ACTIVIDADES PARA EL AULA II

- CON CALCULADORA CIENTÍFICA -

CASIO
División Educativa

Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas

ACTIVIDADES PARA EL AULA II
- CON CALCULADORA CIENTÍFICA -

CASIO
División Educativa

Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas

ACTIVIDADES PARA EL AULA II CON CALCULADORA CIENTÍFICA

ISBN Versión Impresa: 978-84-948824-1-8

ISBN Versión Digital: 978-84-948824-2-5

Depósito legal: M-21790-2019

AUTORES

Lluís Bonet Juan
José María Chacón Íñigo
José Manuel Fernández Rodríguez
Claudia Lázaro del Pozo
Encarnación López Fernández
María Teresa Navarro Moncho
María Cristina Naya Riveiro
Ricard Peiró i Estruch
Rafael Pérez Laserna
María Jesús Ruiz Maestro
María Ángeles Rodríguez Burgui
Teresa Valdecantos Dema
Daniel Vila Martínez

EDITADO POR:

CASIO ESPAÑA División Educativa
C/ Josep Pla, 2 Torre B2 Planta 12
08019 Barcelona
info-calculadoras@casio.es
www.edu-casio.es

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
C/ Hermanos Carvajal, 5
23740 Andújar, Jaén
fespm@fespm.es
www.fespm.es

COMITÉ EDITORIAL:
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
María Teresa Navarro Moncho
Onofre Monzó del Olmo
Daniel Vila Martínez
Elena Virseda Marín

DISEÑO Y MAQUETACIÓN:
Finder & Wilber
www.finderandwilber.com

A Jordi Baldrich,
precursor de este grupo de docentes
a los que apasiona la calculadora

Desde la división educativa de CASIO nos complace presentar el segundo libro de actividades para el aula con calculadora científica. Un libro que recoge actividades sobre los temas de funciones y probabilidad presentes en el currículum, y que están resueltos paso a paso, con la calculadora como recurso didáctico.

Nos satisface compartir y poder transmitir, la buena acogida que ha tenido entre el profesorado el primer libro sobre los temas de aritmética, álgebra y estadística. Gracias a él, muchos docentes han comprobado en sus clases como la calculadora ayuda en el proceso de aprendizaje, haciendo que sus alumnos trabajen más sobre los conceptos, sin detenerse en el cálculo.

La incorporación de un recurso didáctico en el aula, como la calculadora, siempre supone un esfuerzo. Por un lado, hay que aprender bien su funcionamiento y por otro, hay que tener el material adecuado para trabajar con los alumnos en clase. Con este libro se quiere ayudar al profesor en este proceso, dotándole de un conjunto de problemas contextualizados que han sido previamente llevados al aula por sus autores.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) siempre ha apoyado y fomentado el uso de la calculadora científica y gráfica en el aula, por este motivo, existe una estrecha y activa colaboración con la División Educativa de CASIO. Gracias a la Federación, estamos presentes en olimpiadas matemáticas, seminarios y congresos, lo que hace posible, cada vez más, la inclusión de la calculadora en todas las etapas educativas, desde primaria hasta bachillerato.

Desde CASIO, queremos agradecer a todos los autores su implicación en este proyecto. Gracias a su dedicación, tiempo y experiencia, han hecho posible la realización de este segundo libro. La participación del comité editorial y su labor en todas las fases, ha sido imprescindible para la finalización del mismo. Gracias a todos.

Esperamos que con ambos libros, que sin lugar a duda, son un material complementario para las clases de matemáticas, el profesorado descubra y saque el máximo partido a la calculadora científica. Por último, queremos agradecer a la FESPM su constante compromiso para que esta herramienta, como ocurre en países vecinos, se convierta en un recurso habitual en el aula.

Elena Virseda Marín
Coordinadora División Educativa CASIO ESPAÑA

Esta vez presentamos la segunda entrega de actividades que al igual que la anterior tienen por objeto dotar al profesorado de herramientas para desarrollar, con las mejores garantías, la implementación del currículo de Matemáticas en sus aulas.

Desde la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) pensábamos que a estas alturas del siglo XXI el debate sobre el uso de las calculadoras en las clases de matemáticas estaría superado y nos ocuparíamos de los nuevos retos que nos ofrecen las tecnologías de la información (redes sociales, aplicaciones para móviles, tabletas…). Pero aunque la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha mostrado que el uso de tecnología, calculadoras en particular, favorece el aprendizaje de ciertos procesos y conceptos y ayuda a superar algunos obstáculos, estas innovaciones no se ven reflejadas en el día a día de la mayoría de aulas y no se encuentran entre las que se presentan en los libros de texto habituales.

Por eso la FESPM ha decidido continuar manteniendo abierto el debate y procurando proporcionar al profesorado de matemáticas, que lo desee, un abanico de posibilidades para abordar el extenso currículum de matemáticas de la ESO integrando el uso de la calculadora científica. Este trabajo no habría sido posible sin el esfuerzo del *Grupo de Trabajo sobre diseño e implementación de experiencias didácticas con calculadora* que es el que ha diseñado y seleccionado las actividades que aquí se presentan.

Esta publicación no sería posible sin la inestimable ayuda de CASIO División Educativa que apoya las actividades que le propone FESPM.

Como ya reconocíamos en la primera entrega de esta serie: como cualquier propuesta didáctica, esta no tiene sentido si no es asumida por el profesorado y llevada al aula, así que animamos, al profesorado de Matemáticas, a probar alguna de las actividades que contiene este libro y descubrir el abanico de posibilidades que proporciona un recurso como la calculadora con su uso cotidiano.

Onofre Monzó del Olmo
Presidente de FESPM

Así es este libro

Este libro está compuesto por numerosas actividades concebidas para llevar al aula de manera que el alumnado trabaje y explore de forma práctica y autónoma múltiples conceptos matemáticos haciendo uso de la calculadora científica. Las actividades se desarrollan a partir de problemas contextualizados basados en supuestos reales y han sido probadas en el aula por sus respectivos autores.

La primera página de cada actividad se dirige al alumno; en ella se expone el problema y se plantea una serie de cuestiones. Las siguientes páginas se dirigen al profesorado y contienen orientaciones didácticas y técnicas, así como un ejemplo de solución. Se incluyen también propuestas de problemas de resolución rápida y otras actividades sugeridas.

A continuación se muestran los elementos que componen cada actividad.

Título y clasificación de la actividad

Bloque curricular

En este libro se plantean actividades en las que se trabajan tres grandes bloques curriculares: Aritmética, Álgebra y Estadística.

FUNCIONES

25 | Función potencial

Tercera Ley de Kepler

Enunciado del problema

Propuesta contextualizada basada en supuestos cotidianos.

En la siguiente tabla se relaciona la distancia media entre el Sol y cada uno de los planetas con el periodo orbital (tiempo que tarda en efectuar una vuelta completa cada planeta alrededor del Sol).

1UA (unidad astronómica) es igual a la distancia media del Sol a la Tierra.

1 año es el periodo orbital de la Tierra.

Planeta	Distancia media Sol-Planeta (UA)	Periodo orbital (años)
Mercurio	0,387	0,24
Venus	0,7239	0,62
Tierra	1	1
Marte	1,524	1,88
Júpiter	5,203	11,86
Saturno	9,537	29,45
Urano	19,191	
Neptuno		164,79

Cuestiones

Cuestiones relacionadas con el enunciado del problema. Los cálculos que permiten dar respuestas a estas cuestiones requieren, en ocasiones, hacer uso de una hoja aparte.

1 Dibuja una gráfica que represente el periodo orbital en función de la distancia media.

2 Sabiendo que la relación entre la distancia media x, y el periodo orbital T es potencial, es decir, $T = a \cdot x^b$, determina la expresión de la función.

Tercera Ley de Kepler del movimiento de los planetas.

