FUNCIONES

Esquema del Tema

- Concepto de Función
- Funciones Elementales
- Funciones a trozos
- Operaciones. Composición
- Dominio
- Función inversa. Recorrido
- Límites
- Asíntotas

- Continuidad
- Derivadas
  - Recta tangente a f(x)
  - Crecimiento. Curvatura
  - Problemas Optimización

- Estudio global de funciones: Dominio, Recorrido, Puntos Corte, Simetría, Asíntotas, Crecimiento, Curvatura, Representación

¿Dónde aparecen las funciones?

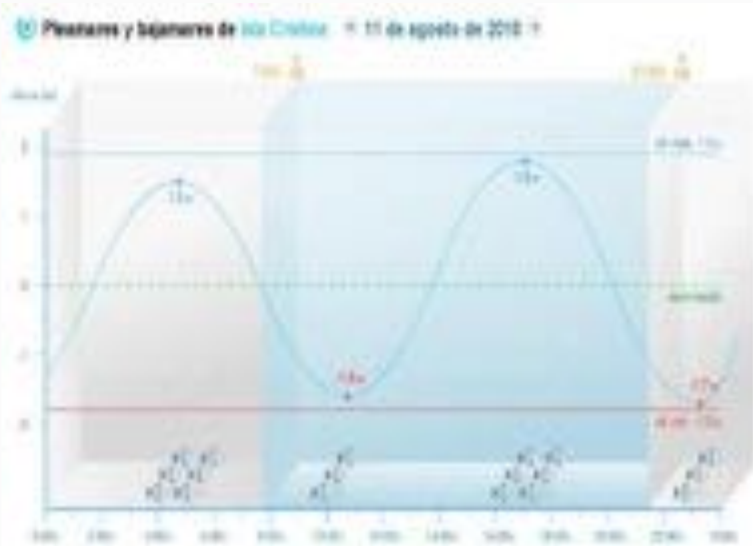
En la naturaleza nada permanece estable, todo cambia. Desde el principio de los tiempos el ser humano ha intentado buscar explicaciones y definir reglas para esos cambios.

La duración de los días, el movimiento de las estrellas, los ciclos de la Luna, el paso de las estaciones. Medir el tiempo: años, meses, días, horas… Ha sido el fruto de la paciencia y de la inteligencia humana.

Observar, recopilar datos, buscar relaciones entre ellos. Y de esa forma adelantarse en el tiempo a los acontecimientos que van a suceder: eclipses, duración de las estaciones, horario de las mareas.

Ejemplo: Horario de las mareas

Podemos ver distintas gráficas y tablas de las mareas en http://www.tablademareas.com/



¿Cómo se obtienen esos datos?. Observando, buscando relaciones (entre el tiempo y la altura de las mareas), y tras mucho pensar, encontrando una fórmula que se ajuste a la relación entre las variables.

$$h = \frac{M_L}{2M_T}\left(\frac{R}{r_L}\right)^3 R(3\cos^2\theta - 1) + \frac{M_S}{2M_T}\left(\frac{R}{r_S}\right)^3 R(3\cos^2\theta - 1)$$

1. Concepto de función

Función real de variable real es toda correspondencia f que asocia a cada elemento de un determinado subconjunto de números reales un único número real.

$$
\begin{array}{rcl}
f : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
x & \longrightarrow & f(x) = y
\end{array}
$$

1. Concepto de Función

Importante: Para que esta correspondiente sea una función se tiene que cumplir que f(x) sea único para xϵD.

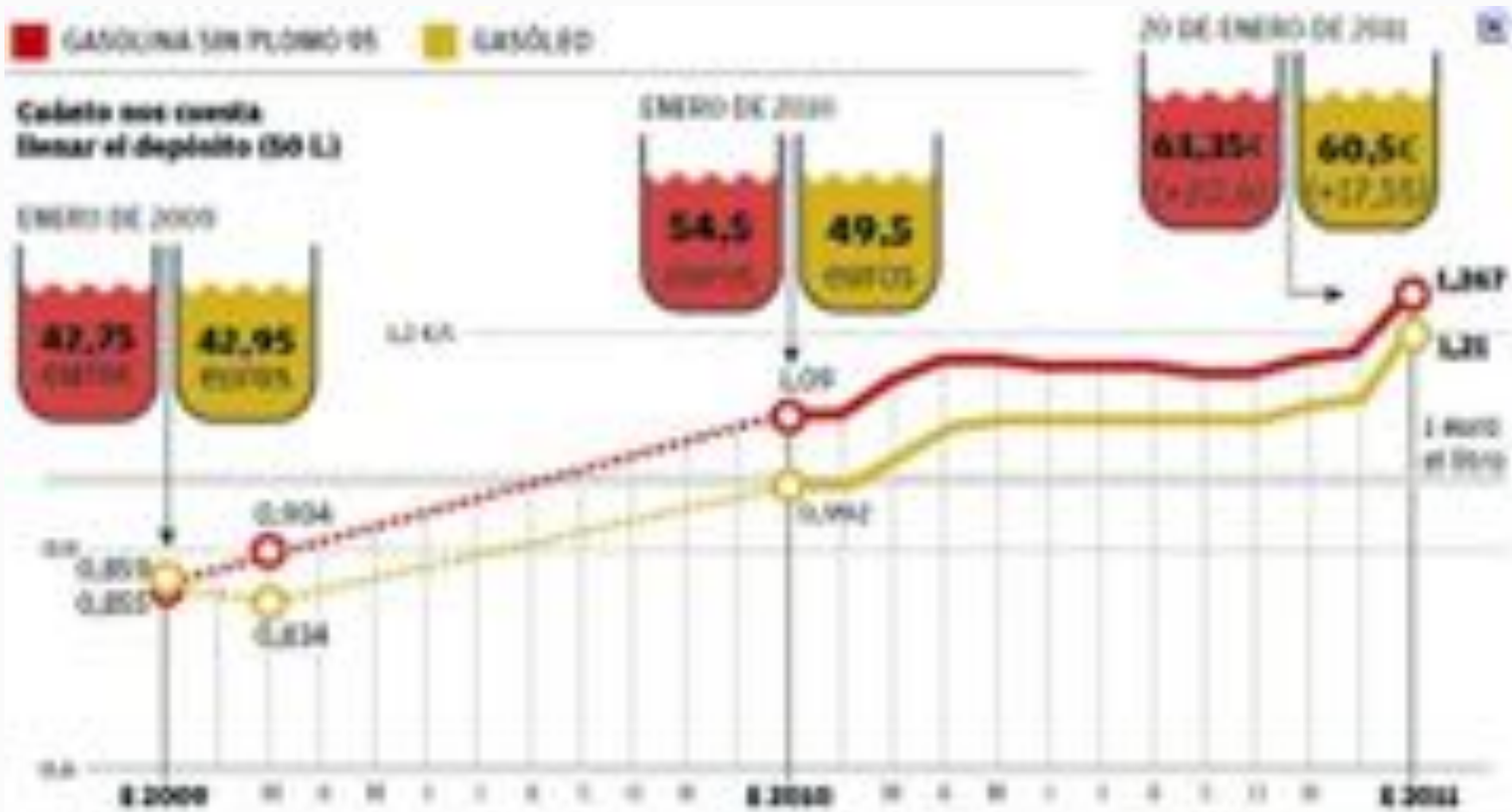
Inventa un dibujo que represente una función

