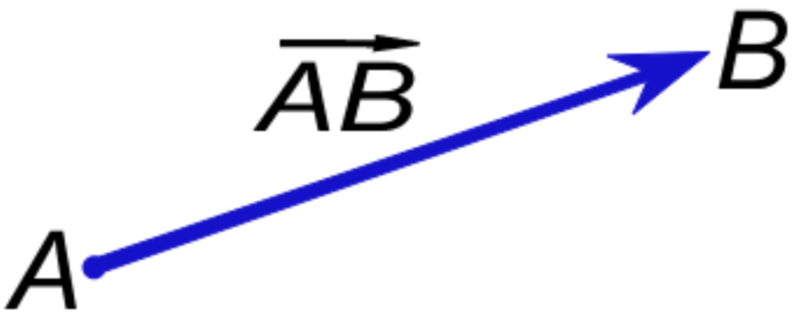
Magnitudes Vectoriales – Además de un número necesitan de una dirección y un sentido.

1.1 Coordenadas de un vector

Las **coordenadas** o **componentes** del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del punto extremo, $B(b_1, b_2)$, menos las del punto origen, $A(a_1, a_2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Calcula las coordenadas del vector cuyo origen es $(-1, -2)$ y cuyo extremo es $(3, 1)$, y represéntalo.



1.1 Coordenadas de un vector

Pag.158

2 APLICA. Representa un triángulo de vértices (1, 1), (3, 3) y (6, 0) e indica las coordenadas de los tres vectores formados: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.

3 REFLEXIONA. Si $\overrightarrow{AB} = (5, 3)$, indica dos parejas de sus posibles puntos origen y extremo.

1.2 Módulo de un vector

Si las coordenadas de un vector $\vec{v}$ son (v_1, v_2), su **módulo** es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

Calcula el módulo del vector de origen $A(1, 0)$ y extremo $B(4, 4)$.

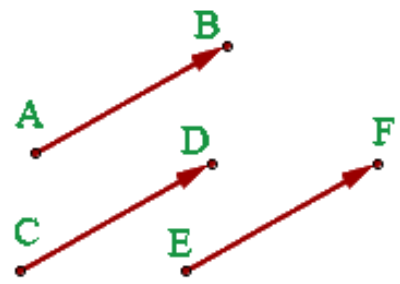
1.3 Vectores paralelos

Dos **vectores** son **paralelos** cuando tienen la misma dirección (la misma recta o rectas paralelas). En coordenadas, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si sus coordenadas son proporcionales: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$.

¿Cómo construir un vector paralelo a uno dado?

Dado un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ podemos conseguir otro vector $\vec{v}$ que sea:

- Paralelo a $\vec{u}$ multiplicando por un número distinto de 0: $\vec{v} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$.



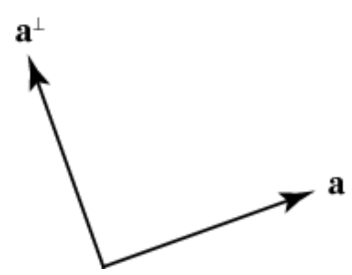
1.4 Vectores perpendiculares

Dos **vectores** son **perpendiculares** cuando sus direcciones se cortan formando un ángulo recto. En coordenadas, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares si: $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$.

¿Cómo construir un vector perpendicular a uno dado?

Dado un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ podemos conseguir otro vector $\vec{v}$ que sea:

- Perpendicular a $\vec{u}$ invirtiendo sus coordenadas y cambiando el signo de una de ellas: $\vec{v} = (-u_2, u_1)$.



1.4 Vectores perpendiculares

Decide si estos vectores son paralelos o perpendiculares.

a) $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 6)$

b) $\vec{u} = (4, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$

1.3, 1.4 Vectores paralelos - perpendiculares

Pag.159

5 APLICA. Decide si estos vectores son paralelos o perpendiculares.

a) $\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{v} = (-1, -3)$

b) $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (-6, -4)$

c) $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$

6 REFLEXIONA. Demuestra que los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{v'} = (-v_2, v_1)$ son perpendiculares.