Para cualquier planeta, el cuadrado del periodo orbital (T) o tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol, es directamente proporcional al cubo de la distancia media al Sol (R).

$$T^2 = k \cdot R^3,\ k \approx 1\frac{\text{años}^2}{\text{UA}^3}.$$

3 Rellena los datos que faltan en la tabla.

Página dirigida al alumnado

Así es este libro

DESCÁRGATE EL LIBRO EN:

www.edu-casio.es

www.fespm.es

Materiales

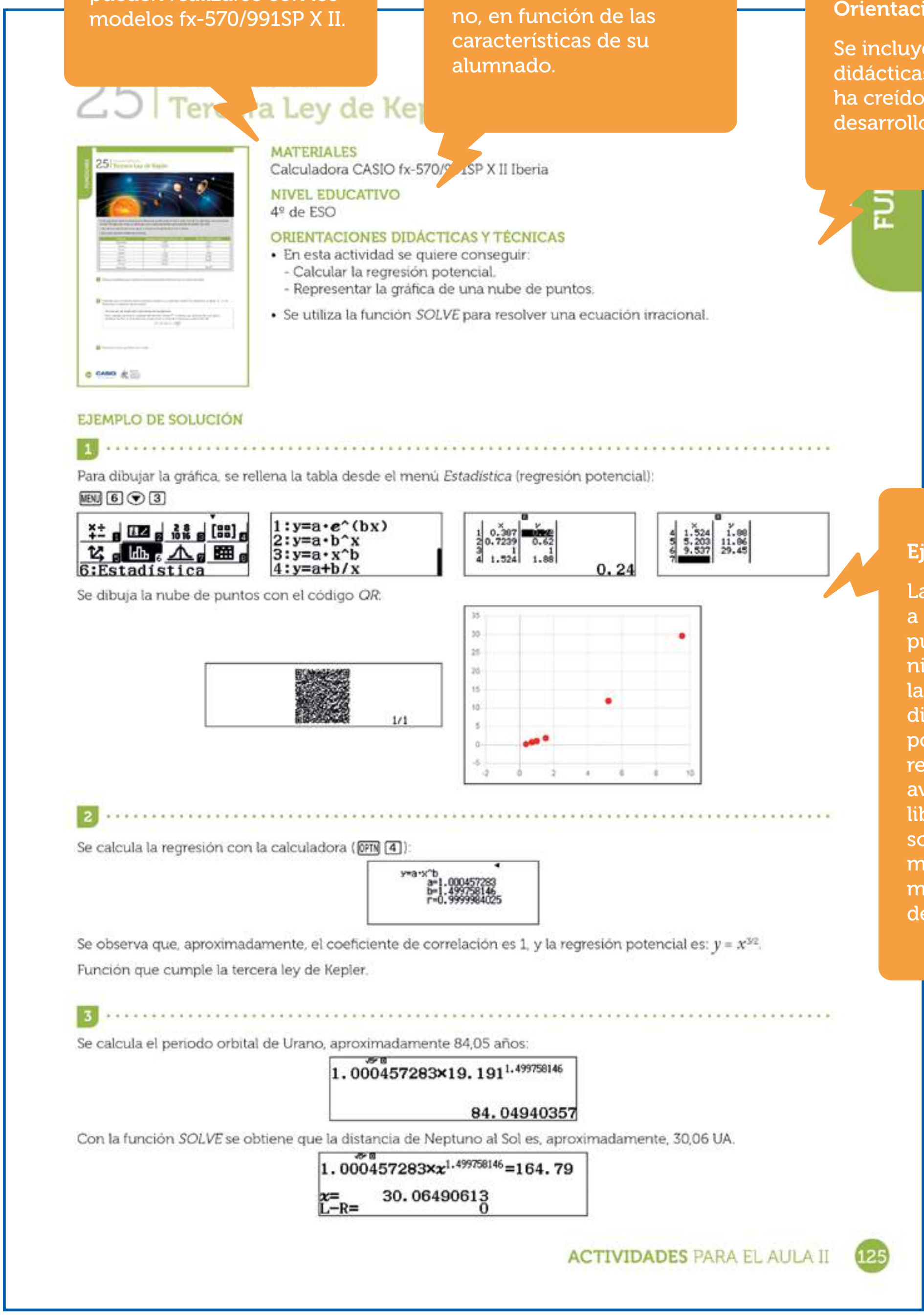
Se especifican los materiales que son necesarios para realizar la actividad. En concreto, se especifica el modelo de calculadora cuyo uso se recomienda. Siempre que sea posible se hará uso de los modelos fx-82/85/350 SP X II, entendiéndose que todas las actividades pueden realizarse con los modelos fx-570/991SP X II.

Nivel educativo

Propuesta del nivel educativo al que va dirigida la actividad. Se trata de una simple sugerencia que el docente puede tomar en consideración o no, en función de las características de su alumnado.

Orientaciones didácticas y técnicas

Se incluyen algunas orientaciones didácticas y técnicas que se ha creído conveniente para el desarrollo de la actividad.



25 | Tercera Ley de Kepler

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Calcular la regresión potencial.
  - Representar la gráfica de una nube de puntos.
- Se utiliza la función *SOLVE* para resolver una ecuación irracional.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Para dibujar la gráfica, se rellena la tabla desde el menú *Estadística* (regresión potencial):

Se dibuja la nube de puntos con el código *QR*.

2

Se calcula la regresión con la calculadora (OPTN 4):

Se observa que, aproximadamente, el coeficiente de correlación es 1, y la regresión potencial es: $y = x^{3/2}$.

Función que cumple la tercera ley de Kepler.

3

Se calcula el periodo orbital de Urano, aproximadamente 84,05 años:

Con la función *SOLVE* se obtiene que la distancia de Neptuno al Sol es, aproximadamente, 30,06 UA.

ACTIVIDADES PARA EL AULA II 125

Ejemplo de solución

La solución propuesta responde a una posible respuesta que pueda ofrecer un alumno del nivel educativo al que se dirige la actividad. Existen, obviamente, diferentes métodos de resolución posibles, algunos de los cuales requieren un conocimiento avanzado de la calculadora. En este libro se ha optado por escoger las soluciones que se han considerado más didácticas, mostrando el máximo número de funcionalidades de la calculadora.