Inventa un dibujo que **<u>no</u>** represente una función

1. Concepto de Función

Ejemplos de gráficas de funciones de la vida real

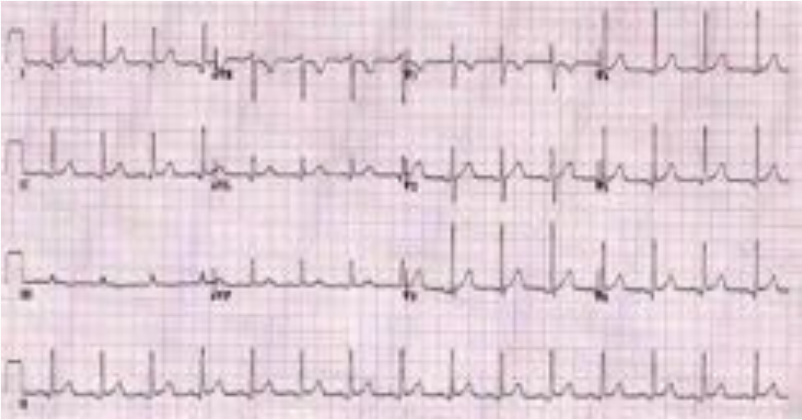
Evolución del precio del gasóleo



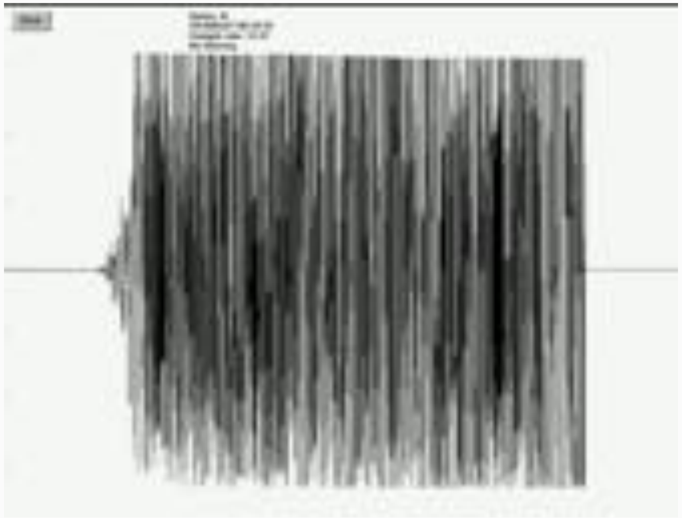
1. Concepto de Función

Ejemplos de gráficas de funciones de la vida real

<u>Estudio cardíaco</u>

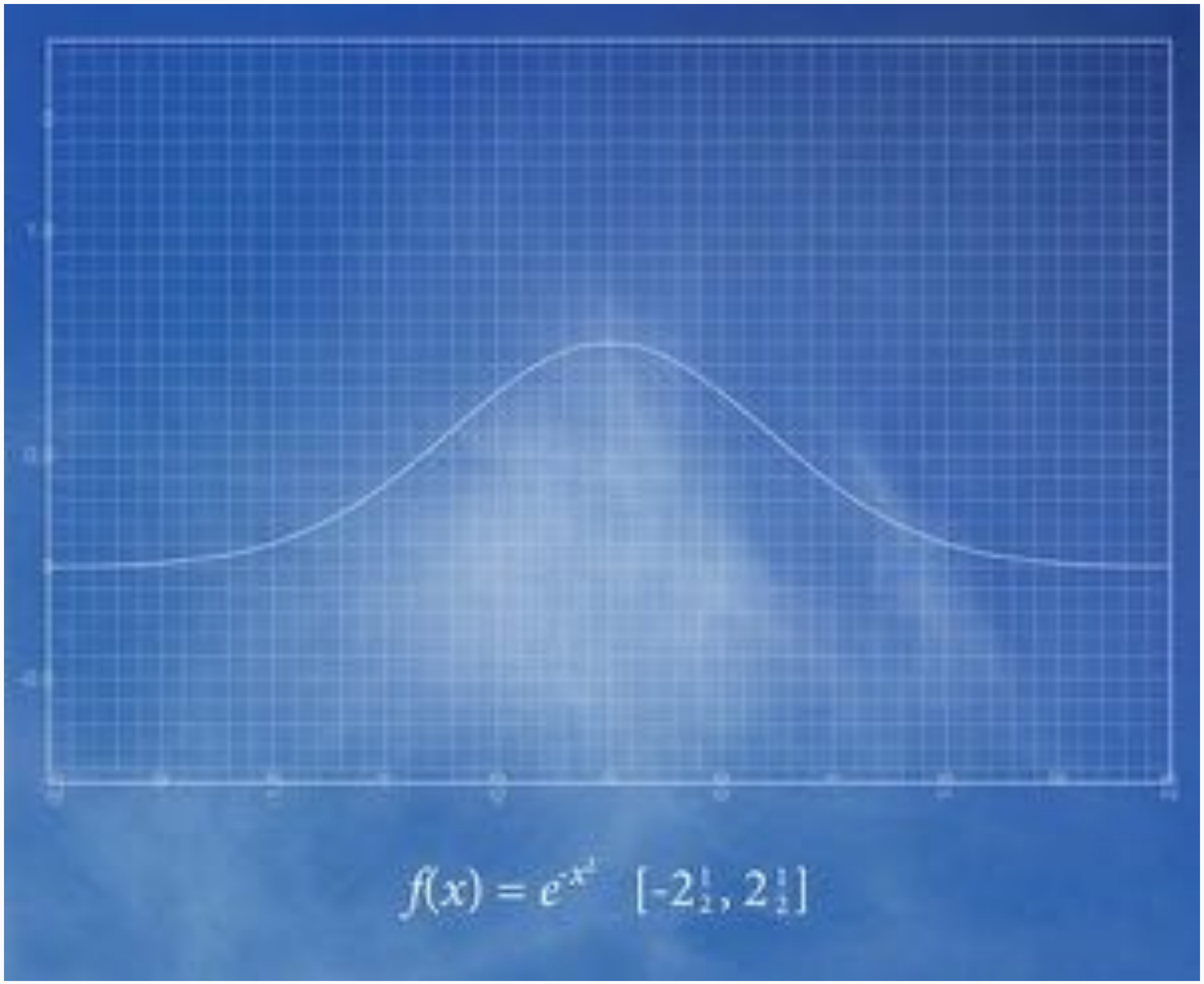


<u>Movimiento sísmico - Terremoto</u>



1. Concepto de Función

Ejemplos de gráficas de funciones de la vida real



1. Concepto de Función

Ejemplos de gráficas de funciones de la vida real

1. Concepto de Función

Ejemplos de gráficas de funciones de la vida real

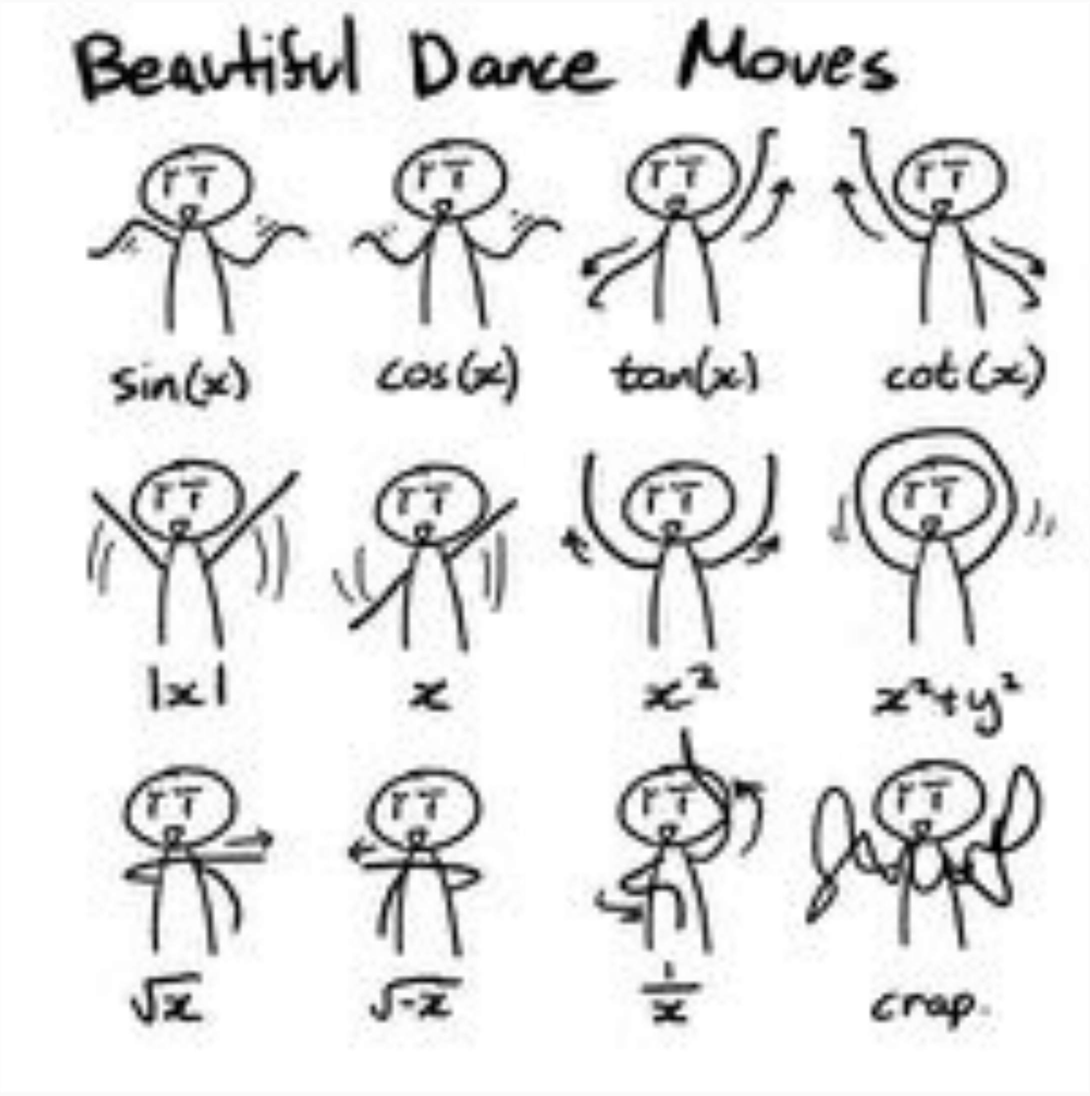
1. Concepto de Función

Ejemplos de gráficas de funciones de la vida real

2. Funciones Elementales

$$
\begin{cases}
\textit{Algebraicas} \begin{cases}
\textit{Polinómicas} \begin{cases}
\textit{Constantes} \\
\textit{Lineales} \\
\textit{Cuadráticas} \\
\textit{Grado} > 2
\end{cases} \\
\textit{Racionales} \left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right) \\
\textit{Radicales}
\end{cases} \\
\textit{Trascendentes} \begin{cases}
\textit{Exponenciales} \\
\textit{Logarítmicas} \\
\textit{Trigonométricas}
\end{cases}
\end{cases}
$$

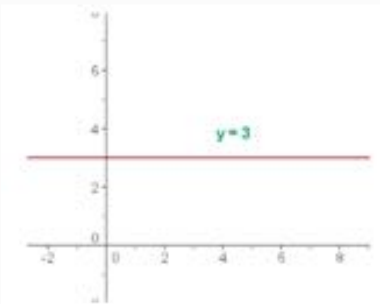
2. Funciones Elementales

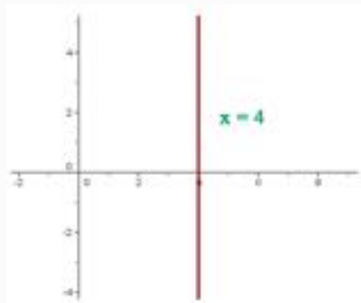


2. Funciones Elementales

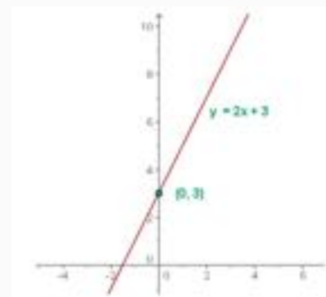
Funciones Polinómicas

Constantes





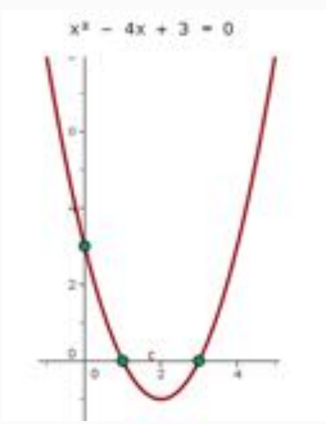
Lineales



$y=ax+b$

¿Qué pasa si $a>0$ ó si $a<0$?

Cuadráticas



$y=ax^2+bx+c$

¿Qué pasa si $a>0$ ó si $a<0$?

¿Cuál es el vértice?

Grado >2

2. Funciones Elementales

EJEMPLOS DE LA VIDA REAL - y=ax+b (Función lineal)

--La presión y la profundidad bajo el agua

-Capa de nieve en cm y litros de agua de deshielo que lleva el río

-La masa de una persona y cm que sube el agua de una piscina

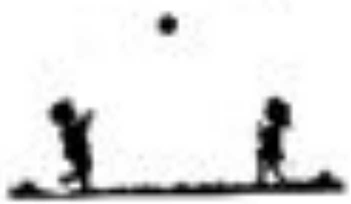
2. Funciones Elementales

EJEMPLOS VIDA REAL - $y=ax^2+bx+c$ (Función Cuadrática)

-Un lanzamiento de peso en la que x es la distancia recorrida e y la altura.

-La distancia de un coche en una deceleración hasta que para.

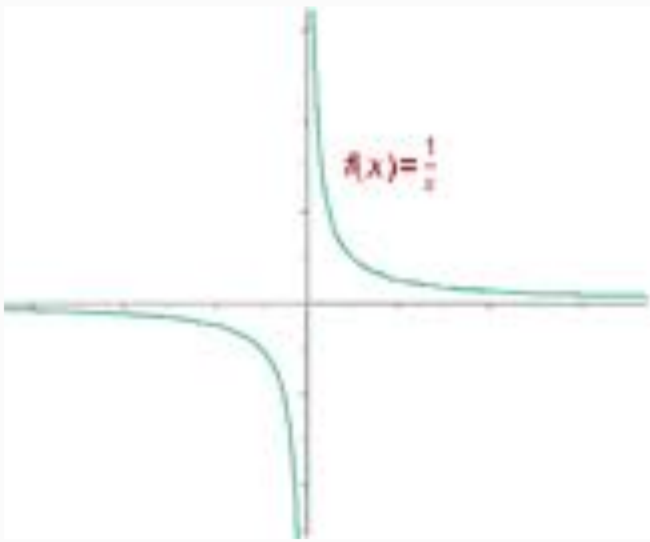
-La altura que alcanza un objeto en el lanzamiento y el tiempo que transcurre.



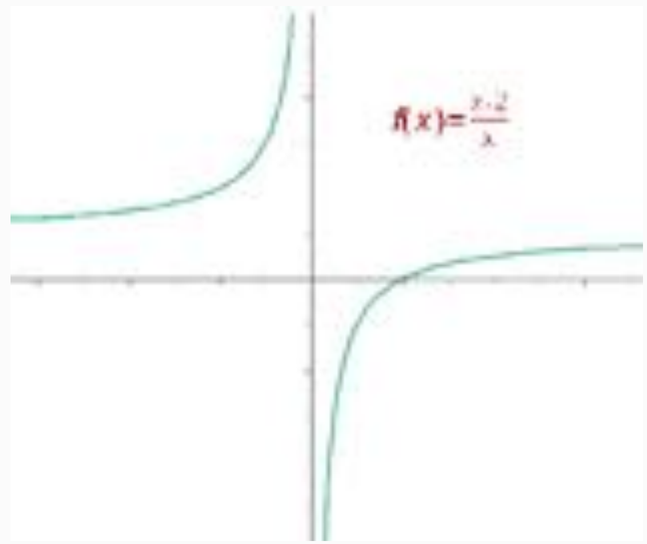
2. Funciones Elementales

Funciones Racionales

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$



$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$



2. Funciones Elementales

Funciones Racionales

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

-El número de albañiles que construyen una casa y el tiempo que tardan.

-La relación entre la presión de 20 mol de agua y el tamaño del recipiente.

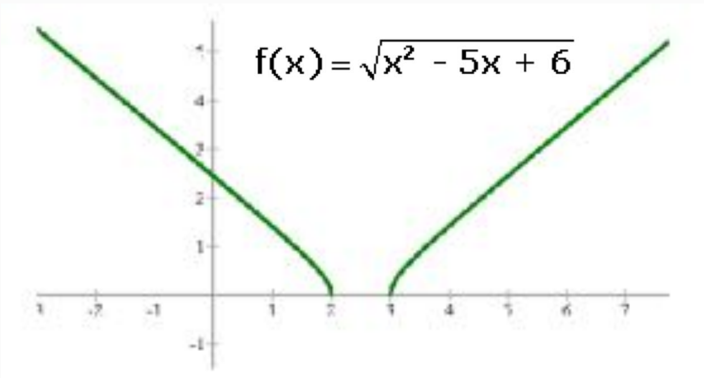
-Los aumentos de una lupa y la distancia al objeto.

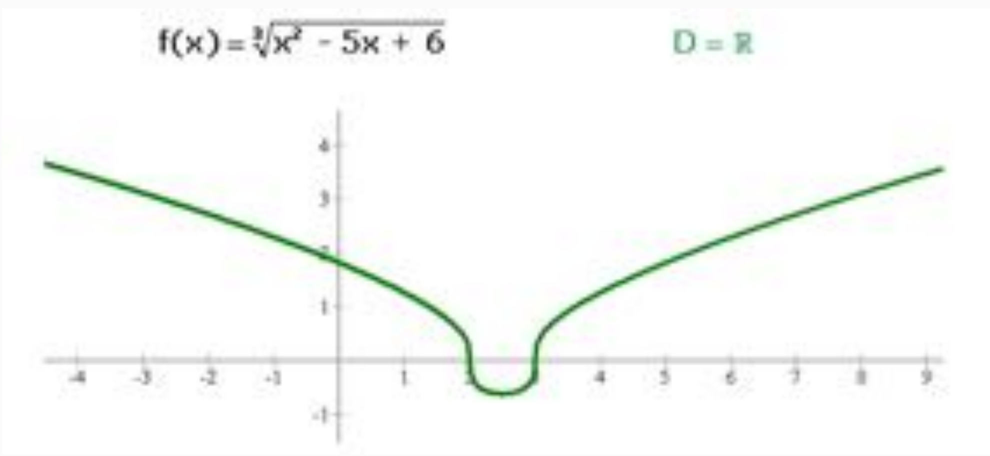
-El diámetro de los clastos de la arena y la erosión que se produce en ellas.

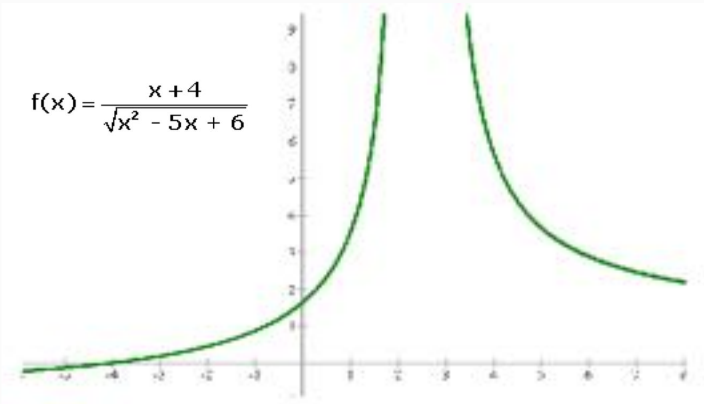
2. Funciones Elementales

Funciones Radicales

$$\sqrt[n]{P(x)},\ \sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}},\ \frac{P(x)}{\sqrt[n]{P(x)}}$$



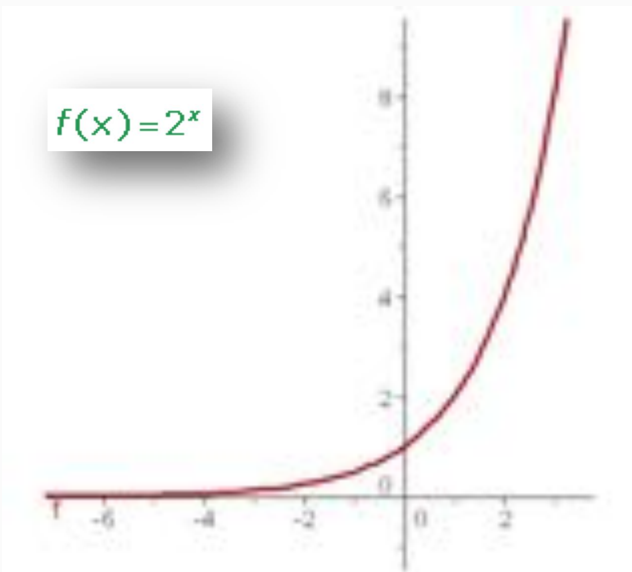


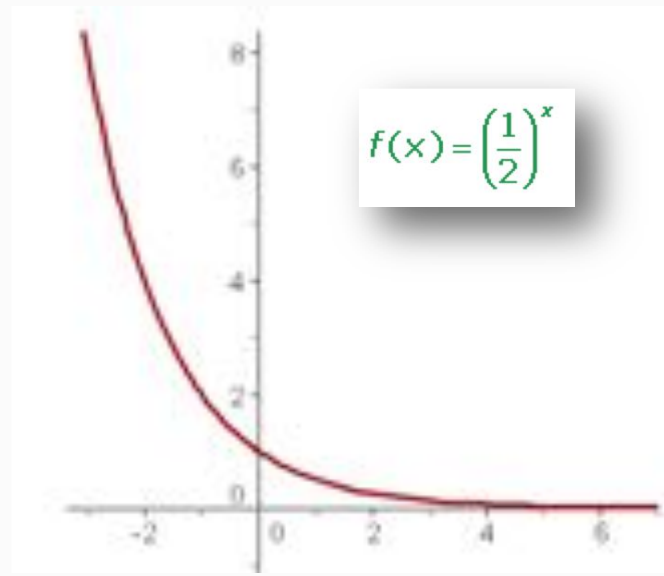


2. Funciones Elementales

Función Exponencial

$$f(x) = a^x$$





2. Funciones Elementales

Función Exponencial

$$f(x) = a^x$$

- Reproducción de bacterias en un cultivo.