2. Operaciones con vectores

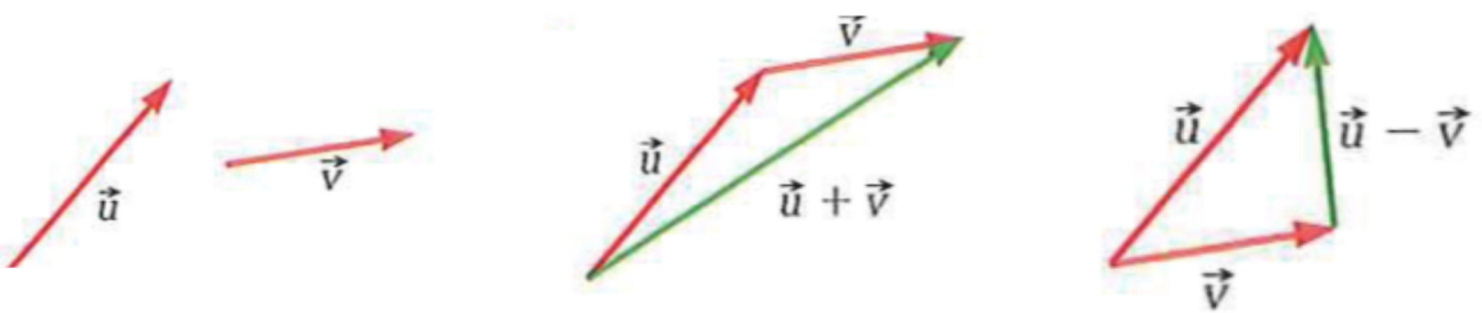
Suma y resta de vectores

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, las coordenadas del **vector suma** se calculan sumando coordenada a coordenada.

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, las coordenadas del **vector diferencia** se calculan restando coordenada a coordenada.

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2) - (v_1, v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$



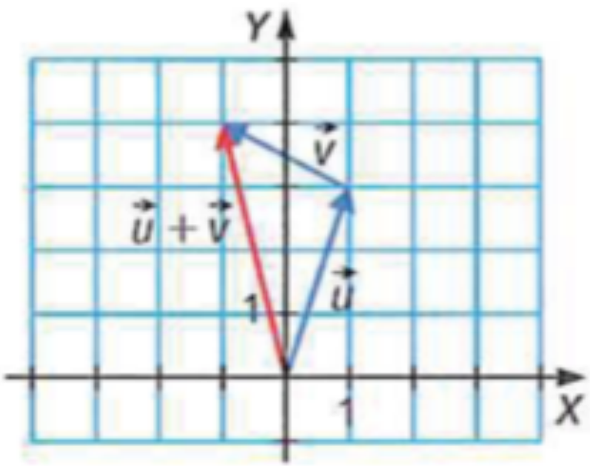
2. Operaciones con vectores

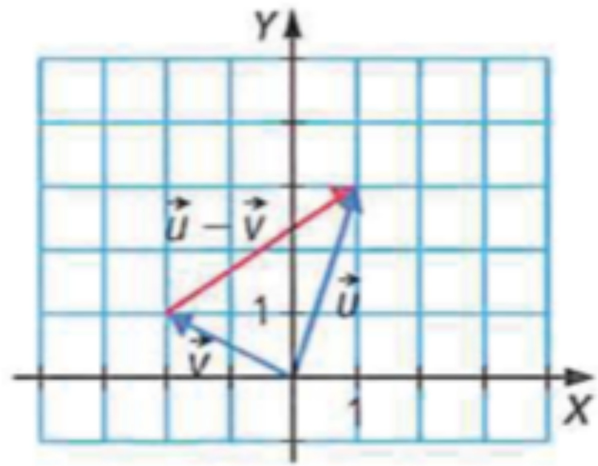
Suma y resta de vectores

Considera los vectores $\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$, resuelve gráficamente y con coordenadas estas operaciones.