Página dirigida al profesorado

Índice

ACTIVIDADES DE **FUNCIONES**

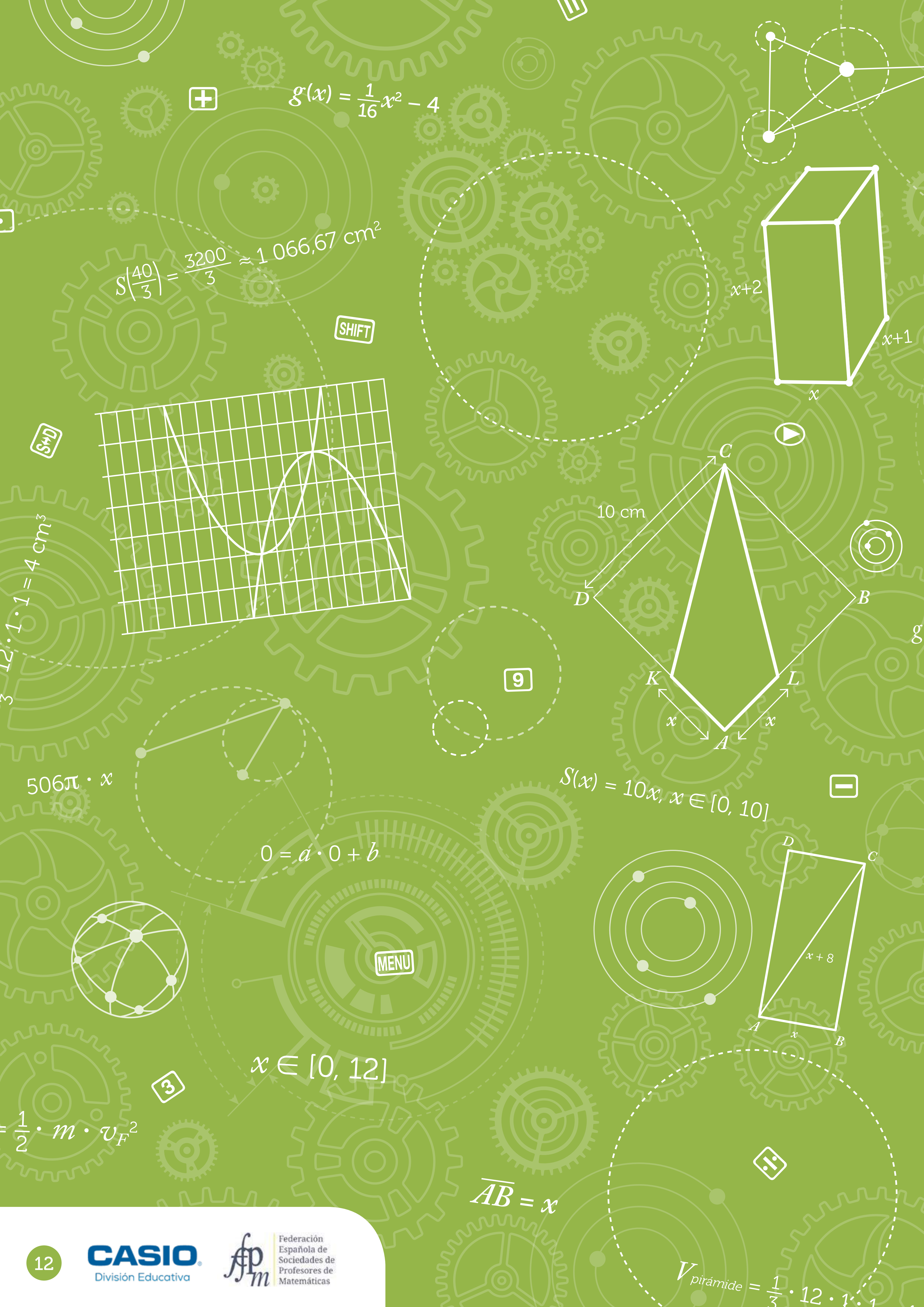
Índice

Índice

ACTIVIDADES DE **PROBABILIDAD**

Índice

ANEXO



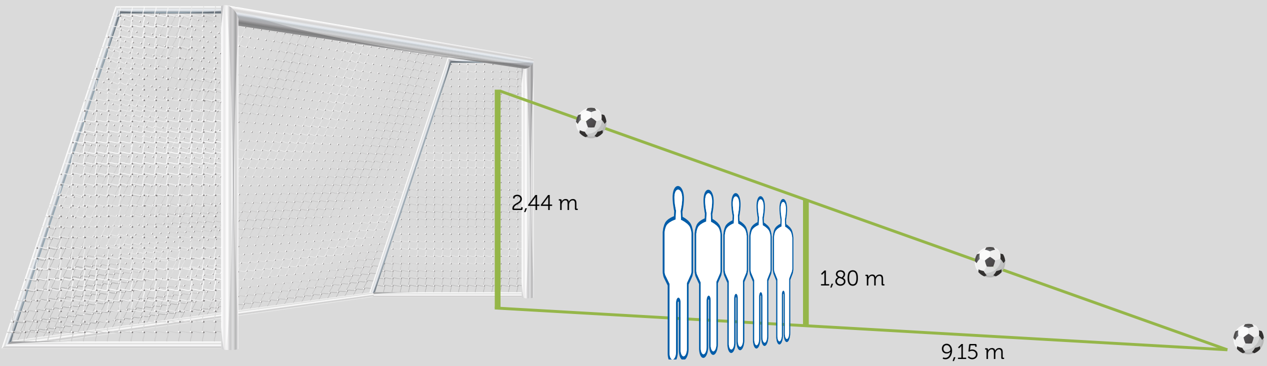
g(x) = 1/16 x² − 4
S(40/3) = 3200/3 ≈ 1 066,67 cm²
SHIFT
S⇔D
12 · 1 · 1 = 4 cm³
x+2
x+1
x
C
10 cm
D
B
K
L
A
9
506π · x
S(x) = 10x, x ∈ [0, 10]
0 = a · 0 + b
MENU
D
C
x + 8
A
B
x ∈ [0, 12]
3
1/2 · m · v_F²
AB = x
V_pirámide = 1/3 · 12 · 1 · 1

ACTIVIDADES DE **FUNCIONES**

01 | Función lineal y función afín. Teorema de Tales
Chut rectilíneo directo a gol

Queremos realizar un lanzamiento directo a gol, mediante un chut rectilíneo. Las condiciones que debes conocer son las siguientes:

- La barrera, situada a 9,15 m del balón, estimaremos que tiene una altura máxima de 1,80 m.
- La portería de fútbol, tiene una altura de 2,44 m.
- Las dimensiones del área grande son 40,32 m x 16,50 m.



1 ¿Desde qué distancia se podrá marcar gol con este tipo de lanzamiento?

2 ¿Cuál será la trayectoria rectilínea del lanzamiento con el que se marca gol?

3 Realiza variaciones en la pendiente de la trayectoria rectilínea del lanzamiento y justifica por qué no se marcará gol.

01 | Función lineal y función afín. Teorema de Tales
Chut rectilíneo directo a gol

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO
2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

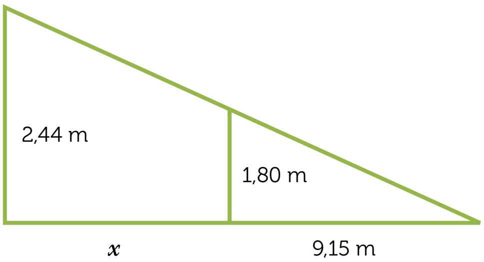
- Con esta actividad se quiere conseguir:
  - Trabajar el teorema de Tales.
  - Transformar el enunciado de un problema al lenguaje algebraico.
  - Construir funciones lineales y determinar sus propiedades.
  - Analizar tablas de valores y sus gráficas.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a http://wes.casio.com/es-es/class.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Como se observa en la imagen del planteamiento del problema, se tiene una situación que puede resolverse aplicando el teorema de Tales:

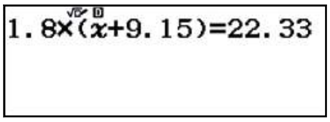


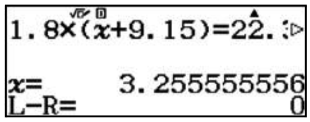
$$\frac{2{,}44}{1{,}80} = \frac{x+9{,}15}{9{,}15} \rightarrow 1{,}80 \cdot (x+9{,}15) = 2{,}44 \cdot 9{,}15$$

$$1{,}80x + 16{,}47 = 22{,}33 \rightarrow 1{,}80x = 5{,}86$$

$$x = \frac{5{,}86}{1{,}80} = 3{,}26$$

1 . 8 × (x + 9 .
1 5) ALPHA CALC 2 2 . 3 3   SHIFT CALC =





No se puede lanzar desde más allá de los 3,26 + 9,15 = 12,41 m para garantizar que el chut rectilíneo a portería va a ser gol.

Es fácil identificar que se trata siempre de lanzamientos desde dentro del área, ya que 12,41 < 16,50 m (lado del rectángulo que determina el área grande) y que por lo tanto serán lanzamientos libres indirectos, según las normas del fútbol (una falta dentro del área de otras características sería directamente un penalti).

2

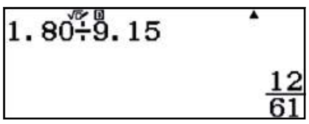
La expresión general de la función que describe el lanzamiento es $f(x) = ax + b$.

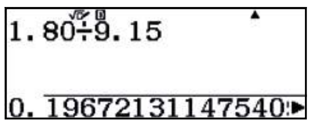
Se fija el balón en el origen de coordenadas $O(0,0)$ para ejecutar el lanzamiento.

El balón debe pasar por encima de la barrera, lo cual determina el punto $A(9{,}15,\ 1{,}80)$.

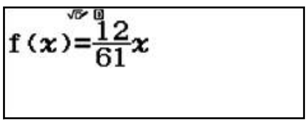
Con esta información se determina la función que indica la altura del balón en función de la distancia desde la posición inicial del lanzamiento:

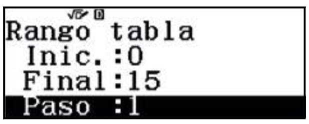
$$\left.\begin{array}{l} 0 = a \cdot 0 + b \\ 1{,}80 = a \cdot 9{,}15 + b \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} b = 0 \\ a = \frac{1{,}80}{9{,}15} \approx 0{,}1967 \end{array} \rightarrow f(x) = 0{,}1967x$$





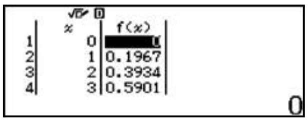
Se pasa al menú *Tabla* (MENU 9), se introduce la función y se observan los diferentes valores en la tabla:



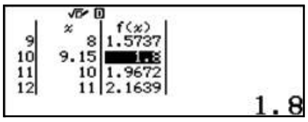


01 | Función lineal y función afín. Teorema de Tales
Chut rectilíneo directo a gol

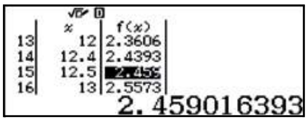
Balón inicialmente en el (0,0):



Se escribe sobre la tabla el valor 9,15 y se obtiene la altura del balón en esa posición viéndose que pasa justo por encima de la barrera:



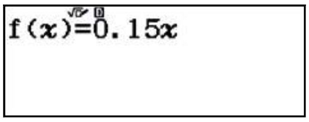
Se observa como más allá de los 12,5 m la altura del balón supera los 2,44 m, que es la altura de la portería:

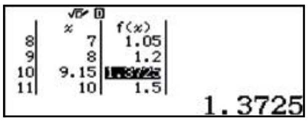


3

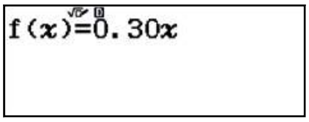
El valor de la pendiente determina la inclinación de la recta.

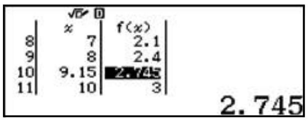
Si se da un valor más pequeño a la pendiente, por ejemplo $f(x) = 0{,}15x$, se observa como el balón va a chocar contra la barrera al estar su altura por debajo de 1,80:

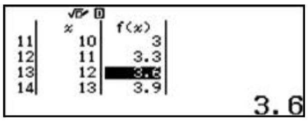




Por el contrario, si se le da un valor más grande a la pendiente, por ejemplo $f(x) = 0{,}30x$, se observa cómo el balón pasa por encima de la barrera, pero también se sale por encima del travesaño de la portería:

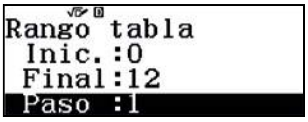


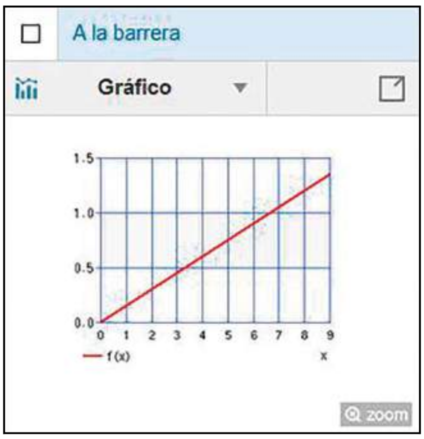


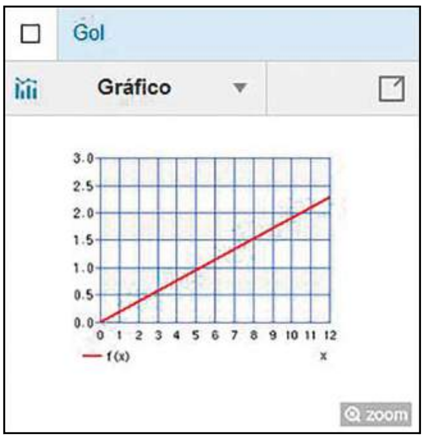


Se comparten cada una de las funciones con la aplicación CASIO EDU+ para visualizarlas todas a la vez, compararlas y debatir en grupo.