-La pérdida de actividad o frecuencia de las desintegraciones de un material radiactivo con el tiempo.

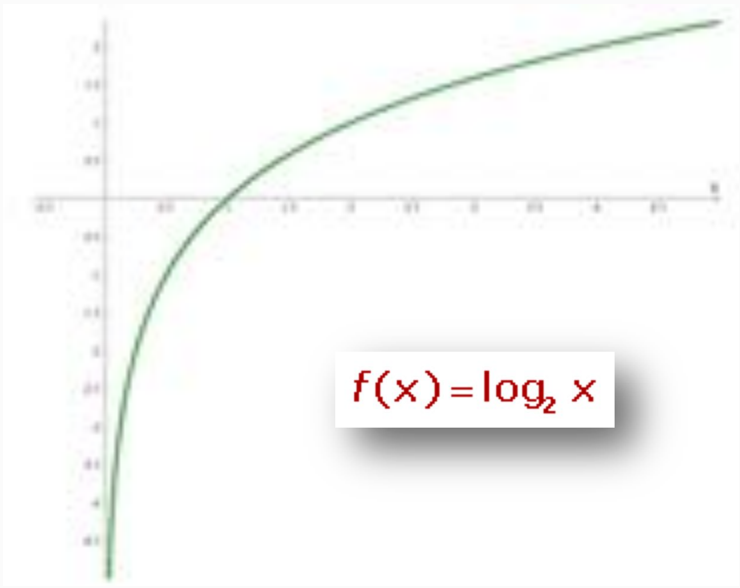
-Tiempo que necesita una sustancia para llegar a cierta temperatura.

2. Funciones Elementales

Función Logarítmica

$f(x) = \log_a x \qquad a > 0, \; a \neq 1$

x	$y = \log_2 x$
1/8	
1/4	
1/2	
1	
2	
4	
8	

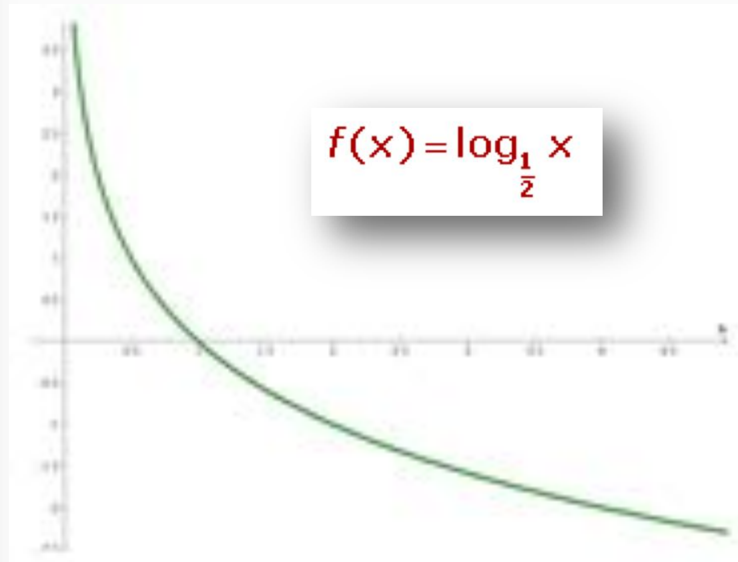


2. Funciones Elementales

Función Logarítmica

$f(x) = \log_a x \qquad a > 0, \; a \neq 1$

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3



$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

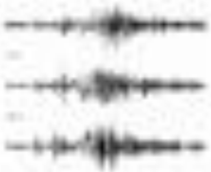
2. Funciones Elementales

Función Logarítmica

$$f(x) = \log_a x \qquad a > 0,\ a \neq 1$$

-La magnitud de un sismo está definida como R= Log (A/A0) en la escala de Richter, donde A es la intensidad y A0 es una constante

-Cálculo del volumen "L" en decibeles de un sólido, para el cual se emplea la siguiente ecuación L= 10 ,Log (I/I0) , donde I es la intensidad del sonido, I0 es la intensidad de sonido más baja que el oído humano puede oír.

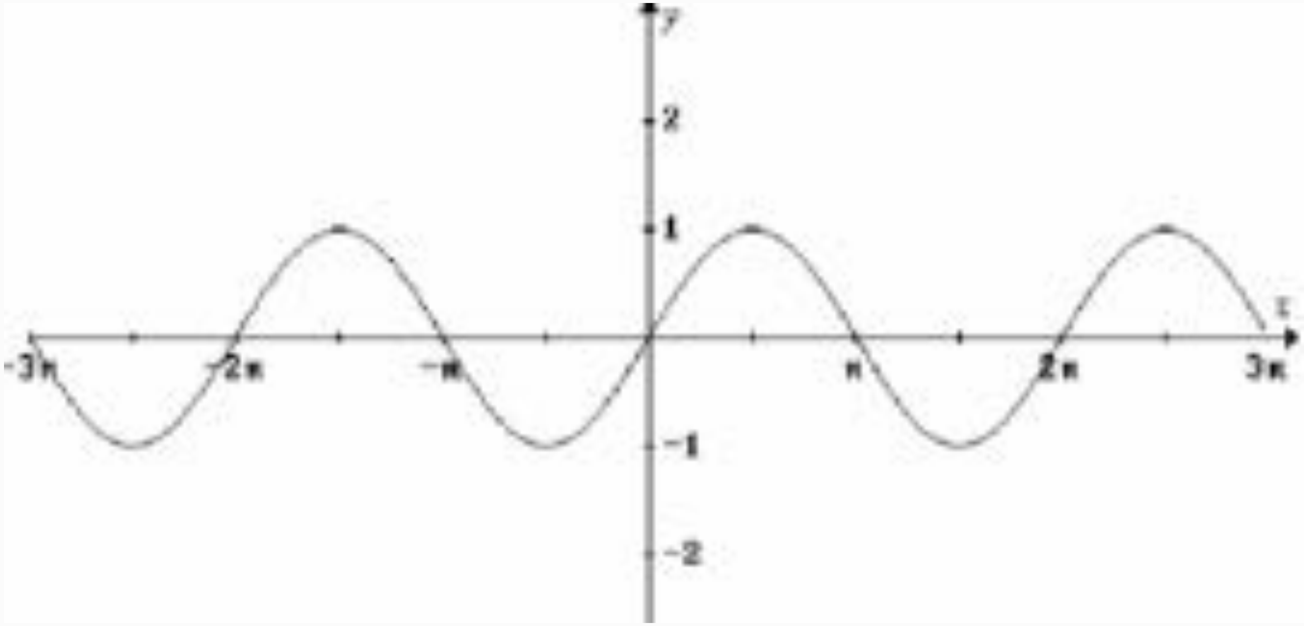


-Medir el pH.

2. Funciones Elementales

Funciones Trigonométricas

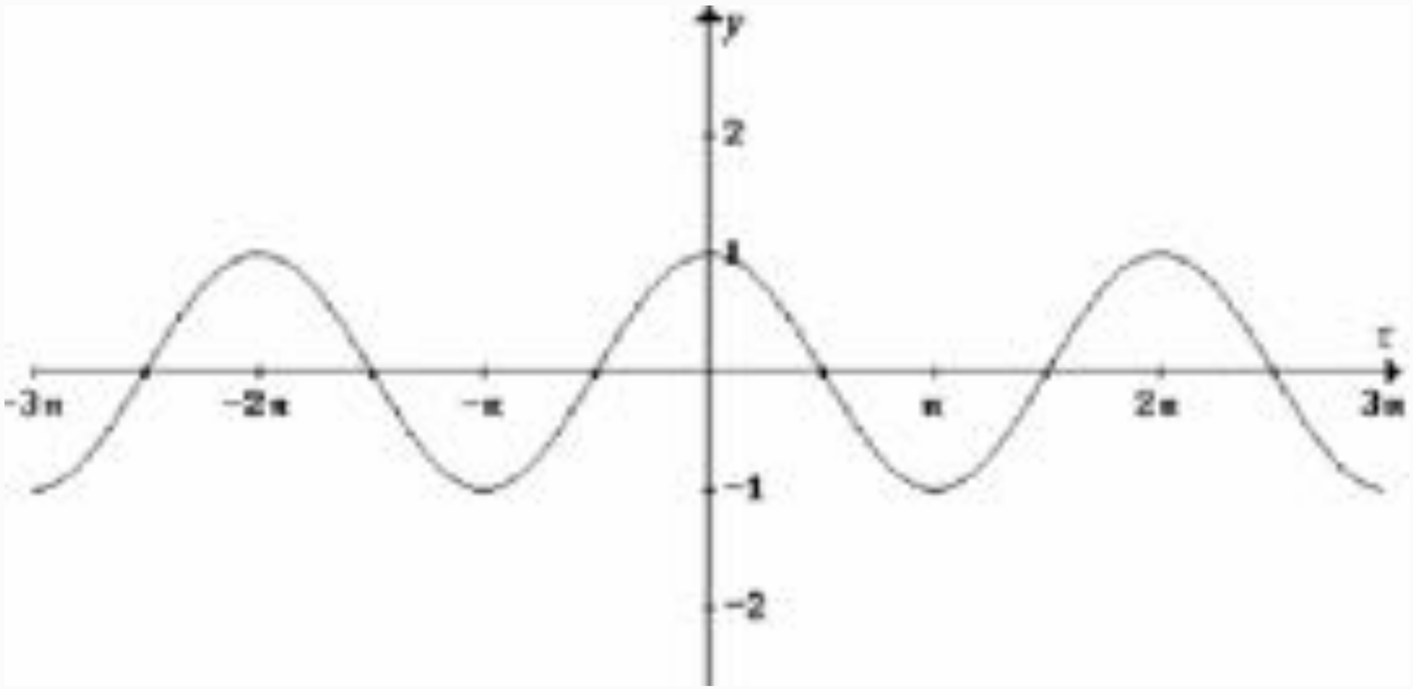
y=sen(x)



2. Funciones Elementales

Funciones Trigonométricas

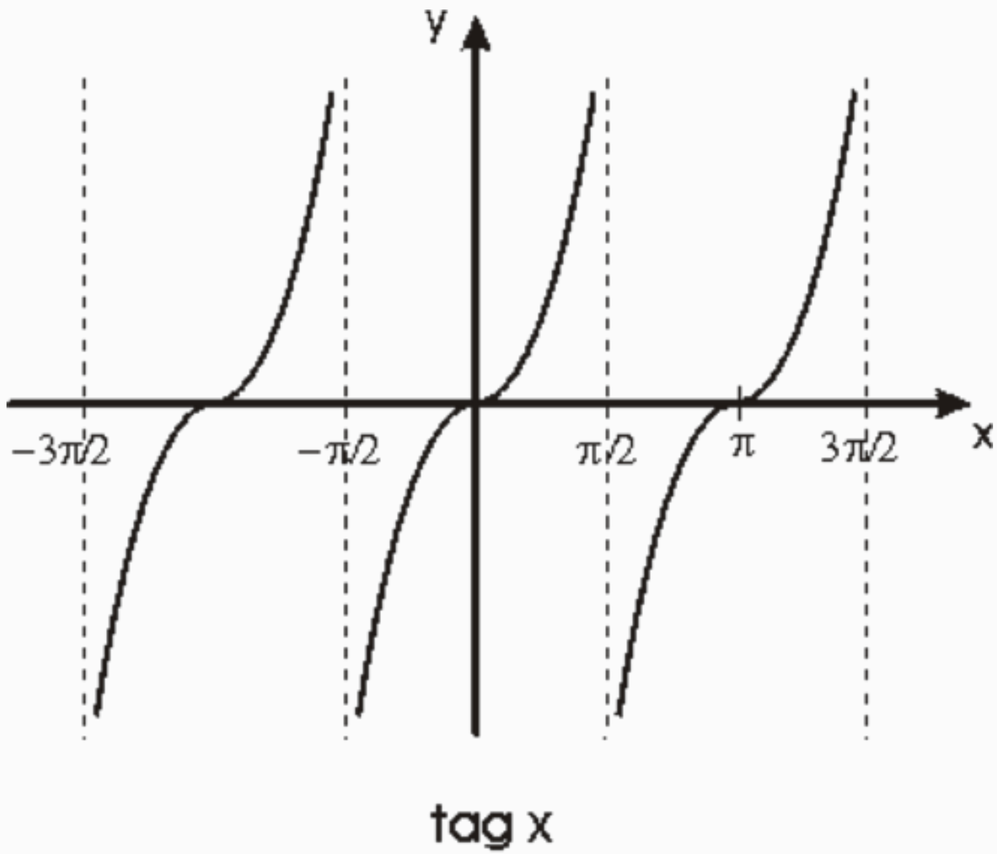
Función y=cos(x)



2. Funciones Elementales

Funciones Trigonométricas

Función y=tag(x)



2. Funciones Elementales

Funciones Trigonométricas

-Altura de una grúa para llegar a un edificio.

-Altura que debe abrir un puente levadizo para que los barcos puedan pasar.

-Cálculo del radio de planetas.

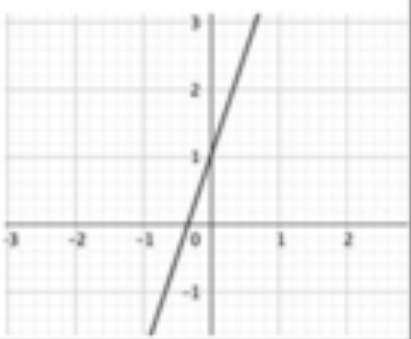
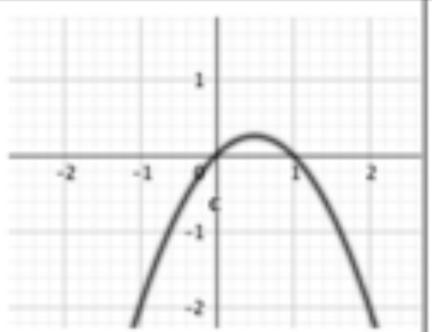
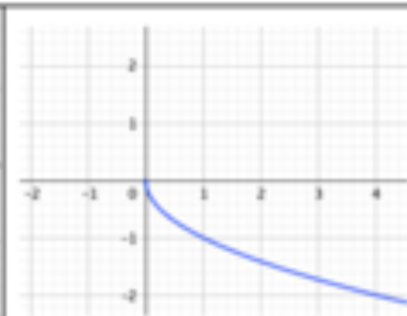
-Construcción de relojes solares.