a) $\vec{u} + \vec{v} =$

b) $\vec{u} - \vec{v} =$





2. Operaciones con vectores

Pag.160

8 APLICA. Dados estos puntos, calcula.

$A(0, 0)$ $B(-1, 3)$ $C(-2, -2)$ $D(1, -3)$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$

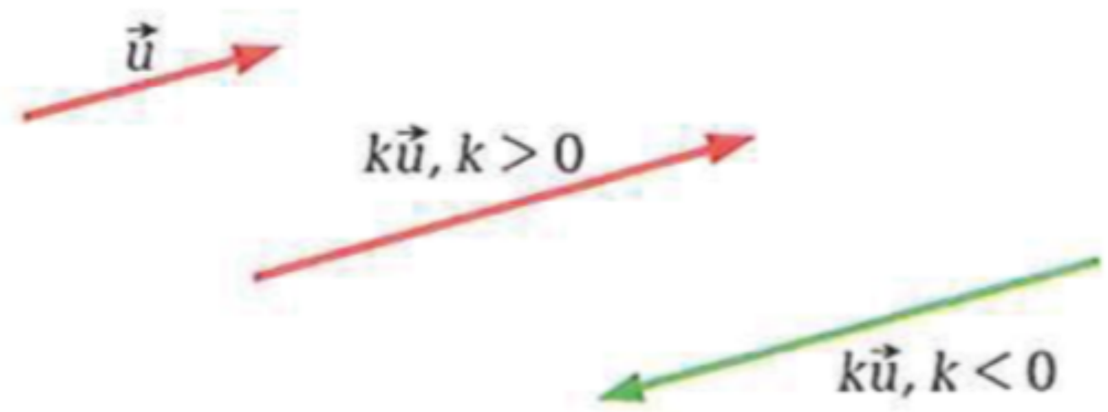
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

2. Operaciones con vectores

Multiplicación de un vector por un número

En coordenadas, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, el **producto de un número real k por un vector $\vec{u}$** se calcula multiplicando cada coordenada por el número k.

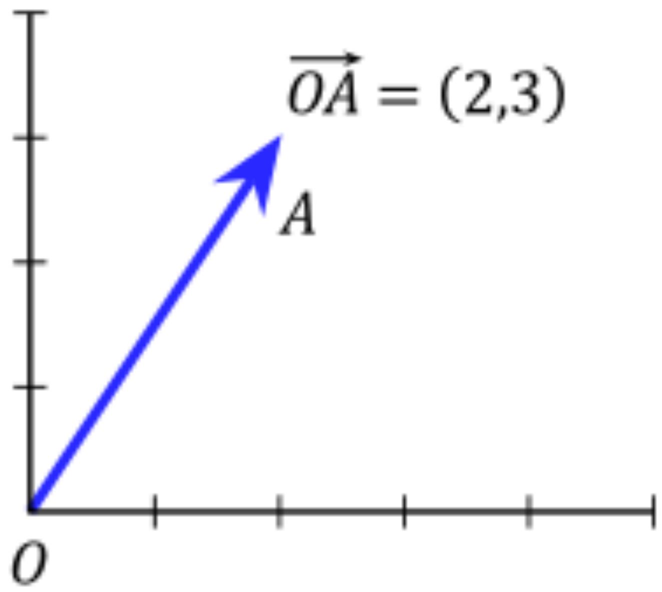
$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$



2. Operaciones con vectores

Vector de posición de un punto

Todo punto del plano, $P(a, b)$, queda determinado por un vector de posición $\overrightarrow{OP}$, que tiene las mismas coordenadas que el punto, en el que O es el origen de coordenadas.