Para ello se ajusta el rango de la tabla no más allá de 12,5 m, ya que como se ha estudiado, los lanzamientos desde mayor distancia no acaban dentro de la portería:

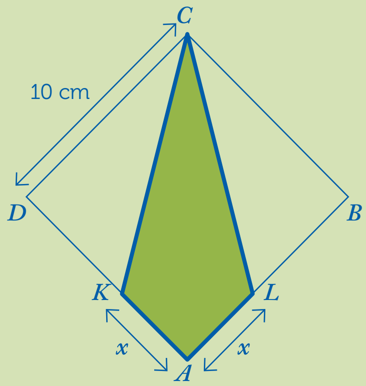






Problema

Área de una cometa inscrita en un cuadrado



En un papel cuadrado $ABCD$ de lado 10 cm, se sitúan los puntos K en el lado $\overline{AD}$ y L en el lado $\overline{AB}$ tales que $x = \overline{AK} = \overline{AL}$.

Doblando el papel se construye la cometa $AKCL$.

1. Calcula el área de la cometa para $x = 1$ cm.

2. Calcula los valores que puede tomar x.

3. Determina qué tipo de función es el área $S(x)$. Describe sus características y represéntala.

4. Si el área de la cometa es 25 cm², ¿qué valor tiene x?

5. Calcula los valores de x para los que el área de la cometa es mayor o igual que 25 cm².

1 **2**

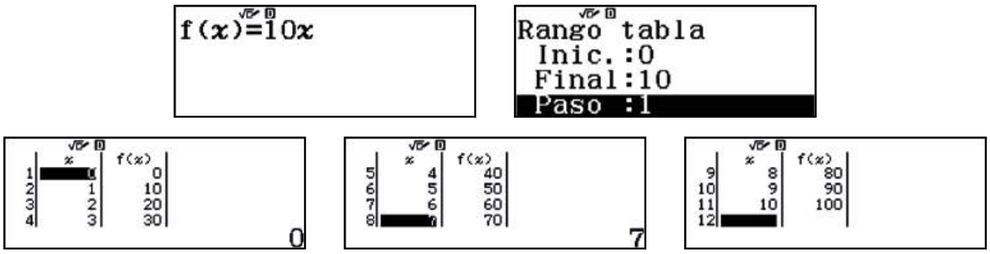
Si $x = 1$ cm, entonces $\overline{DK} = 9$ cm. El área del cometa $AKCL$ es igual al doble del área del triángulo $\widehat{AKC}$ que tiene de base $x = \overline{AK}$ y altura $\overline{DC} = 10$ cm:

$$S(1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 = 10 \text{ cm}^2$$

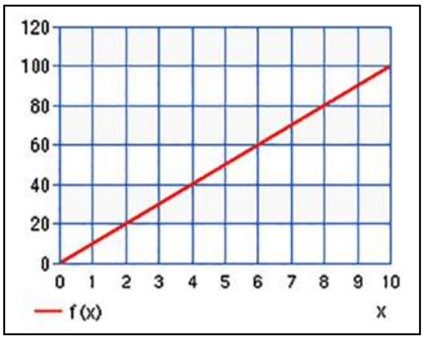
$$S(x) = 10x,\ x \in [0, 10]$$

3

La función es lineal, su representación es una recta creciente. Se realiza la tabla de valores de la gráfica utilizando la calculadora:



Para representar la función se utiliza el código *QR*:



4

Para calcular el valor de x tal que el área de la cometa sea 25 cm², se resuelve la ecuación $S(x) = 25$ cm²:

$$10x = 25$$

Se tiene que $x = \frac{25}{10} = 2{,}5$ cm.

5

Como la función es creciente, el área de la cometa es mayor o igual que 25 cm² cuando $x \in [2{,}5,\ 10]$.

02 | Función afín
¿Existe Rapunzel?

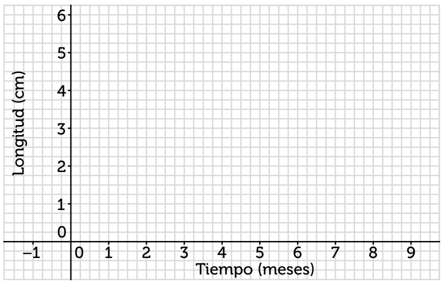
"*Asha Mandela es récord Guinness desde 2009, su cabello con 17 metros de longitud supera el largo de un autobús.*"

El pelo o cabello humano es de naturaleza córnea y tiene forma cilíndrica. Está formado por una fibra de queratina y consta de una raíz y un tallo.

El crecimiento varía de unas personas a otras ya que depende de muchos factores, pero por término medio crece 15 cm al año.

1 Una persona se ha cortado el pelo al 5, es decir, con una longitud de 15 mm, averigua cuánto medirá al cabo de uno, dos, cuatro y cinco meses.

2 Representa los resultados del **apartado anterior** en el siguiente sistema de referencia. Une los puntos obtenidos.



3 Escribe la expresión algebraica que se ajusta a los datos obtenidos en los **apartados anteriores**.

Para realizar los siguientes apartados considera que el mes tiene 30 días y el año 360.

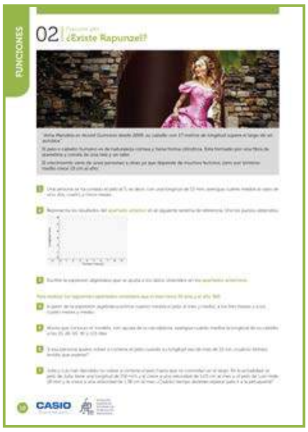
4 A partir de la expresión algebraica estima cuánto medirá el pelo al mes y medio, a los tres meses y a los cuatro meses y medio.

5 Ahora que conoces el modelo, con ayuda de la calculadora, averigua cuánto medirá la longitud de su cabello a los 15, 40, 65, 90 y 115 días.

6 Si esa persona quiere volver a cortarse el pelo cuando su longitud sea de más de 10 cm, ¿cuánto tiempo tendrá que esperar?

7 Julia y Luis han decidido no volver a cortarse el pelo hasta que no coincidan en el largo. En la actualidad, el pelo de Julia tiene una longitud de 216 mm y le crece a una velocidad de 1,05 cm al mes y, el pelo de Luis mide 18 mm y le crece a una velocidad de 1,38 cm al mes. ¿Cuánto tiempo deberán esperar para ir a la peluquería?

02 | Función afín
¿Existe Rapunzel?



MATERIALES
Calculadora CASIO fx 570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

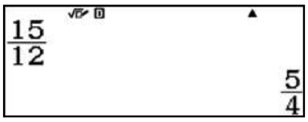
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

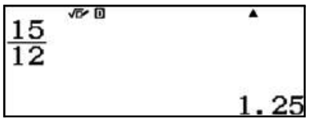
- Con esta actividad se pretende que el alumnado trabaje con situaciones reales que se ajustan a funciones, que encuentre la expresión algebraica y que sea capaz de predecir resultados a partir de otros obtenidos.
- Para visualizar la salida como números decimales se utiliza la tecla [S⇔D].
- La tecla [CALC] permite evaluar una función en los valores asignados a las variables.
- La función *SOLVE* solo se puede utilizar en el menú *Calcular* ([MENU] [1]).
- Para salir de las funciones [CALC] o *SOLVE* hay que pulsar [AC].

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

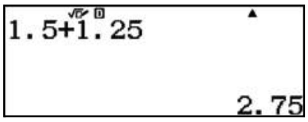
1

Por término medio, el pelo crece en un mes $\frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ cm:

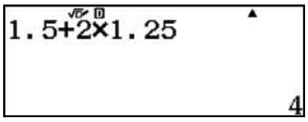




Al cabo de un mes el pelo medirá 1,5 + 1,25 = 2,75 cm:



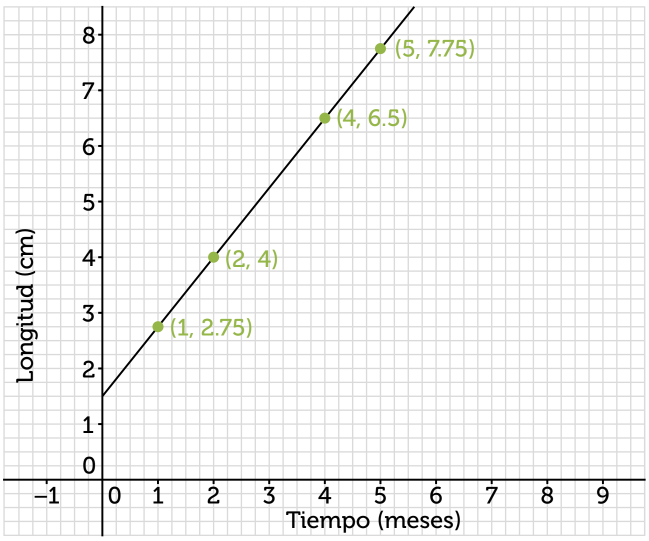
Al cabo de dos meses, 1,5 + 2 · 1,25 = 4 cm:



Al cabo de cuatro meses, medirá 1,5 + 4 · 1,25 = 6,5 cm. Y, al cabo de cinco meses, medirá 1,5 + 5 · 1,25 = 7,75 cm.