-Distancia a la que se encuentra un blanco para disparar con un cañón

2. Funciones Elementales

1. Coloca las siguientes funciones debajo de su dibujo:

Lineales	Cuadráticas	Proporcionalidad Inversa	Radicales	Exponenciales	Logarítmicas
y=3x+1	y=-x^2	y= $\frac{1}{x+1}$	y=$\sqrt{x+1}$	y=2^{x+1}	y=log(x)
y=-2x+2	y=x^2-2x+1	y= $\frac{1}{x-1}$	y=$\sqrt{x-2}$	y=2^{x-1}	y=log(x+2)
y=(1/2)x-1	y=-x^2+x	y= -$\frac{1}{x+1}$	y=-$\sqrt{x}$	y=(1/2)^x	y=-log(x)

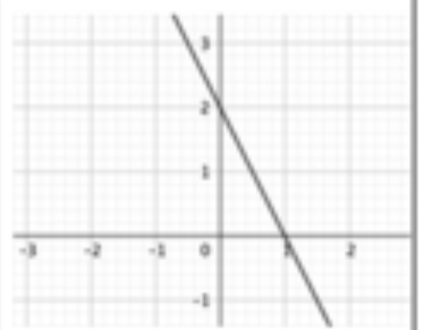
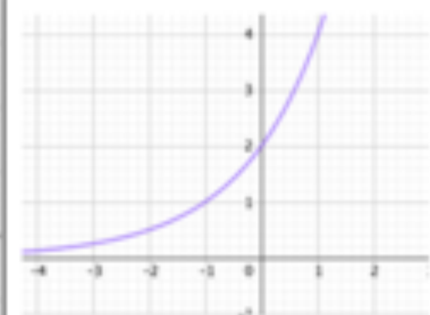
			
y=	y=	y=	y=

2. Funciones Elementales

1. Coloca las siguientes funciones debajo de su dibujo:

Lineales	Cuadráticas	Proporcionalidad Inversa
y=3x+1	y=-x^2	y= $\frac{1}{x+1}$
y=-2x+2	y=x^2-2x+1	y= $\frac{1}{x-1}$
y=(1/2)x-1	y=-x^2+x	y= -$\frac{1}{x+1}$

Radicales	Exponenciales	Logarítmicas
y=$\sqrt{x+1}$	y=2^{x+1}	y=log(x)
y=$\sqrt{x-2}$	y=2^{x-1}	y=log(x+2)
y=-$\sqrt{x}$	y=$(1/2)^x$	y=-log(x)

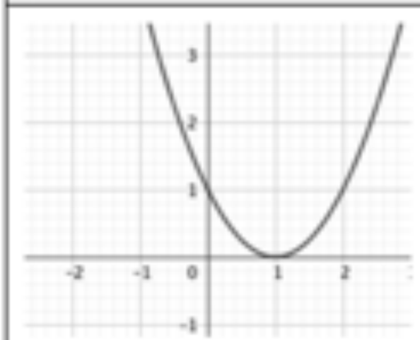
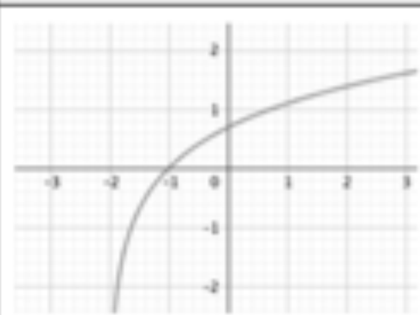
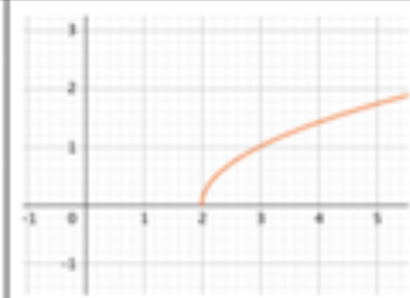
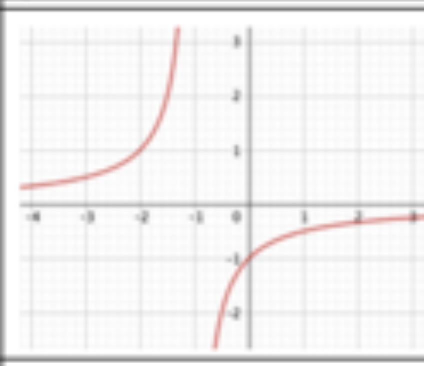
			
y=	y=	y=	y=

2. Funciones Elementales

1. Coloca las siguientes funciones debajo de su dibujo:

Lineales	Cuadráticas	Proporcionalidad Inversa
y=3x+1	y=-x^2	y= $\frac{1}{x+1}$
y=-2x+2	y=x^2-2x+1	y= $\frac{1}{x-1}$
y=(1/2)x-1	y=-x^2+x	y= -$\frac{1}{x+1}$

Radicales	Exponenciales	Logarítmicas
y=$\sqrt{x+1}$	y=2^{x+1}	y=log(x)
y=$\sqrt{x-2}$	y=2^{x-1}	y=log(x+2)
y=-$\sqrt{x}$	y=(1/2)^x	y=-log(x)

			
y=	y=	y=	y=

3. Transformación de funciones

Estudiemos cómo afectan a las funciones las siguientes transformaciones:

- $y=f(x)+K$ // $y=f(x)-k$
- $y=-f(x)$
- $y= kf(x)$
- $y= f(x+a)$
- $y= f(-x)$

3. Transformación de funciones

2. Representa estas funciones:

a) $y= \dfrac{1}{x-2}$

b) $y= \dfrac{1}{x+2}$

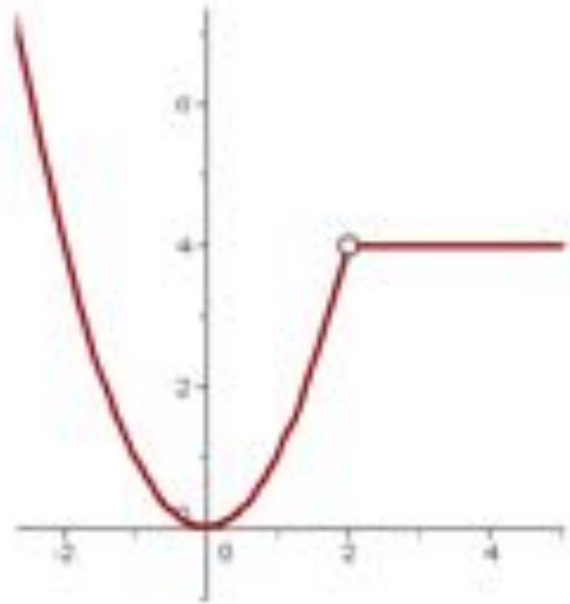
c) $y= -\dfrac{1}{x+2}$

d) $y= \dfrac{1}{x+2} +2$

4. Funciones a trozos

Son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se determinen.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



4. Funciones a trozos

Pag.254 – 1,2,3

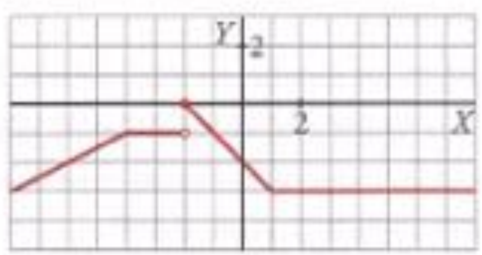
3. Representa la función a trozos

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in[-3,0) \\ x^2-2x+1 & x\in[0,3] \\ 4 & x\in(3,7) \end{cases}$$

4. Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -2x-1 & x<1 \\ x^2+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

5. Escribe la expresión gráfica que corresponde a la siguiente gráfica:



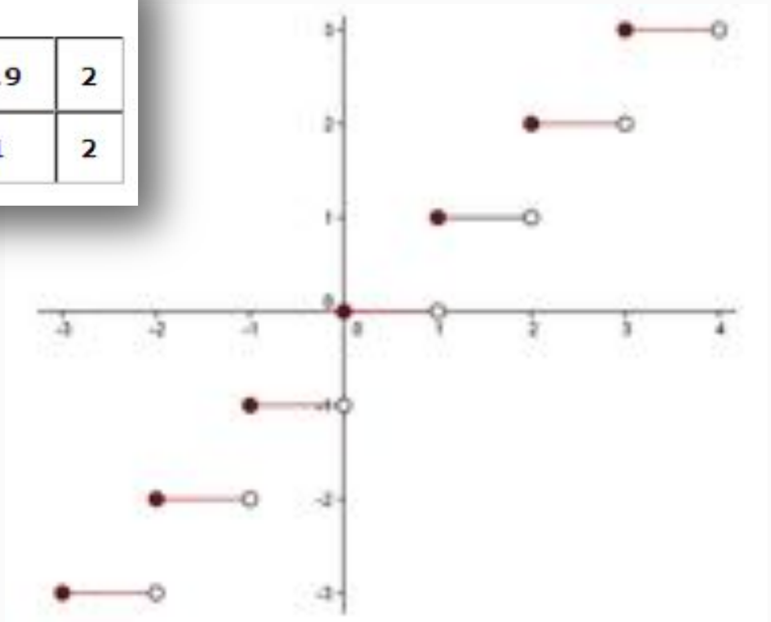
5. Otras funciones especiales

Función Parte Entera

Es una función que a cada número real hace corresponder el número entero inmediatamente inferior.

f(x) = E (x)

x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
f(x) = E(x)	0	0	0	1	1	1	2

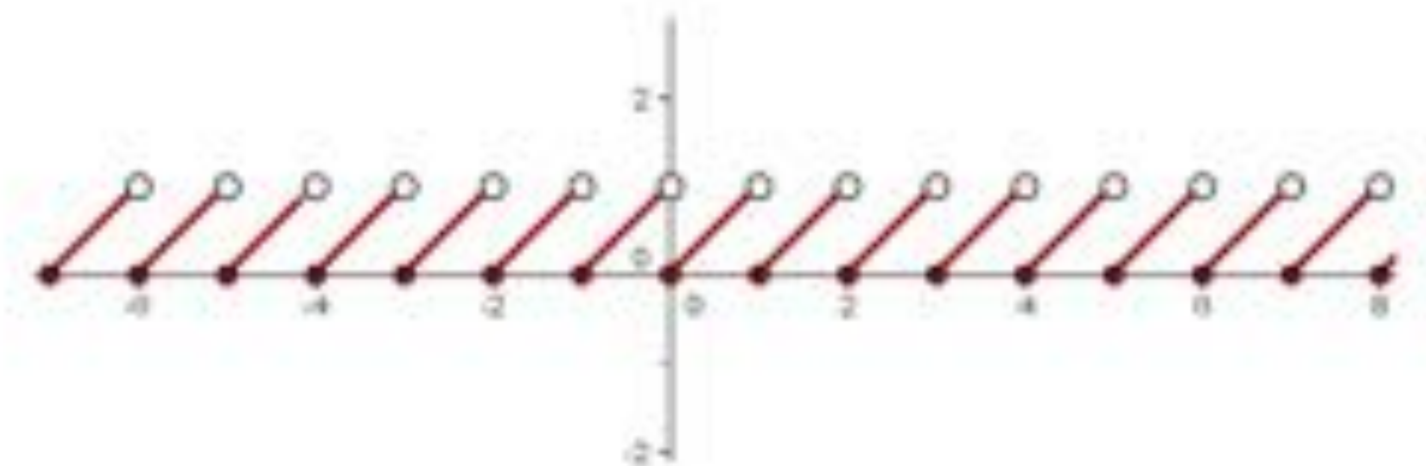


5. Otras funciones especiales

Función Parte Decimal

$f(x) = x - E(x)$

x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
$f(x) = x - E(x)$	0	0.5	0.9	0	0.5	0.9	0



5. Otras funciones especiales

Función Valor Absoluto

La parte negativa se vuelve positiva.

Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos, siguiendo los siguientes pasos:

1. **Se iguala a cero** la función, sin el valor absoluto, y **se calculan sus raíces**.

2. Se forman **intervalos con las raíces y se evalúa el signo** de cada intervalo.

3. Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en **los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función**.