2. Operaciones con vectores

Pag.161

11 APLICA. Opera y representa los siguientes vectores.

a) $2\vec{v}$ siendo $\vec{v} = (-1, 5)$

b) $3\vec{v} + 2\vec{u}$ siendo $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (2, 5)$

c) $-2\vec{u} + 3\vec{v}$ siendo $\vec{u} = (3, 6)$ y $\vec{v} = (1, 4)$

3. Ecuaciones de una recta en el plano

Distintas formas de la ecuación de una recta:

(1) Ecuación Vectorial $\boxed{(x, y) = (a, b) + t \cdot (v_1, v_2)}$

(2) Ecuación paramétrica $\boxed{\left.\begin{aligned} x &= a + t \cdot v_1 \\ y &= b + t \cdot v_2 \end{aligned}\right\}}$

(3) Ecuación continua $\boxed{\dfrac{x - a}{v_1} = \dfrac{y - b}{v_2}}$

(4) Ecuación punto-pendiente $\boxed{y - b = m(x - a)}$

(5) Ecuación explícita $\boxed{y = mx + n}$

(6) Ecuación general o implícita $\boxed{Ax + By + C = 0}$

3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.162 – Ec. Vectorial

13 PRACTICA. Determina tres puntos de las siguientes rectas dadas en forma vectorial.

a) $(x, y) = (1, 2) + t \cdot (4, -1)$

b) $(x, y) = (2, 0) + t \cdot (3, 5)$

14 APLICA. Halla la ecuación vectorial de la recta que pasa por estos puntos y tiene estos vectores directores.

a) $A(4, 4)$ y $\vec{v} = (2, 2)$

b) $A(5, -3)$ y $\vec{v} = (-1, 1)$

c) $A(2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5)$

d) $A(-1, 3)$ y $\vec{v} = (1, 5)$

3. Ecuaciones de una recta en el plano

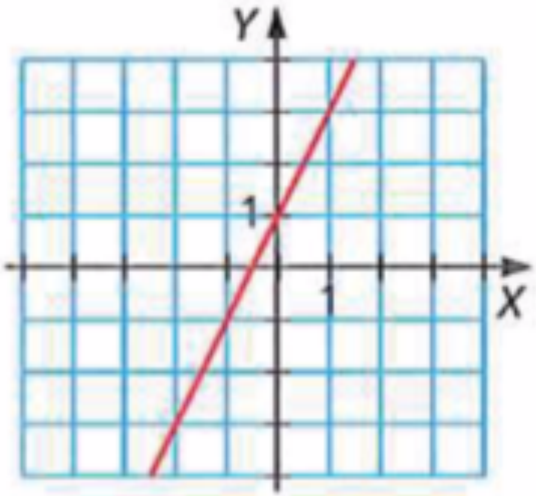
Pag.162 – Ec. Vectorial

15 REFLEXIONA. Determina la ecuación vectorial de la recta cuyo vector director es paralelo al vector director de la recta $(x, y) = (0, 2) + t \cdot (3, 1)$, y que pasa por el punto $(-1, 5)$.