2

En la siguiente gráfica se representan las soluciones del **apartado anterior**:



02 Función afín
¿Existe Rapunzel?

3

La expresión algebraica que se ajusta a los datos obtenidos es:

$$f(x) = 1{,}5 + \frac{15}{12}\,x = 1{,}5 + \frac{5}{4}\,x = \frac{6+5x}{4}$$

4

Esta actividad se resuelve con el menú *Tabla*:

MENU 9 1 . 5 + ▭
1 5 ▼ 1 2 ▶ x — = = ▼ ▼ 0 . 5 — =

f(x)=1.5+$\frac{15}{12}x$

Rango tabla
Inic. :1
Final :5
Paso :0.5

	x	f(x)
1	1	2.75
2	1.5	3.375
3	2	4
4	2.5	4.625

1

	x	f(x)
5	3	5.25
6	3.5	5.875
7	4	6.5
8	4.5	7.125

4.5

En consecuencia, al cabo de un mes y medio el pelo medirá 3,375 cm. Al cabo de tres meses, 5,25 cm. Finalmente, al cabo de cuatro meses y medio, 7,125 cm.

5

Se escribe la expresión a evaluar, y utilizando la función CALC se introducen los diferentes valores para la variable expresados en días:

1 . 5 + 1 5 ▭
3 6 0 ▶ x CALC 1 5 = — = — S⇔D

1.5+$\frac{15}{360}x$ — x =15

1.5+$\frac{15}{360}x$ — $\frac{17}{8}$

1.5+$\frac{15}{360}x$ — 2.125

CALC 4 0 = = S⇔D — 1.5+$\frac{15}{360}x$ — 3.1$\overline{6}$

CALC 6 5 = = S⇔D — 1.5+$\frac{15}{360}x$ — 4.208$\overline{3}$

CALC 9 0 = = S⇔D — 1.5+$\frac{15}{360}x$ — 5.25

CALC 1 1 5 = = S⇔D — 1.5+$\frac{15}{360}x$ — 6.291$\overline{6}$

Por tanto, su cabello medirá 2,125 cm al cabo de 15 días, aproximadamente 3,17 cm al cabo de 40 días, 4,21 cm al cabo de 65 días, 5,25 cm al cabo de 90 días y aproximadamente 6,29 cm al cabo de 115 días.

6

Se resuelve con la opción CALC. Del **apartado 3** se deduce la expresión $x = \frac{4y-6}{5}$, se asigna el valor 10 a la variable y y se obtiene el tiempo mínimo que hay que esperar para volver a cortar el pelo:

▭ 4 ALPHA S⇔D − 6 ▼ 5 ▶ — CALC — 1 0

$\frac{4y-6}{5}$

$\frac{4y-6}{5}$ — y =3

$\frac{4y-6}{5}$ — y =10

= = — $\frac{4y-6}{5}$ — $\frac{34}{5}$

S⇔D — $\frac{4y-6}{5}$ — 6.8

Tendrá que esperar 6,8 meses para cortarse el pelo, o lo que es lo mismo 6 meses y 24 días:

0.8×30 — 24

¿Existe Rapunzel?

7

La función que permite calcular la longitud del pelo de Julia es:

$$f(x) = 21{,}6 + 1{,}05x$$

La función que permite calcular la longitud del pelo de Luis:

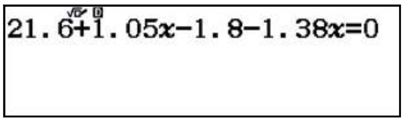
$$g(x) = 1{,}8 + 1{,}38x$$

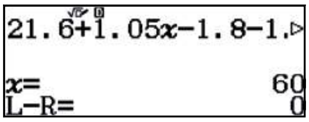
En ambos casos, la variable x está expresada en meses.

El tiempo de espera se puede calcular de tres formas diferentes:

a) Mediante la función *SOLVE*:

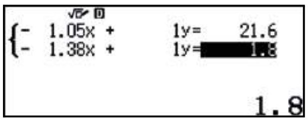
2 1 · 6 + 1 · 0 5 x − 1 · 8 − 1 · 3 8 x ALPHA CALC 0 — SHIFT CALC =

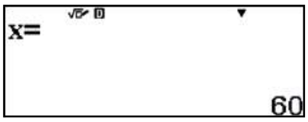


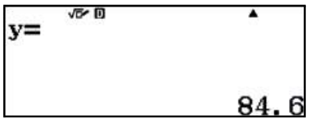


b) Con el menú *Ecuación/Función* (MENU (−)) se puede resolver como un sistema de dos ecuaciones:

1 2 (−) 1 · 0 5 = 1 = 2 1 · 6 = (−) 1 · 3 8 = 1 = 1 · 8 = = — = S⇔D

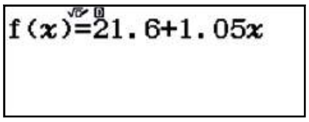


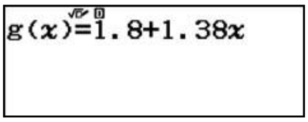


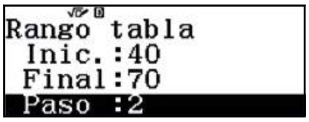


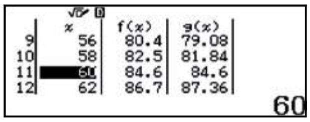
c) Utilizando el menú *Tabla* (MENU 9):

2 1 · 6 + 1 · 0 5 x = — 1 · 8 + 1 · 3 8 x = — 4 0 = 7 0 = 2 = — =



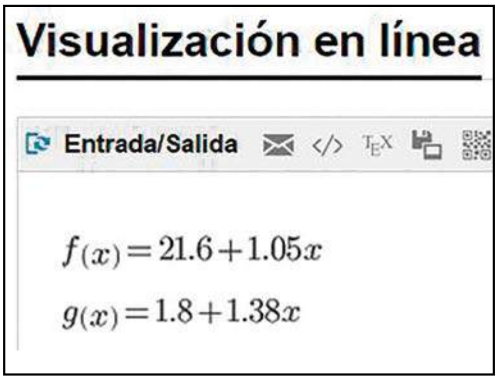


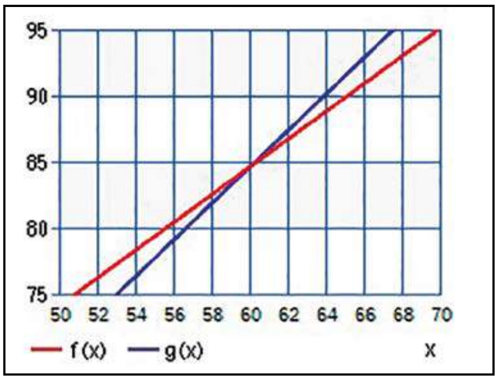




SHIFT OPTN

Tras generar el código *QR* se visualiza la gráfica de las dos funciones. Se comprueba que el tiempo de espera para ir a la peluquería es de 60 días:





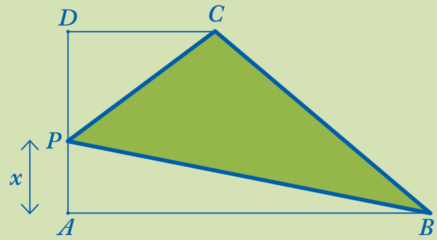
Problema

Área de un triángulo inscrito en un trapecio

Sea el trapecio rectángulo $ABCD$, en el que $\hat{A} = \hat{D} = 90°$, $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm y $\overline{AD} = 5$ cm.

Sea P un punto del lado $\overline{AD}$, siendo $\overline{AP} = x$.

Considera el triángulo $\overset{\triangle}{BCP}$.



1. ¿Para qué valores de x se puede construir el triángulo $\overset{\triangle}{BCP}$?

2. Calcula el área del triángulo $\overset{\triangle}{BCP}$ para $x = 2$ cm.

3. Dibuja la gráfica de la función área del triángulo $\overset{\triangle}{BCP}$ que se representa por $S(x)$.

4. ¿Qué tipo de función es? Escribe las características de la función.

5. ¿Para qué valor de x el área del triángulo $\overset{\triangle}{BCP}$ es 15 cm²? ¿Y 17 cm²?

6. ¿Cuál es el área máxima del triángulo $\overset{\triangle}{BCP}$? ¿Y la mínima?