4 Representamos la función resultante.

5. Otras funciones especiales

Función Valor Absoluto

$$f(x) = |x - 3|$$

5. Otras funciones especiales

Función Valor Absoluto

$$f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$$

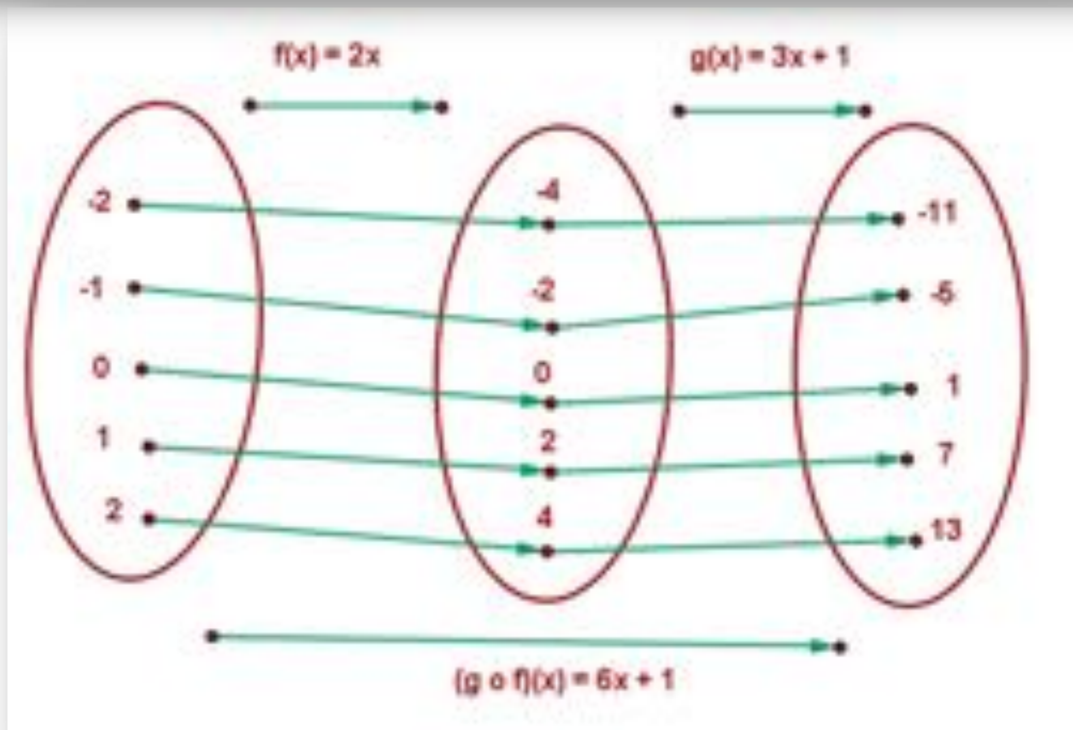
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ -\left(x^2 - 5x + 6\right) & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

6. Composición de funciones

Dadas dos funciones, f y g, se llama **función compuesta** de f y g, y se designa por $g \circ f$, a la función que transforma x en $g[f(x)]$:

$$x \xrightarrow{g \circ f} g[f(x)]$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$



6. Composición de funciones

$f(x) = 3x + 2 \qquad g(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$

Calcular g o f y f o g

$f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1} \qquad g(x) = \sqrt{x}$

Calcular g o f y f o g

6. Composición de Funciones

6. Dadas $f(x)=x^2-5x+6$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=sen(x)$, $I(x)=x+3$.

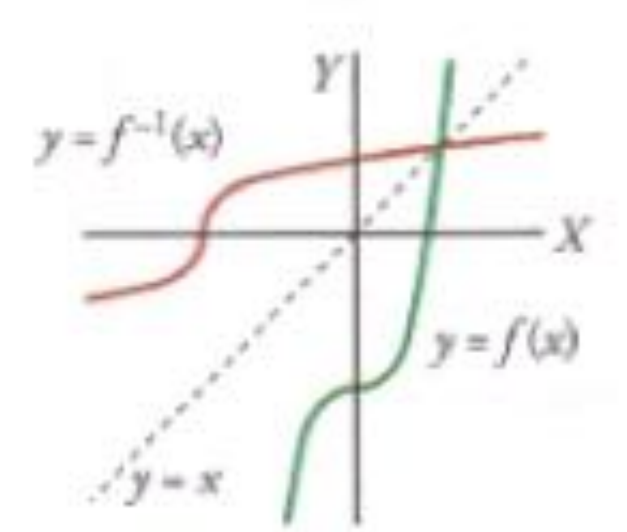
Calcular $g(f(x))$, $f(g(2))$, $f(h(x))$, $h(I(x))$, $I(h(x))$.

7. Función inversa

Se llama **función inversa o reciproca de f a otra función f^{-1}** que cumple que

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

f y f^{-1} son simétricas respecto a y=x



Ejemplo de funciones inversas

$$f(x) = x^3 - 6 \ \text{y} \ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}$$

Comprobar que son inversas

Simetría al calcular puntos

PUNTOS DE $f(x)$: $y = x^3 - 6$	(–1, –7)	(0, –6)	(2, 2)	…	(*a*, *b*)
PUNTOS DE $f^{-1}(x)$: $y = \sqrt[3]{x+6}$	(–7, –1)	(–6, 0)	(2, 2)	…	(*b*, *a*)

7. Función inversa

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Cálculo de la función inversa

1 Se escribe la ecuación de la función con x e y.

2 Se despeja la variable x en función de la variable y.

3 Se intercambian las variables.

Calcular la **función inversa** de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

7. Función inversa

7. Comprueba que las funciones $y=2x$, $y=x/2$ son funciones inversas.

8. Comprueba que las funciones $y=2x+4$, $y=x/2 - 2$ son funciones inversas.

7. Función inversa

9. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a) y=3x+2

b) y=$x/4$ +3

b) c) y=$\frac{3x-1}{x}$

d) y=$\frac{2x-1}{3x+3}$

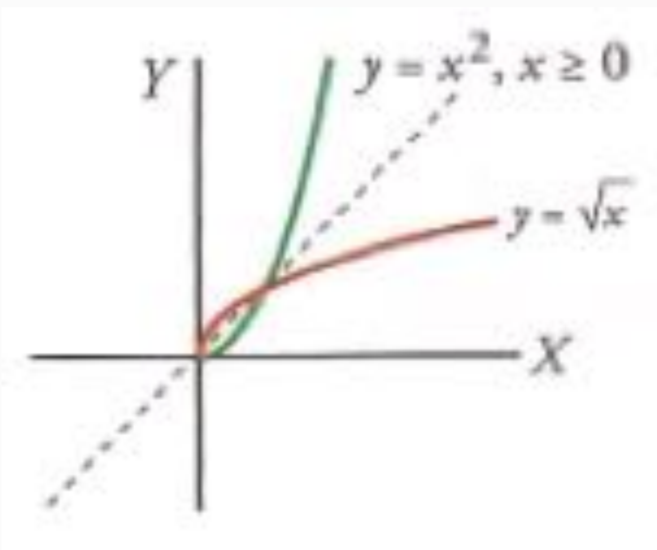
c) e) y= 3^{x+1}

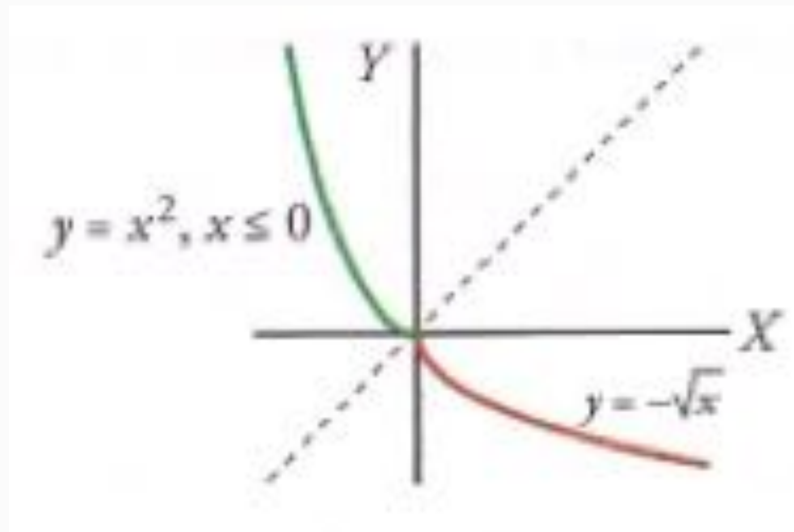
f) y= log(x-2)

7. Función inversa

Para que una función tenga inversa ha de ser **inyectiva,** es decir, cada valor de y ha de corresponder a un único valor de x. Si no es así, ha de descomponerse en tramos en que sea inyectiva, cada uno de los cuales tendrá su función inversa.

Por ejemplo, $y = x^2$ no es inyectiva





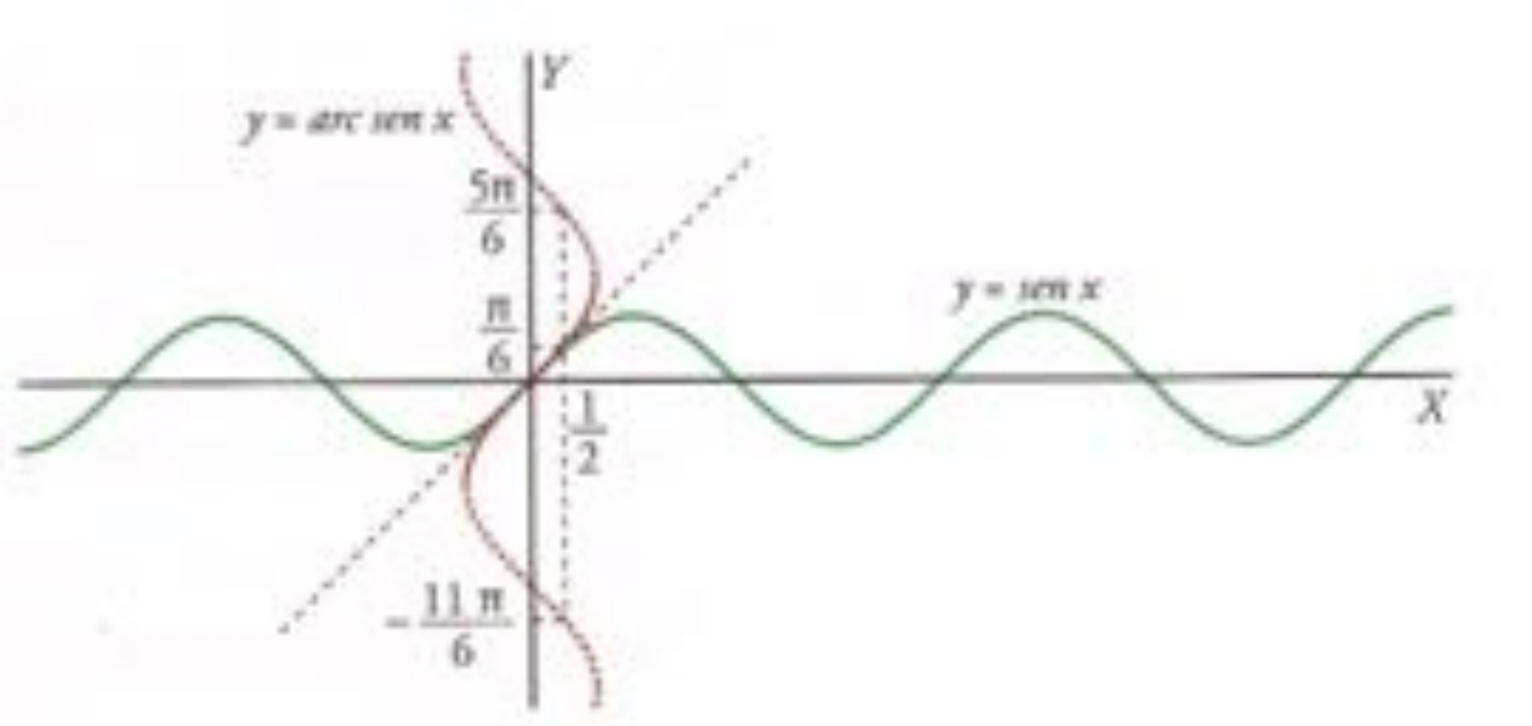
7. Función inversa

10. Descomponer $y=2x^2-4$ en dos ramas para hallar sus inversas.

7. Función arco (inversa trigonom.)

y=arcsen(x) , y= arccos(x) , y=arctag(x)

Representación de la función arcsen(x)



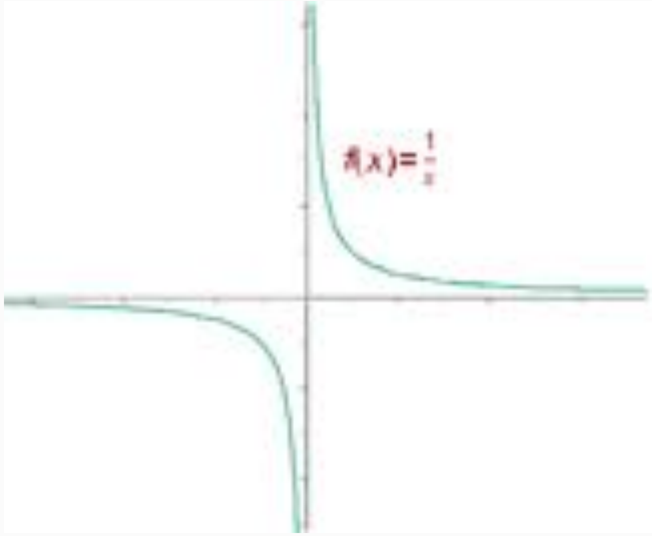
Dominio/Recorrido

Al conjunto D se le denomina **Dominio** y representa el conjunto de puntos para los que existe la función.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists \ f(x)\}$$

Se denomina **Recorrido** al conjunto de valores que toma la función.

$$R = \{f(x) \ / \ x \in D\}$$



Ejemplo: ¿Cuál es el dominio y cuál el recorrido?

8. Tabla Resumen- Dominio - Recorrido

Tipo de Función	¿Cómo calcular el dominio?	¿Cómo calcular el recorrido?
Funciones Polinómicas – P(x)		
Funciones Racionales - P(x)/Q(x)		
Funciones Radicales		
Funciones Exponenciales a^x		
Funciones Logarítmicas		
Funciones Trigonométricas		

Tabla Resumen- Dominio

11. Calcula el dominio de las siguientes funciones

a) y= $\sqrt{x^2 - 4}$

b) y=$\sqrt{x - 4}$

c) y=$\sqrt{2 - x}$

d) y=$\frac{2x+1}{3x-1}$

e) y=$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

f) y=x^4-4x+1

g) y=$\frac{1}{x^2-9}$

h)y=log(x-5)

i) y=$\log(x^2 - 5x + 6)$

j) y=$\frac{x}{\log(x^2+16)}$

9. Problemas de funciones

12

Se quiere hacer una ventana con forma de rectángulo añadiéndole un semicírculo sobre el lado menor, en la parte superior. Si el perímetro del rectángulo es 8 m, escribe el área de la ventana en función del lado menor del rectángulo. Di cuál es su dominio y su recorrido.

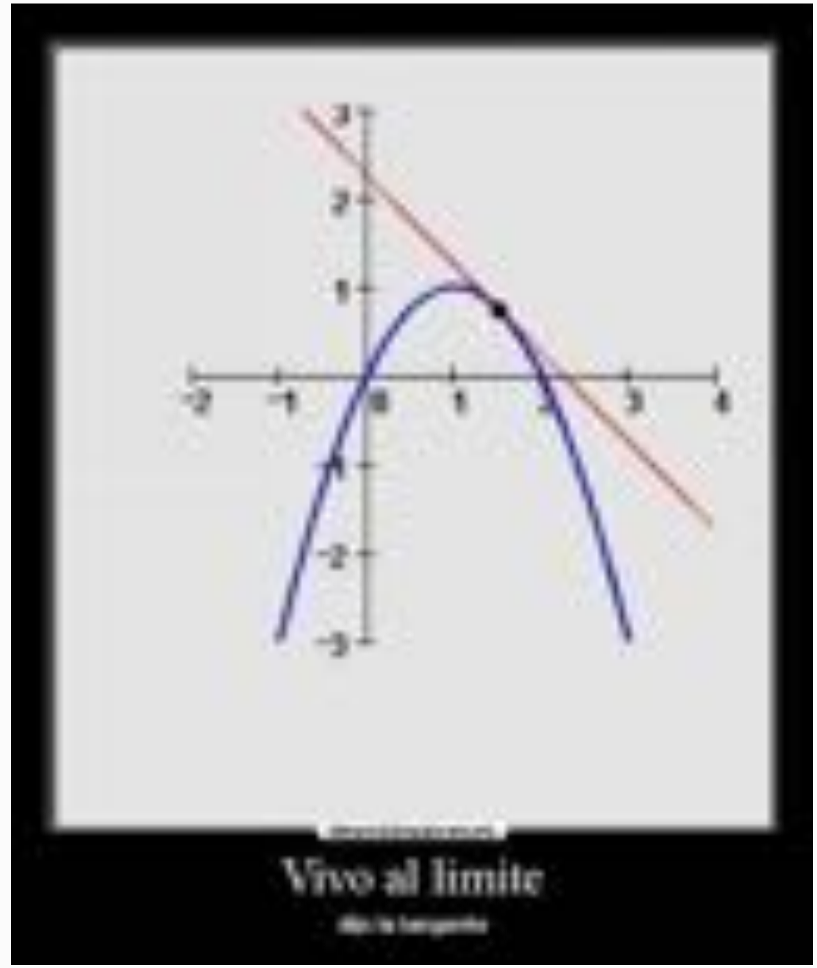
Problemas de funciones

13. Una feria ganadera está abierta entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función $N(t)=-20t^2+Bt+C$, donde t es la hora de visita. Sabiendo que a las 17h se alcanza el máximo de 1500 visitantes, calcula B y C.