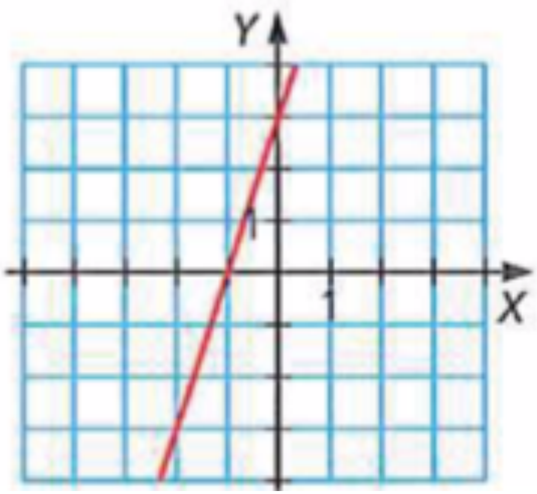
Pag.172 – Ec. Vectorial

80 Obtén la ecuación vectorial de las rectas representadas.

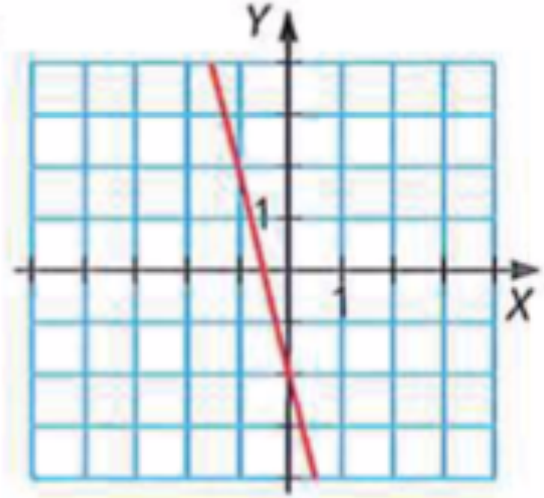
a)



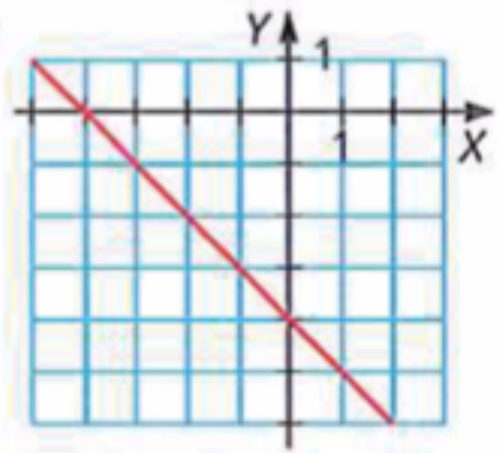
b)



c)



d)



3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.163 – Ec. Paramétrica

16 PRACTICA. Da distintos valores a t para encontrar tres puntos de las siguientes rectas. Indica el vector director de la recta en cada caso.

a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \end{cases}$

3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.163 – Ec. Paramétrica

17 APLICA. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por estos puntos.

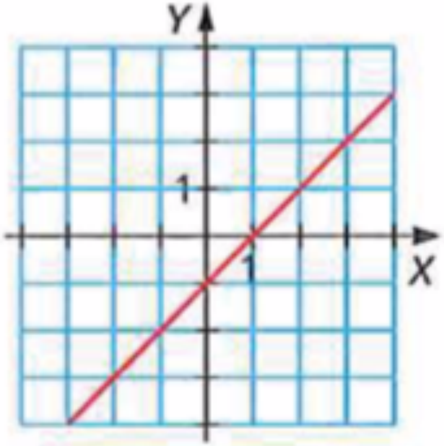
a) $A(8, 3)$ y $B(6, 5)$ b) $A(1, 7)$ y $B(-1, 4)$

18 REFLEXIONA. Escribe las ecuaciones paramétricas de una recta paralela a la recta de vector director $\vec{u} = (3, 5)$ y que pasa por el punto $A(0, 2)$. ¿Existe solo una recta que cumple esta condición?

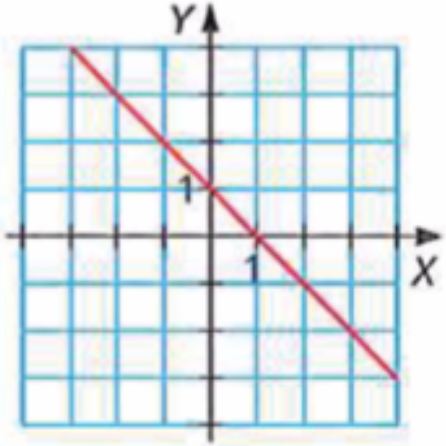
Pag.172 – Ec. Paramétricas

83 Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas representadas.