1

Los valores de x están comprendidos entre 0 y 5 cm, ya que irá tomando valores sobre el lado $\overline{AD}$. Por tanto, $x \in [0, 5]$.

2

Para $x = 2$ cm se calcula el área del trapecio $ABCD$:

$$S_{ABCD} = \frac{10 + 4}{2} \cdot 5 = 35 \text{ cm}^2$$

El área del triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABP}$ es:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10 \text{ cm}^2$$

El área del triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{CDP}$ es:

$$S_{CDP} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2$$

El área del triángulo $\overset{\triangle}{BCP}$ es igual al área del trapecio $ABCD$ menos la suma de las áreas de los triángulos $\overset{\triangle}{ABP}$ y $\overset{\triangle}{CDP}$:

$$S(2) = 35 - (10 + 6) = 19 \text{ cm}^2$$

3

Si $\overline{AP} = x$:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x = 5x$$

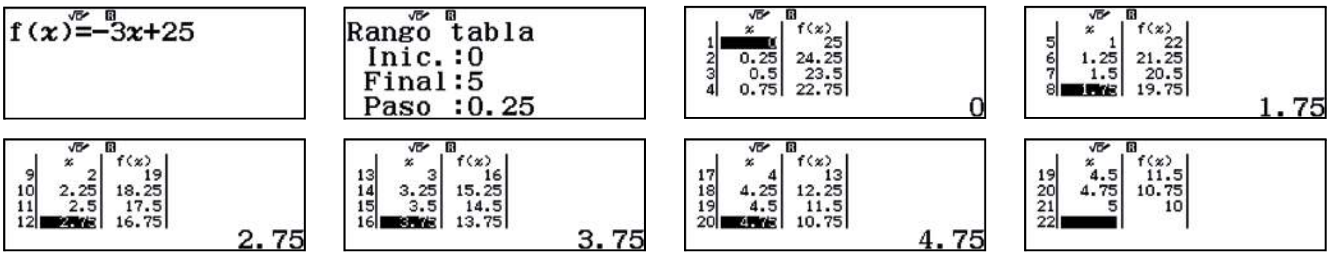
$$S_{CDP} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (5 - x) = 10 - 2x$$

El área del triángulo $\overset{\triangle}{BCP}$ es:

$$S(x) = 35 - (5x + 10 - 2x) = -3x + 25$$

Se utiliza el menú *Tabla* (MENU 9) para construir la tabla de la función que se desea representar:

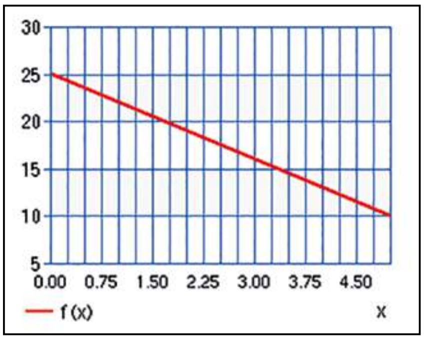
− 3 x + 2 5 = 0 = 5 = 0 · 2 5 =



Problema

Área de un triángulo inscrito en un trapecio

Se utiliza el código *QR* para representar la función pulsando las teclas SHIFT OPTN:



4

Como se observa, la función es una recta.

La pendiente o gradiente de la recta es $m = -3$, por lo que la recta es decreciente.

La ordenada en el origen es $n = 25$. Por tanto, la recta corta el eje de ordenadas en el punto (0, 25).

5

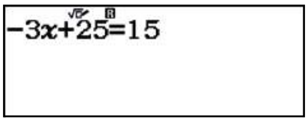
Para calcular para qué valor de x el área del triángulo $B\overset{\triangle}{C}P$ es 15 cm², se resuelve la ecuación:

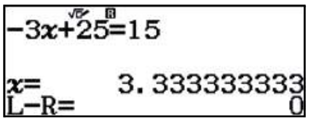
$$S(x) = 15$$

$$-3x + 25 = 15$$

Se utiliza el comando *SOLVE*:

− 3 x + 2 5 ALPHA CALC 1 5 SHIFT CALC =

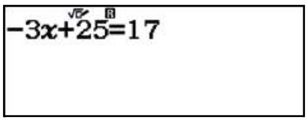


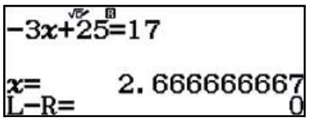


El área del triángulo $B\overset{\triangle}{C}P$ es 15 cm² cuando $x = \overline{AP} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ cm.

Análogamente, para calcular para qué valor de x el área del triángulo $B\overset{\triangle}{C}P$ es 17 cm² se resuelve la ecuación $S(x) = 17$:

$$-3x + 25 = 17$$





El área del triángulo $B\overset{\triangle}{C}P$ es 17 cm² cuando $x = \overline{AP} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ cm.

6

El máximo de la función se alcanza cuando $x = 0$ cm, es decir, en el punto (0, 25). El mínimo en $x = 5$ cm, es decir, en el punto (5, 10).

03 | Función lineal y función afín
¿Cuánto cuesta la impresión?

Esta mañana en el instituto la profesora de matemáticas nos ha enviado un archivo con materiales para imprimir. Por la tarde he preguntado en la copistería cuánto me costaría imprimirlo.

Estas son las tarifas que me han ofrecido:

	PRECIO POR IMPRESIÓN	
IMPRESIÓN A4	B/N	COLOR
Una cara	0,14 €	0,50 €
Doble cara	0,27 €	0,95 €

1 El archivo contiene 30 páginas. ¿Cuánto cuesta su impresión a una cara en blanco y negro? ¿Y a doble cara?

2 Si la impresión es a color, ¿cuánto cuesta imprimirlo a una cara? ¿Y a dos caras?

3 La profesora nos ha dicho que las últimas cuatro páginas contienen gráficos, por lo que es conveniente que se impriman a color. ¿Cuánto cuesta imprimir a una cara en color las cuatro últimas páginas y el resto en blanco y negro? ¿Y a doble cara?

4 Completa las siguientes tablas:

	PRECIO POR IMPRESIÓN	
Impresión una cara	B/N	COLOR
2		
4		
10		
25		
30		
x	$f(x) =$	$g(x) =$

	PRECIO POR IMPRESIÓN	
Impresión doble cara	B/N	COLOR
2		
4		
10		
25		
30		
x	$f(x) =$	$g(x) =$

5 Representa gráficamente las funciones que has obtenido en la **apartado anterior**. ¿Pueden unirse los puntos de la representación gráfica? ¿Qué tienen todas ellas en común?

6 Si enviamos el archivo por correo electrónico, el coste de la impresión del documento se incrementa en 0,50 €. ¿Cuánto cuesta imprimir el documento en cada una de las modalidades si enviamos el archivo por correo electrónico?

7 Escribe, para cada uno de los casos, la nueva función que proporciona el coste con el incremento, según el número de páginas. Represéntalas gráficamente y compáralas con las gráficas de las funciones correspondientes sin el incremento.

03 | Función lineal y función afín
¿Cuánto cuesta la impresión?

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
1º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se presenta una situación real sencilla en la que se busca un modelo matemático para cada una de las opciones planteadas.
- El uso de la calculadora facilita el estudio de los cambios que se producen en las gráficas de funciones lineales y afines al variar los parámetros en la expresión algebraica.
- Las tablas se pueden completar utilizando el menú *Tabla*. Las representaciones gráficas de las funciones se pueden obtener mediante el código *QR*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

La impresión a una cara en blanco y negro cuesta 30 · 0,14 = 4,20 €.

A doble cara, $\frac{30}{2} \cdot 0{,}27 = 4{,}05$ €.

2

La impresión a una cara en color cuesta 30 · 0,50 = 15 €.

A doble cara, $\frac{30}{2} \cdot 0{,}95 = 14{,}25$ €.

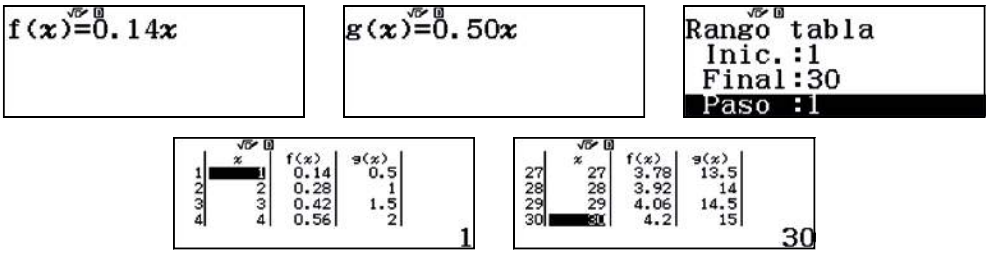
3

Imprimir a una cara en color las cuatro últimas páginas y el resto en blanco y negro cuesta 26 · 0,14 + 4 · 0,5 = 5,64 €.

A doble cara, $\frac{26}{2} \cdot 0{,}27 + \frac{4}{2} \cdot 0{,}95 = 5{,}41$ €.