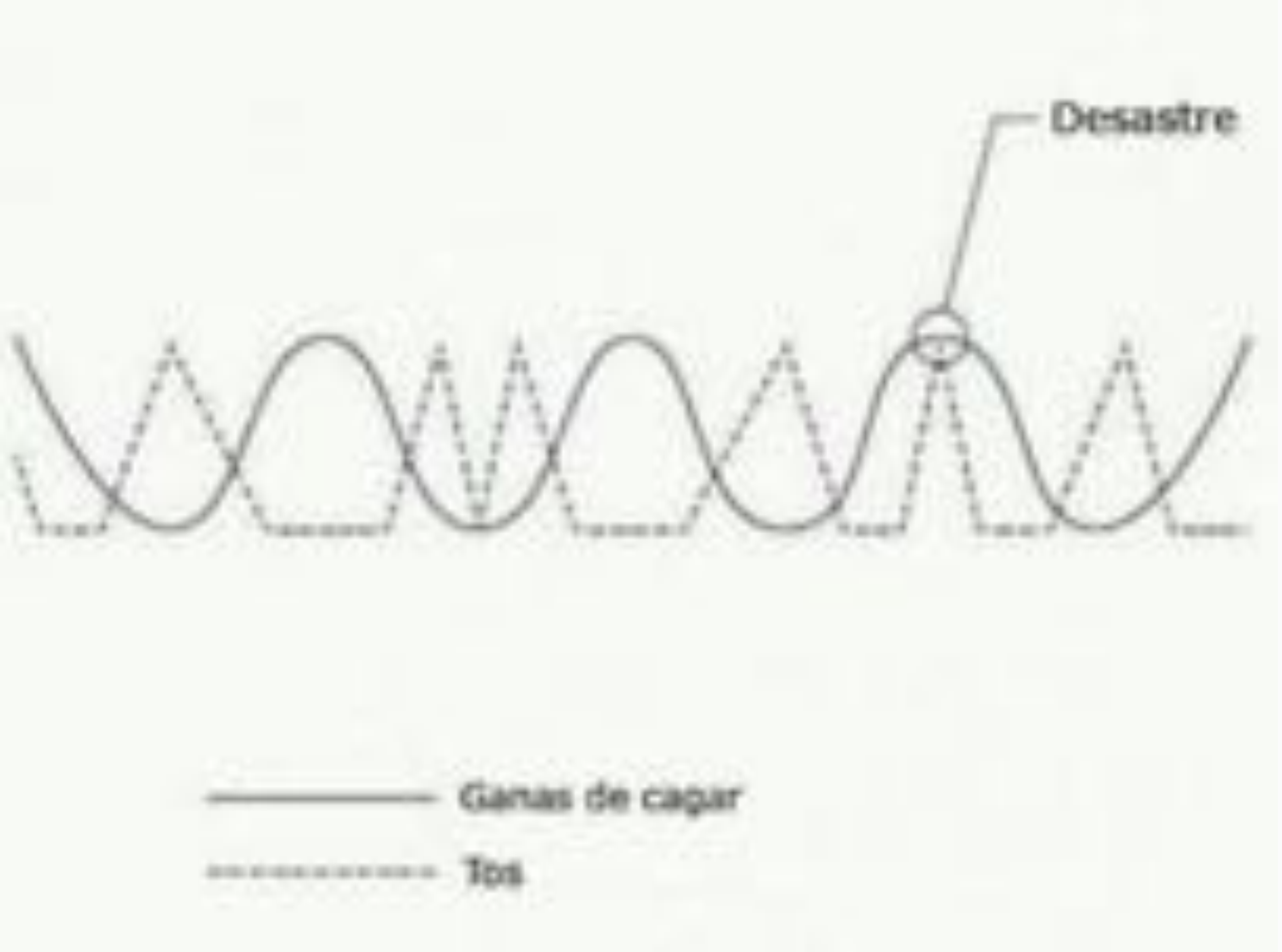
Problemas de funciones

14. El coste de producción de un modelo de batidora es $C(x)=x^2/4 +35x +25$ y el precio de venta $V(x)=50-(x/4)$ con x el número de unidades producidas. Escribe la función B(x) de beneficio total y halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

11. Chistes de límites



11. Chiste de funciones



11. Límites

El límite de la función f(x) en el punto x_0, es el valor al que se acercan las imágenes (las y) cuando los originales (las x) se acercan al valor x_0.

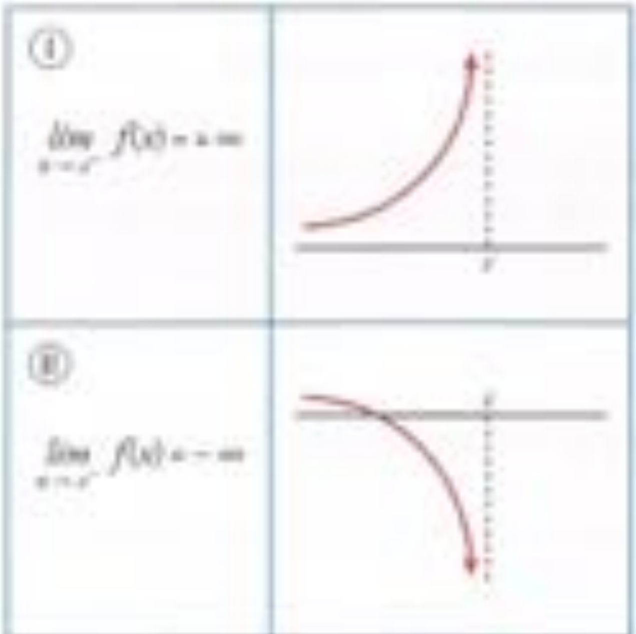
Límites
- Asíntotas
- Continuidad
- Derivadas

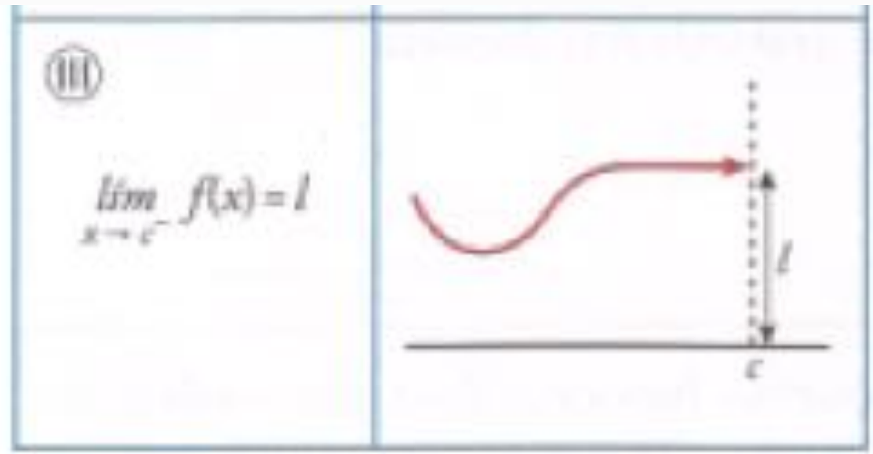
DEFINICIÓN FORMAL

Se dice que la función $f(x)$ tiene como límite el número L, cuando x tiende a x_0, si fijado un número real positivo ε, mayor que cero, existe un numero positivo δ dependiente de ε, tal que, para todos los valores de x distintos de x_0 que cumplen la condición $|x - x_0| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 /\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

11. Límites cuando x tiende a “c”





1 *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\text{sen } x}$ *con ayuda de la calculadora.*

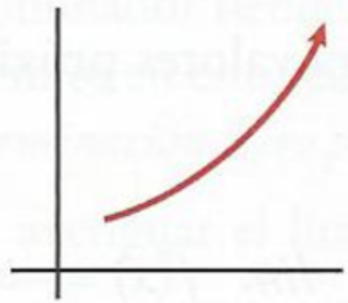
$x = 0{,}01 \quad \rightarrow$

$x = 0{,}001 \quad \rightarrow$

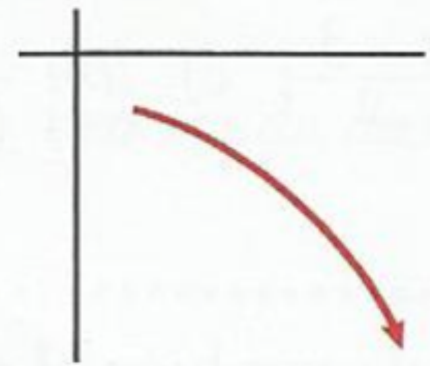
$x = -0{,}001 \quad \rightarrow$

11. Límites cuando x tiende a ∞

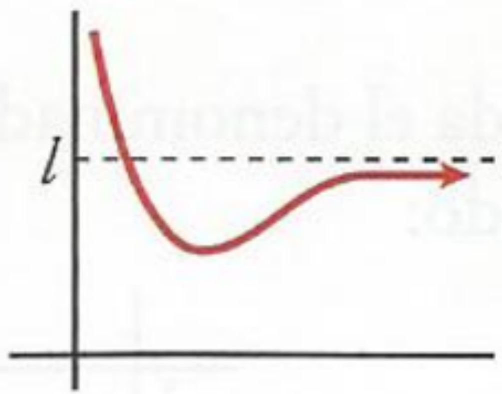
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

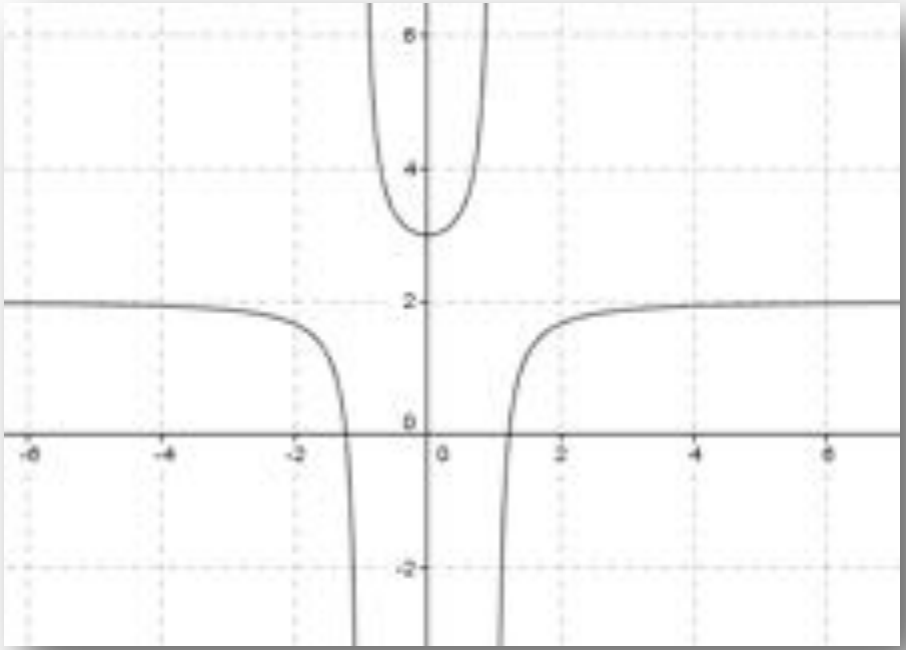


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



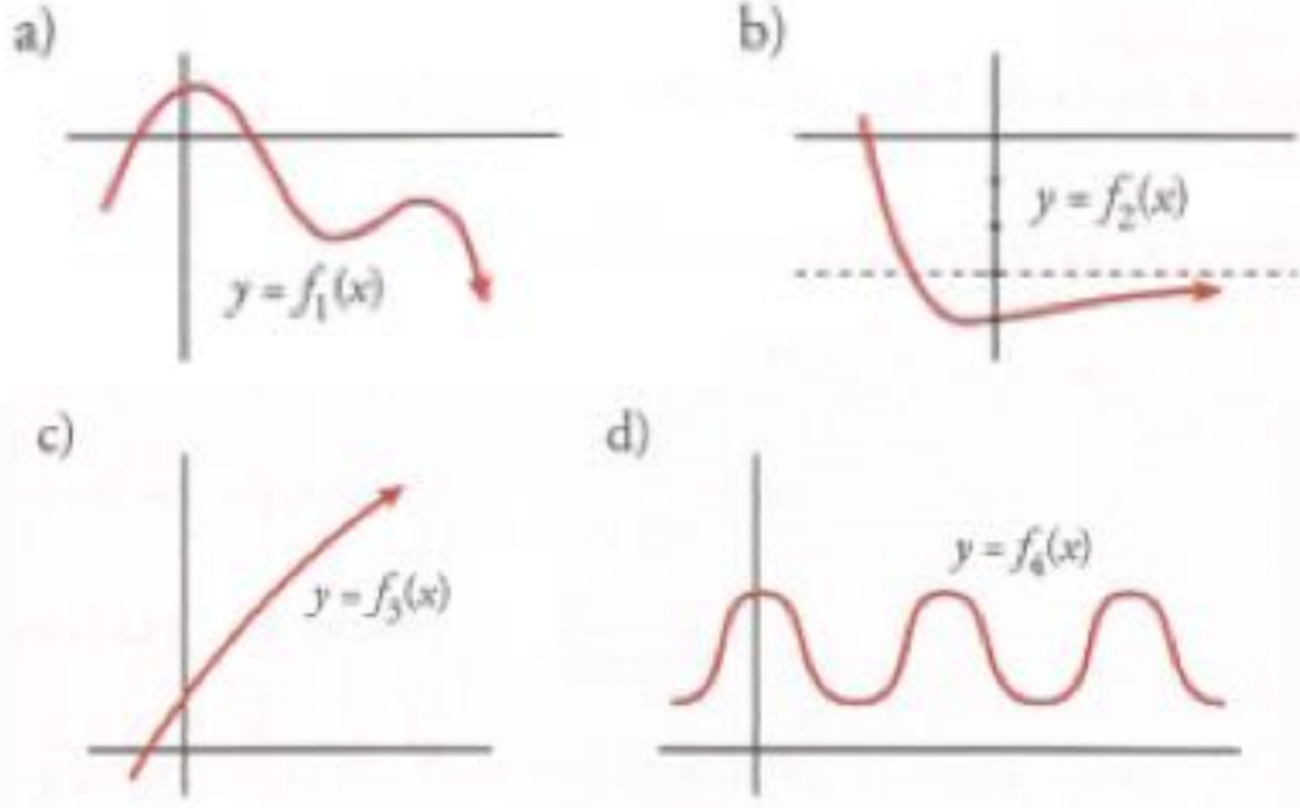
11. Límites

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 1}$$



11. Límites

Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones



11. Problemas de límites

15 Se ha realizado un estudio sobre el crecimiento del número de orugas en un bosque y se ha llegado a la conclusión de que el número de individuos viene dado por la función $f(x) = 500 \cdot 2^x$, donde x indica los años y f(x) el número de orugas.

a) ¿A qué cantidad se acerca el número de orugas si estamos próximos a los 3 años? ¿Y a los 5 años? .

b) Si no se pone ningún remedio, ¿qué ocurre con el número de orugas a largo plazo?.