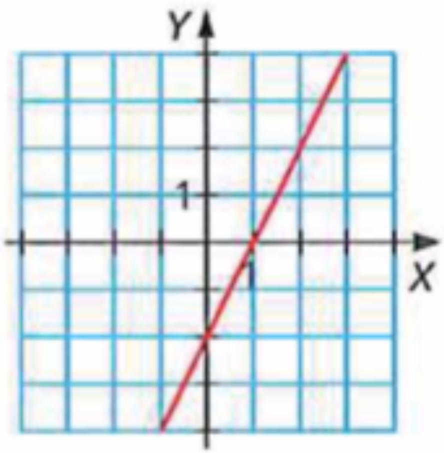
a)



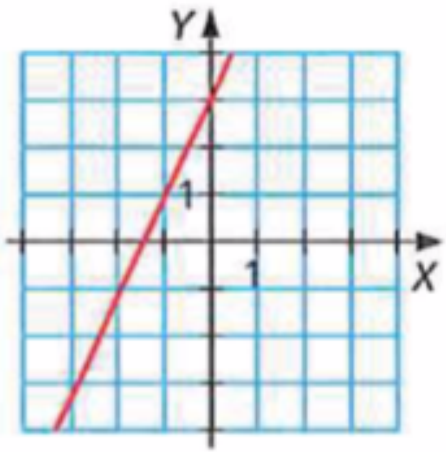
c)



b)



d)



3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.164 – Ec. Continua

19 PRACTICA. Una recta r pasa por el punto $A(3, 4)$, y su vector director es $\vec{v} = (2, 1)$. Determina la ecuación de la recta en su forma continua.

20 APLICA. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos indicados.

a) $A(4, 2)$ y $B(0, 0)$ b) $A(6, 3)$ y $B(-1, 3)$

3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.164 – Ec. Continua

21 REFLEXIONA. A partir de estas ecuaciones de la recta en su forma vectorial, determina la ecuación en su forma continua.

a) $(x, y) = (2, 1) + t \cdot (2, 3)$

b) $(x, y) = (-3, -1) + t \cdot (4, 1)$

c) $(x, y) = (4, -5) + t \cdot (-1, 3)$

3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.165 – Ec. Explícita y=mx+n

22 PRACTICA. Halla la ecuación explícita de las rectas.

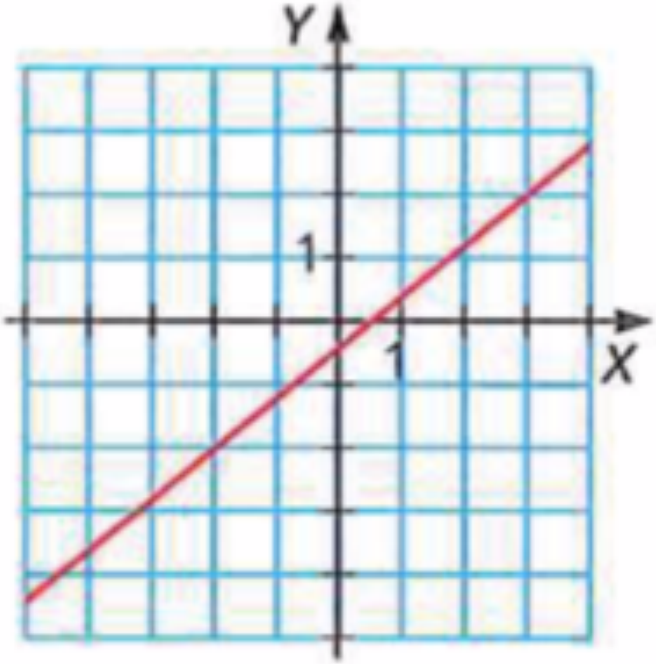
a) $y - 2 = 3 \cdot (x + 7)$ b) $y - 5 = -2 \cdot (x - 1)$

23 APLICA. Determina la ecuación explícita de la recta $y - 3 = 2 \cdot (x - 4)$. ¿Cuál es la pendiente? ¿Cuál es la ordenada en el origen?