4

Para completar las tablas se utiliza el menú *Tabla* (MENU 9). En las imágenes se muestra la realización de la tabla para las impresiones a una cara. Se realiza de forma análoga para las impresiones a doble cara.



	PRECIO POR IMPRESIÓN	
Impresión una cara	**B/N**	**COLOR**
2	0,28	1
4	0,56	2
10	1,40	5
25	3,50	12,50
30	4,20	15
x	$f(x) = 0{,}14x$	$g(x) = 0{,}50x$

	PRECIO POR IMPRESIÓN	
Impresión doble cara	**B/N**	**COLOR**
2	0,27	0,95
4	0,54	1,90
10	1,35	4,75
25	3,375	11,875
30	4,05	14,25
x	$f(x) = 0{,}27 \cdot \frac{x}{2}$	$g(x) = 0{,}95 \cdot \frac{x}{2}$

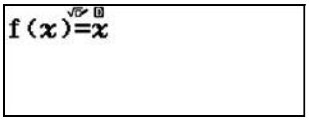
¿Cuánto cuesta la impresión?

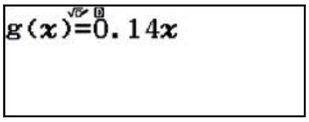
5

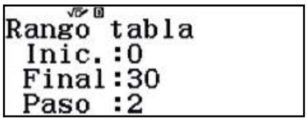
El dominio de la función *coste* es, en cada caso, el conjunto de los números naturales. Por consiguiente, en su representación gráfica no se pueden unir los puntos.

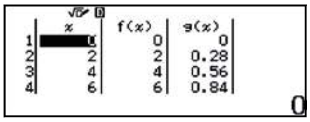
Ahora bien, dado que uno de los objetivos de esta actividad es el estudio de la familia de las funciones lineales, a pesar de que la variable independiente es una variable discreta, se ha optado por representar gráficamente cada función en todo su dominio. En tal caso, para obtener las gráficas de las funciones, se utiliza el menú *Tabla* y el código *QR*.

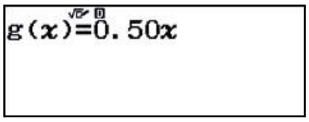
Para poder comparar cada función con la función $f(x) = x$, se deben introducir los pares de funciones en el menú *Tabla*:

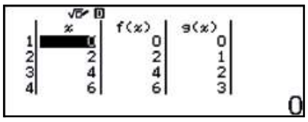




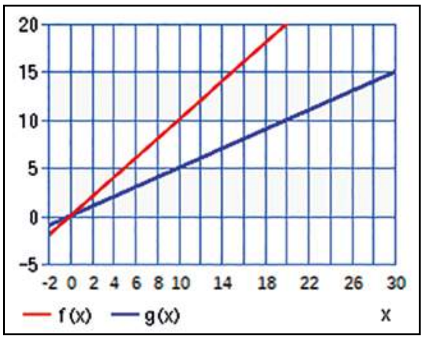




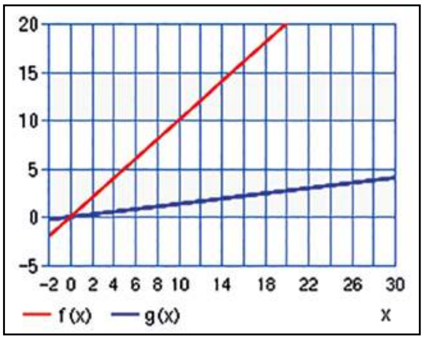


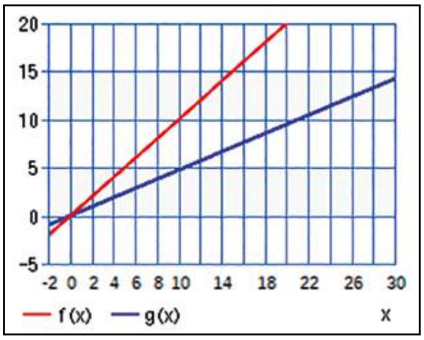


Impresión a una cara: B/N $g(x) = 0{,}14x$ COLOR $g(x) = 0{,}50x$



Impresión a doble cara: B/N $g(x) = \frac{0{,}27x}{2}$ COLOR $g(x) = \frac{0{,}95x}{2}$





Para comparar mejor las gráficas de las funciones, se ajustan las escalas de los ejes de coordenadas desde el icono de herramientas.

Todas ellas tienen en común que son funciones lineales crecientes. Todas son dilataciones verticales de la función $f(x) = x$.

03 | Función lineal y función afín
¿Cuánto cuesta la impresión?

6

Si se envía el archivo por correo electrónico el *coste* se incrementa en 0,50 €.

La impresión a una cara en blanco y negro cuesta $30 \cdot 0{,}14 + 0{,}50 = 4{,}70$ €.

A doble cara, $\frac{30}{2} \cdot 0{,}27 + 0{,}50 = 4{,}55$ €.

La impresión a una cara en color, $30 \cdot 0{,}50 + 0{,}50 = 15{,}50$ €.

A doble cara, $\frac{30}{2} \cdot 0{,}95 + 0{,}50 = 14{,}75$ €.

Imprimir a una cara en color las cuatro últimas páginas y el resto en blanco y negro, $26 \cdot 0{,}14 + 4 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 = 6{,}14$ €.

A doble cara, $\frac{26}{2} \cdot 0{,}27 + \frac{4}{2} \cdot 0{,}95 + 0{,}5 = 5{,}91$ €.

7

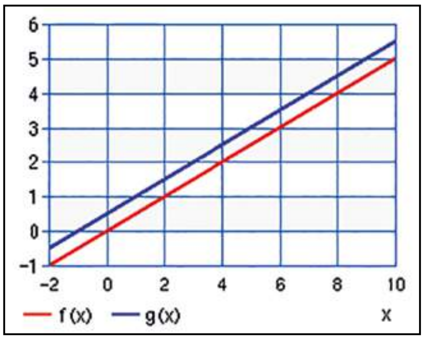
Las funciones que proporcionan el *coste* con el incremento son:

Tipo de impresión	Función
A una cara en blanco y negro	$f(x) = 0{,}14 \cdot x + 0{,}50$
A doble cara en blanco y negro	$f(x) = 0{,}27 \cdot \frac{x}{2} + 0{,}50$
A una cara en color	$f(x) = 0{,}50 \cdot x + 0{,}50$
A doble cara en color	$f(x) = 0{,}95 \cdot \frac{x}{2} + 0{,}50$

Se observa que cada nueva función se obtiene mediante una traslación vertical de 0,50 unidades hacia arriba de su correspondiente función sin incremento. Cabe recordar que el número de páginas es una variable discreta y por consiguiente no se pueden unir los puntos de la gráfica.

Una cara B/N - B/N correo

Una cara COLOR - COLOR correo



También se puede observar que cada una de estas funciones es una traslación horizontal de $\frac{0{,}5}{0{,}14}$ unidades a la izquierda en el primer caso y, $\frac{0{,}5}{0{,}5}$ en el segundo.

Pues:

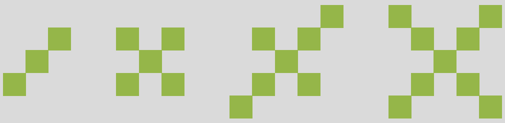
$$f(x) = 0{,}14 \cdot x + 0{,}50 = 0{,}14 \cdot \left(x + \frac{0{,}50}{0{,}14}\right)$$

$$f(x) = 0{,}50 \cdot x + 0{,}50 = 0{,}50 \cdot \left(x + \frac{0{,}50}{0{,}50}\right) = 0{,}5 \cdot (x+1)$$

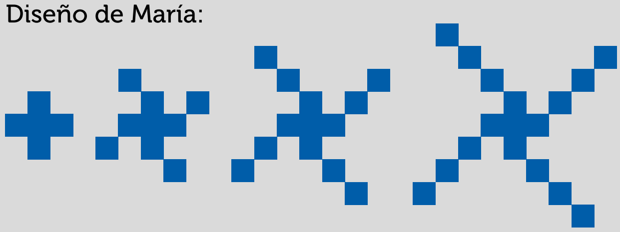
04 | Función lineal y función afín
Representando relaciones

Sara y María son dos amigas que acaban de apuntarse a un curso de *patchwork* para elaborar una colcha. En las cuatro primeras clases, sus diseños principales han ido creciendo del siguiente modo:

Diseño de Sara:



Diseño de María:



1 ¿Cuántos cuadrados tendrán cosidos cada una en la quinta clase? ¿Y en la sexta? ¿Y al cabo de 30 clases?

2 ¿Observas alguna relación entre el número de días asistidos al curso y los cuadrados cosidos?

3 ¿Podrías encontrar una expresión algebraica para cada una de ellas?

4 Haz una representación gráfica, utilizando los mismos ejes de coordenadas, de cada una de las relaciones que has encontrado en el **apartado anterior**.

5 ¿Pueden unirse los puntos de la gráfica?

6 ¿Tienen algo en común las relaciones que has representado?

7 ¿Cuál de los dos diseños crece más rápido? ¿Cómo interpretas ese comportamiento en la gráfica? Compara las expresiones algebraicas asociadas a cada diseño, ¿qué término es el que nos indica cómo crece una recta?