11. Problemas de límites

16. Supongamos que tras realizar un estudio demográfico de una población albaceteña obtenemos que el número de habitantes viene dado por la función $f(x)=\dfrac{6400x+3000}{2x+2}$, donde x es el nº de años transcurridos.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?¿Y dentro de 2 años?

b) Suponiendo que la función es válida para todo el tiempo, ¿Crees que la población crecería indefinidamente o se estabilizaría en torno a un determinado número de habitantes?

11. Problemas de límites

17 Se ha comprobado en una empresa textil que los ingresos medidos en millones de euros vienen dados por la función I(x)= $\frac{5x}{x+4}$ y los gastos por la función G(x)= $\frac{3x+6}{x^2+2}$ con x el nº de años desde que se creó.

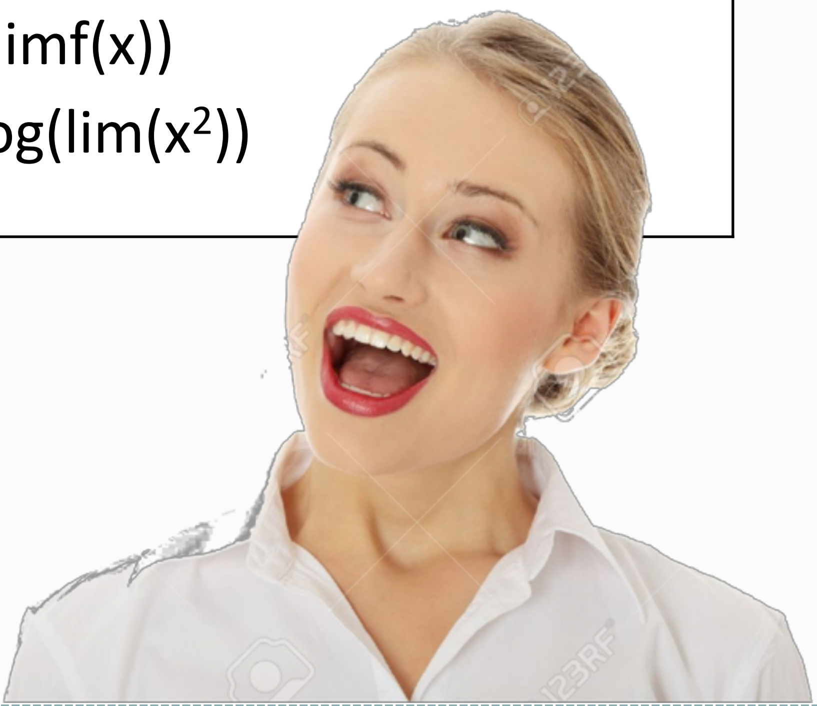
a) ¿Cuántos gastos tuvieron inicialmente al crear la empresa?

b)¿Qué ingresos y que gastos tuvieron el primer año?¿Y el segundo año?

c) El beneficio de la empresa será la diferencia entre ingresos y gastos. ¿Se puede decir que la empresa será rentable con el paso de los años?¿Tiende a estabilizarse el beneficio de la empresa?

11. Propiedades de los límites

$\lim f(x)+g(x)=\lim f(x)+\lim g(x)$	$\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$
$\lim f(x)/g(x)=\lim f(x)/\lim g(x)$	$\lim(n^{\underline{o}}\, f(x))=n^{\underline{o}}\lim f(x)$
$\lim g(f(x))=g(\lim f(x))$ Ej: $\lim \log(x^2)= \log(\lim(x^2))$	



11. Límites Laterales

Si los dos límites laterales no coinciden, se dice que **no existe** el $\lim_{x \to c} f(x)$.

Si $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l$, decimos que $\lim_{x \to c} f(x) = l$.

Análogamente, cuando los dos límites laterales son $+\infty$ o $-\infty$.

EJEMPLO:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x \leq 0 \\ 5x + 2 & si\ 0 < x < 1 \\ 7 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to -3} f(x) = ?$

$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

$\lim_{x \to 4} f(x) = ?$

11. Límites Laterales

Hoja Propuesta – Ejercicio 18 – Estudiar el límite en el punto que se pasa de un límite al otro.

$$\text{a) } f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\ge 0 \\ x+1 & \text{si } x<0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x<0 \\ x-1 & \text{si } x\ge 0 \end{cases} \quad \text{c) } f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } x\ge 0 \\ x+2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<1 \\ -3x-2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases} \quad \text{e) } f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } 0\le x<1 \\ 3-x & \text{si } x\ge 1 \end{cases} \quad \text{f) } f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-1 \\ 1 & \text{si } -1<x<0 \\ x^2-2 & \text{si } x>0 \end{cases} \quad \text{h) } f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<2 \\ -x^2+4x-2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases} \quad \text{i) } f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x>1 \\ -2x+1 & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

11. Límites Laterales

Hoja Propuesta – Ejercicios 19, 20, 21

19. Expresa la función $f(x)=|x^2-1|$ como una función a trozos y calcula su límite cuando x tiende a 1 y -1.

20. Calcula el límite de $f(x)=\frac{x-2}{|x-1|}$ cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

21. Calcula los valores de "a" y "b" para que exista el $\lim_{x\to -2} f(x)$ y exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si\ x\leq -2 \\ x-5 & si -2<x<1 \\ bx & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

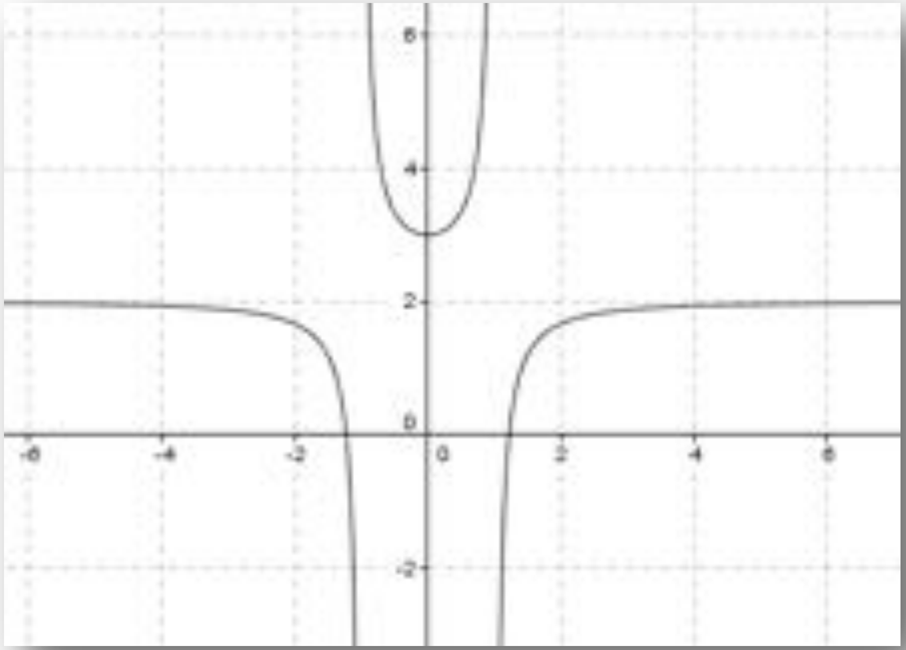
11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \neq \infty$$

Cuando ocurre esto se dice que hay una asíntota horizontal

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 1}$$



11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

Si f(x)= $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

con P y Q polinomios

(1) Si Grado P > Grado Q → Tiende a $\pm\infty$. Para saber el signo sustituir por un número grande para ver el signo.

(2) Si Grado P < Grado Q → Tiende a 0.

(3) Si Grado P = Grado Q → Tiende al cociente de los números que acompañan a los monomios de mayor grado.

Hoja Propuesta – Ejercicios 8, 9, 10

22) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}$

23) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^2-6x}$

24) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-x^2}{x^5+1}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

Hoja Propuesta – Ejercicios 25 a 29

22) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}$

23) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^2-6x}$

24) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-x^2}{x^5+1}$

25) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2-2x+1\right)$

26) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}\right)$

27) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x^2-4x+4}}$

28) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^5+x^2}{2x^2-1}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

Si f(x)= $\dfrac{g(x)}{h(x)}$,

con g y h funciones

- Si g(x) crece más rápido que h(x) tiende a ∞ y si es al revés tiende a 0.

-Orden de algunas funciones:

$$\log(x) \approx \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \approx x \approx x^2 \approx x^5 \approx 2^x \approx 7^x$$

Hoja Propuesta – Ejercicios 30, 31, 32, 33

30) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\log(x)}$ 31) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$ 32) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(x)}{2^x}$ 33) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^x}{3e^x-1}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

(Indeterminación ∞ -∞)

-Resolver la expresión si se puede (Ej: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x+3} - 2x$)

-Si es la diferencia de dos funciones, dependerá del orden de cada una.

-Si hay raices y los grados son los mismos multiplicar por el conjugado numerador y denominador (Ej: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$).

Hoja Propuesta

Indeterminación ∞-∞

34) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x+3} - 2x$

35) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x+1} - 2x^2$

36) $\lim_{x\to\infty} 2^x - x^2$

37) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$

38) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$

39) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$

40) $\lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt{x^2 - 2x}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

(Indeterminación a^∞ , a≠ 1)

-Si a>1 tiende a ∞ y si 0<a<1 tiende a 0.

Hoja Propuesta

a^∞, con a $\neq 1$			
41) $\lim_{x\to\infty} 2^x$	42) $\lim_{x\to\infty} (\frac{2}{3})^x$	43) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{x^2}$	44) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{5^x}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

(Indeterminación 1^∞)

Dos opciones: 1) Utilizar $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) Fórmula $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$

Hoja Propuesta

45) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x^2}$ 46) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{x-5}$ 47) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$ 48) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{X+2}\right)^{\frac{1}{X-1}}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$ **(Indeterminación 0/0)**

Resolver para convertirlo en otro tipo de indeterminación.

Hoja Propuesta

49) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x+1}}$$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

Hoja Propuesta

50) $\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+x\right)$ 51) $\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^2+x\right)$ 52) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2}$

53) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{x^2}$ 54) $\lim_{x\to-\infty} x\cdot 2^x$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to a$

Hoja Propuesta

55) $\lim\limits_{x \to 1}\left(3x^2 - 6x + 1\right)$

56) $\lim\limits_{x \to 5}\left(\sqrt[3]{x^2 + 2} - x\right)$

57) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to a$

(Caso k/0)

$\dfrac{k}{0}$, con $k \neq 0$

-Hay que estudiar los límites laterales para ver si salen + ó – infinito.

Izq→ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$; Dcha→ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

-Hay una asíntota vertical en x=a.

Hoja Propuesta

Caso $\frac{k}{0}$ - Estudiar los límites laterales

58) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x-3}$ 59) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x+3}{2x-6}$ 60) $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x+4}{x^2-1}$ 61) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x+3}{x^2-4}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to a$

(Indeterminación 0/0)

-Descomponer numerador y denominador para simplificar.

-Si aparecen raíces, multiplicar arriba y abajo por el conjugado.

Hoja Propuesta

Indeterminación $\frac{0}{0}$

62) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

63) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2}$

64) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$

65) $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

66) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

67) $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x+3} - 1}$

11. Límites - Cálculos

LÍMITES CUANDO $x \to a$

(Indeterminación ∞ -∞)

Operar con la función para cambiar de indeterminación.

Hoja Propuesta

Indeterminación ∞-∞

68) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2}{x-3} - \frac{x}{x^2-9}$

69) $\lim_{x\to 2} \frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x-2}$

12. Asíntotas o ramas infinitas

Asíntotas Verticales

$$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$$

Indeterminación del tipo (número/0)

Los candidatos a asíntota vertical se sacan de los puntos que no están en el dominio. Hay que estudiar los límites laterales para ver hacia donde tiende el límite a cada lado.

Estudiar asíntotas verticales de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

12. Asíntotas o ramas infinitas

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$$

ó

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

$$y = k$$

Estudiar asíntotas horizontales de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-1}$$

12. Asíntotas o ramas infinitas

Asíntotas Oblicuas

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

Estudiar las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$$

12. Asíntotas o ramas infinitas

Asíntotas Oblicuas – Caso particular de cocientes de dos polinomios

Si *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 1$, efectuamos el cociente indicado:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & ax+b \end{array} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

La recta $y = ax + b$ es asíntota para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

Por ejemplo, $y = \dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$. La recta $y = x + 1$ es asíntota.