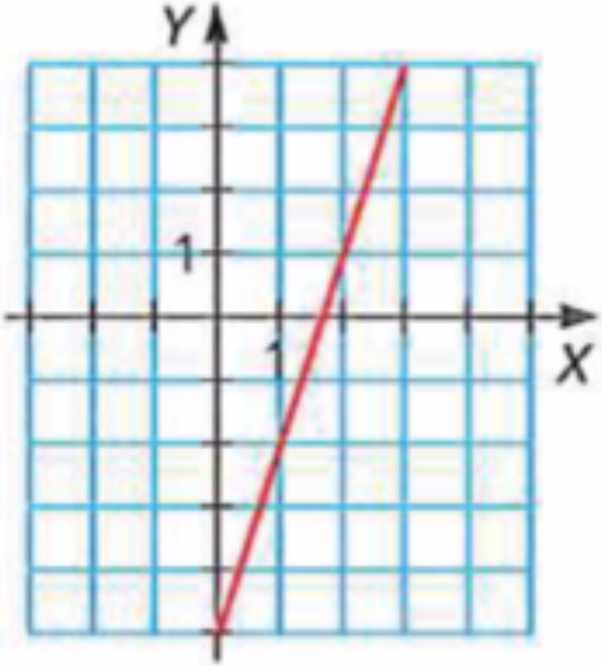
Pag.172 – Ec. Explícita

92 Determina la ecuación explícita de cada recta.

a)



b)



3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.165 – Ec. Punto-Pendiente y-y0=m(x-x0)

24 REFLEXIONA. Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que:

a) Pasa por el origen de coordenadas y su vector director es $\vec{v} = (3, 2)$.

b) Es paralela a $y = -2x$ y pasa por $A(1, 1)$.

3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.166 – Ec. General $Ax+By+C=0$

25 PRACTICA. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $P(-2, 3)$ y $Q(4, 2)$.

26 APLICA. Dada la recta $x - 4y + 5 = 0$, obtén:

a) Su vector director.

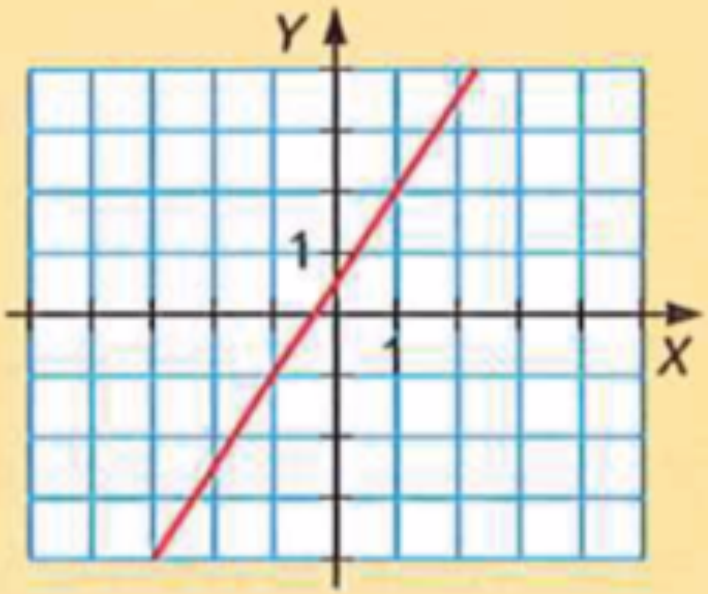
b) Un punto de la recta.

c) Un vector perpendicular.

3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.166 – Ec. General   Ax+By+C=0

27 REFLEXIONA. Escribe la ecuación general de la recta representada en esta gráfica.



3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.167 – Todas las ecuaciones

29 Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2, 1)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (-4, -3)$.

30 Dada la recta de ecuación $2x + y - 3 = 0$ escribe:

a) Su ecuación explícita.

b) Su ecuación continua.

c) Su ecuación vectorial.

3. Ecuaciones de una recta en el plano

Pag.167 – Todas las ecuaciones

31 Escribe todas las ecuaciones de estas rectas.

a) Su pendiente es -1 y pasa por el punto $(0, -2)$.

b) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen -3.

c) Pasa por el punto $P(2, 1)$ y es perpendicular a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

d) Pasa por el punto $P(-1, 0)$ y es paralela a la recta $y - 2 = 3(x - 2)$.

4. Posiciones de 2 rectas

Posiciones	Vectores directores	Pendientes	Ecuación general
Paralelas	$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$	$m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coincidentes	$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$	$m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Secantes	$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{v_2}{v_1}$	$m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

4. Posiciones de 2 rectas

Pag.168

32 PRACTICA. Estudia la posición relativa de estos pares de rectas.

a) $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ 2x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x, y) = (2, 3) + t \cdot (1, 4) \\ \dfrac{x - 3}{-8} = \dfrac{y - 1}{-2} \end{cases}$

4. Posiciones de 2 rectas

Pag.168

33 APLICA. Calcula la pendiente de una recta perpendicular a la recta $y = 2x + 3$.

34 REFLEXIONA. ¿Cuánto tiene que valer A para que las rectas r: $y = Ax + 6$ y s: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-6}{4}$ sean paralelas?

5. Ecuaciones de paralelas y perpendiculares

Pag.169

35 Calcula las ecuaciones de una recta perpendicular y otra paralela a las siguientes rectas, que pasen por el punto $P(3, -1)$.

a) $3x + y - 1 = 0$

b) $5x + 2y - 4 = 0$

5. Ecuaciones de paralelas y perpendiculares

Pag.169

36 Halla la ecuación de una recta paralela a $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{7}$ que pase por (0, 0).

37 Determina la ecuación vectorial de una recta perpendicular a $x + y - 5 = 0$ que pase por el punto $P(0, 4)$ y represéntala.

38 Halla una recta paralela a la recta de ecuación $(x, y) = (2, 0) + t \cdot (-1, 4)$, que pase por el punto (1, 1).

5. Ecuaciones de paralelas y perpendiculares

Pag.169

39 Considera la ecuación $y = \frac{3}{2}x + 1$.

a) Halla una recta paralela que pase por el punto $P(0, 2)$.

b) Determina la ecuación punto-pendiente de una recta perpendicular que pase por el origen.

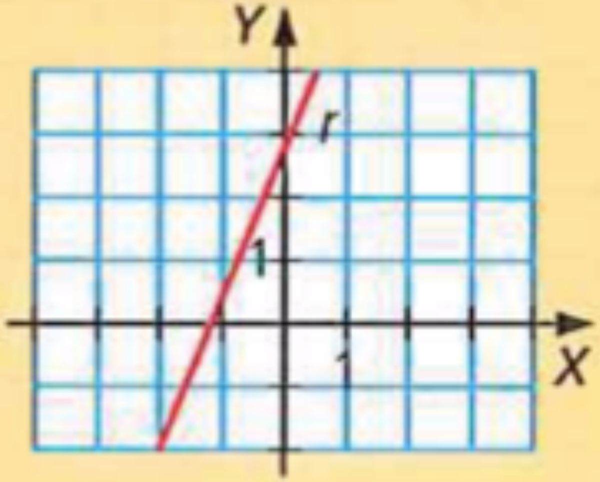
c) Calcula la ecuación en forma continua de una recta paralela que pase por el punto $Q(0, 3)$.

40 Dada la recta $y = 7$, calcula la ecuación de una recta paralela que pase por el punto $(1, 2)$.

5. Ecuaciones de paralelas y perpendiculares

Pag.169

41 Calcula la ecuación de la recta *r*.



Escribe y representa una recta:

a) Paralela a *r* que pase por el origen.

b) Perpendicular a *r* que pase por el punto $A(0, -1)$.