12. Asíntotas o ramas infinitas

Ramas Parabólicas

Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y la curva no tiene asíntota oblicua, entonces presenta una **rama parabólica.**

Hay dos tipos de ramas parabólicas:

TIPO 1. Crecimiento cada vez más rápido

La curva crece, o decrece, cada vez más deprisa. De este tipo son las ramas parabólicas de las funciones **polinómicas** y de las **exponenciales.**

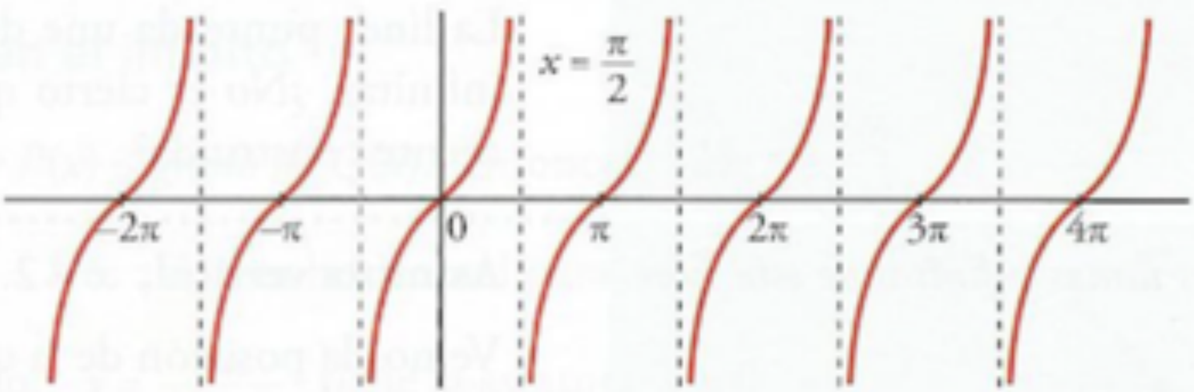
TIPO 2. Crecimiento cada vez más lento

La curva crece, o decrece, cada vez más despacio. De este tipo son las funciones **radicales** y las **logarítmicas.**

12. Asíntotas en algunas funciones

Funciones trigonométricas

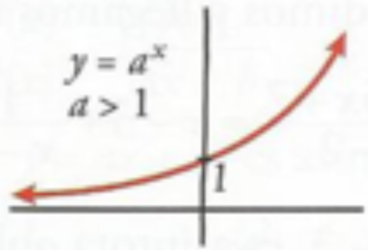
Las **funciones trigonométricas,** $y = sen\ x$, $y = cos\ x$, $y = tg\ x$, por ser periódicas, no tienen límite (ni finito ni infinito) cuando $x \to +\infty$ ni cuando $x \to -\infty$. Por tanto, carecen de ramas infinitas en $+\infty$ y en $-\infty$. Sin embargo, la función $y = tg\ x$ sí tiene infinitas asíntotas verticales:

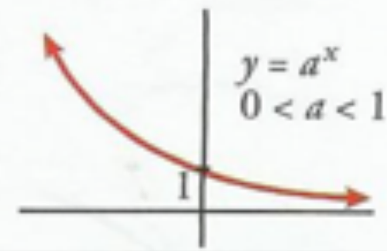


12. Asíntotas en algunas funciones

Funciones exponenciales

Las **funciones exponenciales** tienen una asíntota horizontal y una rama parabólica "de crecimiento cada vez más rápido".





12. Asíntotas en algunas funciones

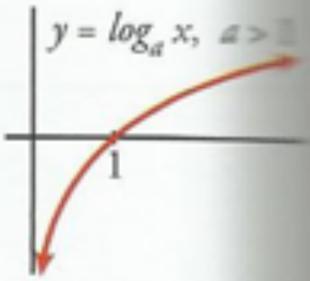
Funciones Logarítmicas

Funciones logarítmicas

Las **funciones logarítmicas,** $y = log_a\, x$, $a > 1$, solo están definidas en $(0, +\infty)$.

El eje Y es una asíntota vertical a la que la curva se aproxima por la derecha, pues $\lim\limits_{x \to 0^+} log_a\, x = -\infty$.

Cuando $x \to +\infty$ tiene una rama parabólica "de crecimiento cada vez más lento".



12. Asíntotas en algunas funciones

EJERCICIO PROPUESTO

1 ¿Verdadero o falso?

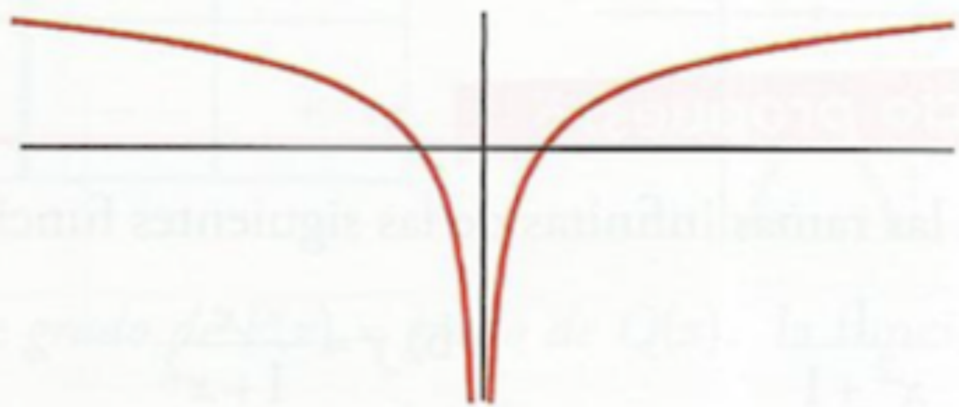
a) La función $y = |log_2 x|$ se representa así:

Tiene dos ramas infinitas: una asíntota vertical en $y = 0$ y una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.

12. Asíntotas en algunas funciones

EJERCICIO PROPUESTO

b) La función $y = log_2 |x|$ se representa así:



Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y sendas ramas parabólicas en $-\infty$ y en $+\infty$.

12. Asíntotas

Hoja Propuesta

70) Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3x}{1-x}$ b) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-1}$ c) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-9}$ d) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ e) $f(x) = \frac{x^2}{x+5}$

f) $f(x) = \frac{4x^2+1}{x^3-4x}$ g) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ h) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}$ i) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ j) $f(x) = x \cdot 3^x$

71) Determina el valor de "a" para que la función $f(x) = \frac{2x+5}{ax+8}$ tenga una asíntota vertical en x=4.

72) Determina el valor de "a" para que la función $f(x) = \frac{ax^2+2}{bx^2+ax+1}$ tenga una asíntota vertical en x=2 y una asíntota horizontal en y=1.

13. Continuidad

Se dice que una **función f(x) es continua en un punto x = a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. **Que el punto x= a tenga imagen.**

   - $\exists f(a)$

2. **Que exista el límite de la función en el punto x = a.**

   - $\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

3. **Que la imagen del punto coincida con el límite de la función en el punto.**

   - $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

13. Continuidad

Tipos de Discontinuidad

1. Discontinuidad evitable.
   1. No existe imagen.
   2. La imagen no coincide con el límite.
2. Discontinuidad inevitable o de primera especie.
   1. De salto finito.
   2. De salto infinito.
3. Discontinuidad esencial o de segunda especie.

No existe f(a) o es distinta del límite

No coinciden límites laterales

No existe algún límite lateral

13. Continuidad

Estudiar continuidad – Indicar el tipo de discontinuidad

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 2x & si \quad x>2 \\ 1 & si \quad x=2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 4 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 1 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq 2 \\ \dfrac{2}{x-2} & si \quad x>2 \end{cases}$$

$$f(x)=x^2 \quad si \quad x\leq 2$$

14. Derivadas

DEFINICIÓN DE DERIVADA:

Diremos que f(x) es derivable en x=a si existe el siguiente límite:

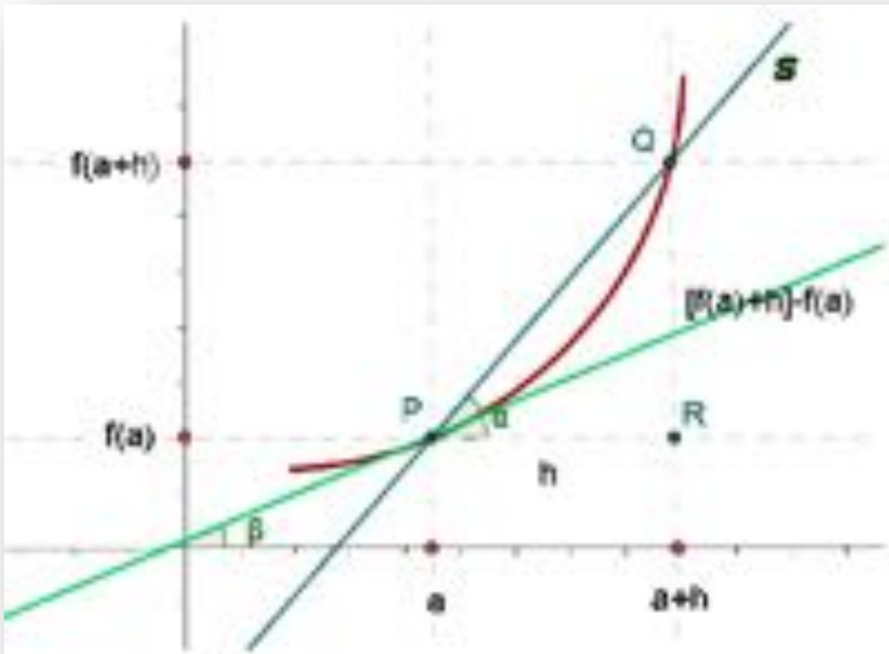
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLO: Dada la función f(x)=x^2, comprobar que f´(a)=2a.

14. Derivadas

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Cuando h tiende a 0, el punto Q tiende a confundirse con el P. Entonces la recta secante S tiende a ser la recta tangente a la función f(x) en P, y por tanto el ángulo α tiende a ser β.

La derivada de un función f(x) en un punto es la pendiente de la recta tangente a esa función en ese punto.

14. Derivadas

Condición de derivabilidad: Para que una función sea derivable en un punto x=a tiene que existir el límite en dicho punto, es decir, existir el límite por la izquierda y por la dcha.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Nota: Si es derivable es siempre continua (por tanto, si no es continua no hace falta estudiar la derivabilidad). Ahora existen funciones continuas que no tienen porque ser derivables.

Estudiar continuidad y derivabilidad

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0 \\ x & si\ x > 0 \end{cases}$$

14. Derivadas

CRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Crecimiento -> Estudiar f'(x)>=0 (hacer una tabla para estudiar el signo)

Candidatos máximos y mínimos f´(x)=0

CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Curvatura -> Estudiar f´´(x)>=0 (hacer una tabla para estudiar el signo)

Candidatos puntos de inflexión f´´(x)=0

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

15. Estudio general de una función

1. Dominio – Dom(f) / Recorrido – Rec(f)
2. Puntos de Corte
3. Simetrías
4. Continuidad
5. Asíntotas
6. Crecimiento. Extremos relativos
7. Curvatura. Puntos de Inflexión
8. Tabla de valores y representación.

15.1. Puntos de corte

x=0 -> Despejar y

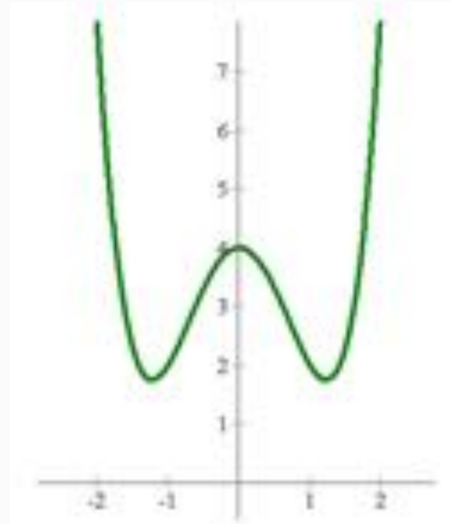
y=0 -> Despejar x

15.2. Simetría

Función Par $f(x)=f(-x)$

Simétrica respecto a eje OY

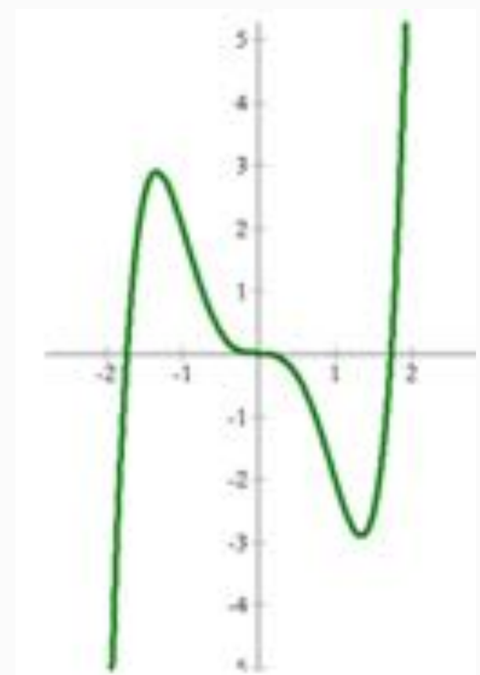
$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$



Función Impar $-f(x)=f(-x)$

Simétrica respecto al origen

$$f(x) = x^5 - 3x^3$$



PRUEBAS PAEG

CURSO 2011/12 – JUNIO - PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ tiene pendiente -3
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1, 2)$.

(2,5 puntos)

PRUEBAS PAEG

CURSO 2011/12 – JUNIO -PROPUESTA B

1B. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración? **(1,25 puntos)**

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito? **(1,25 puntos)**

PRUEBAS PAEG

CURSO 2011/12 – SEPTIEMBRE -PROPUESTA B

1B. Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{2x + 6},$$

calcula los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 0$. **(2,5 puntos)**

PRUEBAS PAEG

CURSO 2010/11 – JUNIO - PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2 + 3x + 4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblícuas de $f(x)$. (1,25 puntos)

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x)$. (1,25 puntos)

PRUEBAS PAEG

CURSO 2009/10 – JUNIO - PROPUESTA B

1B. La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0, 3]$ se alcanza la velocidad máxima? (1,25 puntos)

b) Calcula $\lim_{t\to\infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido. (1,25 puntos)

PRUEBAS PAEG

CURSO 2009/10 – SEPTIEMBRE - PROPUESTA A

1A. a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + sen\, x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$

para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$, y además sea continua y derivable en $x = 1$. (2 puntos)

2A. a) Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$. (1 punto)

b) Calcula la integral definida: $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\, dx$. (1,5 puntos)

PRUEBAS PAEG

CURSO 2009/10 – SEPTIEMBRE - PROPUESTA B

1B. Dada la función definida por $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$, se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante. (0,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba ($\cup$) y cóncava hacia abajo ($\cap$). (2 puntos)

PRUEBAS PAEG

CURSO 2008/09 – SEPTIEMBRE - PROPUESTA B

B. Se sabe que la recta $y = 9$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{ax^2 - 4}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro tiene asíntotas verticales u oblicuas.

B. a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$