Representando relaciones

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En nuestra vida diaria encontramos muchas situaciones de relación entre dos variables que se pueden interpretar mediante una función afín.
- Con esta actividad se pretende que el alumno descubra la influencia del parámetro m (la pendiente) en una función afín.
- Para el desarrollo de esta actividad se utiliza el menú *Tabla* → *Trabajar con dos funciones* (SHIFT MENU ▼ ▼ 2 2) a la vez y el código *QR* (SHIFT OPTN).

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 2

En el diseño de Sara se observa que la secuencia de cuadrados cosidos es 3, 5, 7, 9...:

CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	CLASE 4	CLASE 5	CLASE 6		CLASE 30
3	5 = 3 + 2	7 = 5 + 2	9 = 7 + 2	11 = 9 + 2	13 =11 + 2		

La relación es sencilla, en cada clase cose dos cuadrados, excepto el primer día que cose 3 (2 + 1). De este modo para calcular en 30 clases cuántos cuadrados tendrá cosidos solo hay que multiplicar por dos el número de clases realizadas y sumarle 1:

$$2 \cdot 30 + 1 = 61 \text{ cuadrados cosidos}$$

De forma análoga, en el diseño de María se observa que la secuencia de cuadrados cosidos es 5, 9, 13, 17...:

CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	CLASE 4	CLASE 5	CLASE 6		CLASE 30
5	9 = 5 + 4	13 = 9 + 4	17 = 13 + 4	21 = 17 + 4	25 = 21 + 4		

Es sencillo deducir que cada clase cose 4 cuadrados, excepto el primer día que cose 5 = (4 + 1). Así para encontrar el número de cuadrados cosidos en 30 clases solo hay que multiplicar el total de clases realizadas por cuatro y sumarle 1:

$$4 \cdot 30 + 1 = 121 \text{ cuadrados cosidos}$$

3

Generalizando los resultados anteriores:

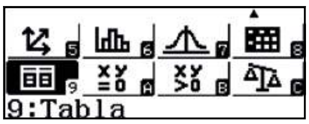
Diseño de Sara → $c = 2d + 1$

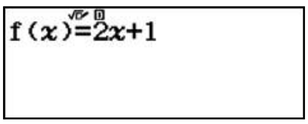
Diseño de María → $c = 4d + 1$

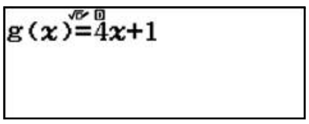
Donde c son los cuadrados cosidos y d los días asistidos al curso.

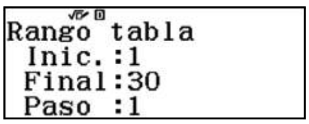
4

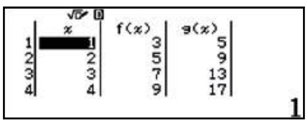
Se realizan las tablas correspondientes:

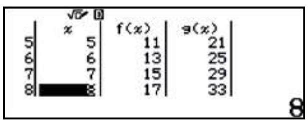


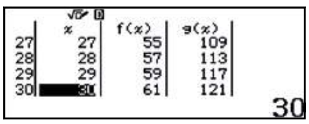










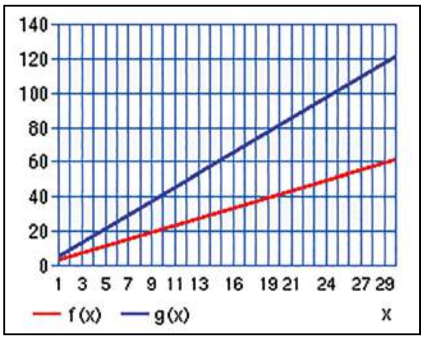


Representando relaciones

A continuación se genera el código *QR* y se visualiza la evolución de cada uno de los diseños:

SHIFT OPTN

1/1



5

El número de días de asistencia al curso, d, y el número de cuadrados cosidos, c, son variables discretas. Por tanto, los puntos que se obtienen no se pueden unir.

6

Ambas relaciones se modelizan mediante una función afín. Además, ambas rectas tienen en común la ordenada en el origen, pasan por el punto (0,1).

7

El diseño que crece más rápido es el de María. Se observa que la representación gráfica del diseño de María está más inclinada que la del diseño de Sara. Cuando se comparan las dos expresiones algebraicas se deduce que el crecimiento viene indicado por el coeficiente del término de primer grado de la expresión algebraica.

Problema

Área de un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles

$\hat{ABC}$ es un triángulo rectángulo isósceles de catetos $\overline{AB} = \overline{AC} = 12$ cm.

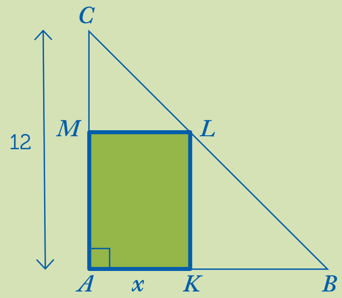
A partir de la medida $\overline{AK}$, se construye el rectángulo $AKLM$.

1. ¿Para qué valores de x se puede construir el rectángulo $AKLM$?

2. Dibuja la gráfica de la función $S(x)$ correspondiente al área del rectángulo $AKLM$.

3. ¿Para qué valor de x el área del rectángulo es máxima?

4. ¿Es simétrica la función $S(x)$?



1 **2**

Los valores que tomará x estarán comprendidos entre 0 y 12 cm. Por tanto, $x \in [0, 12]$.

Se calcula el área del rectángulo $AKLM$ para un valor concreto y para un valor genérico x.

Si $x = \overline{AK} = 2$ cm, $\overline{KB} = \overline{KL} = \overline{AB} - \overline{AK} = 12 - 2 = 10$ cm.

El área del rectángulo $AKLM$ es $S_{AKLM} = \overline{AK} \cdot \overline{KL} = 2 \cdot 10 = 20$ cm^2.

Si $\overline{AK} = x$, $\overline{KB} = \overline{KL} = \overline{AB} - \overline{AK} = 12 - x$.

El área del rectángulo $AKLM$ es:

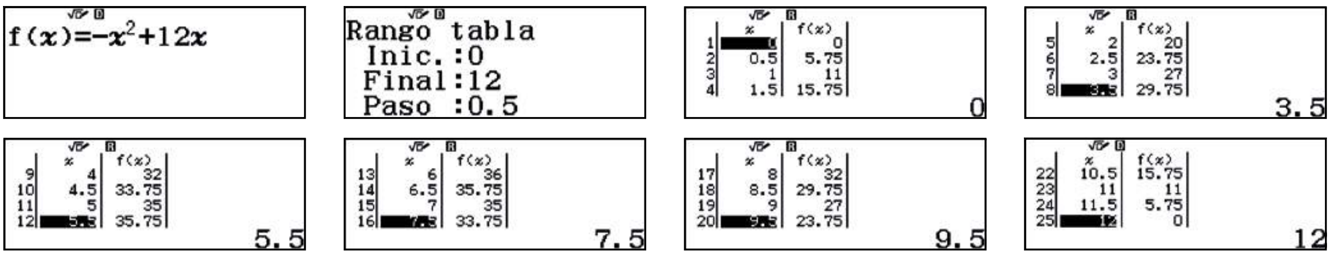
$$S_{AKLM} = \overline{AK} \cdot \overline{KL} = x \cdot (12 - x)$$

$$S(x) = x \cdot (12 - x)$$

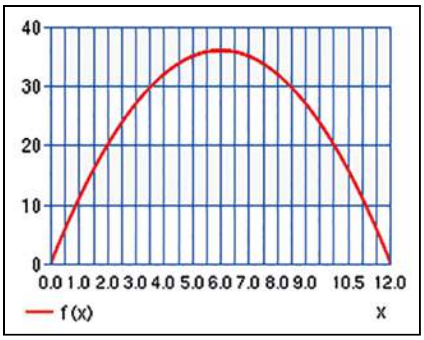
Al efectuar el producto se obtiene:

$$S(x) = -x^2 + 12x$$

Se utiliza el menú *Tabla* (MENU 9) para construir la tabla de valores de la función:



Se utiliza el código *QR* (SHIFT OPTN) para representar la función:



3 **4**

El valor máximo se corresponde con la ordenada del vértice de la parábola, cuya ecuación es $-x^2 + 12x$.

La abscisa del vértice es $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-1)} = 6$ cm.

El máximo se alcanza en $x = 6$ cm, siendo su valor $S(6) = 36$ cm^2.

La curva es simétrica respecto de la recta $x = 6$, que es el eje de simetría de la parábola.

05 | Función lineal y función afín
Preparando la maratón

A lo largo de todo el año, millones de personas en todo el mundo se preparan para participar en una maratón.

Se dice que el soldado ateniense Filípides corrió desde la playa de Maratón hasta Atenas para anunciar la victoria frente a los persas. La distancia que debió recorrer, entre 35 y 40 kilómetros (entre 21 y 24 millas) según el camino que eligiera, se recuperó en los primeros Juegos Olímpicos en 1896, como un homenaje a ese soldado y a la antigua Grecia. Sin embargo, la distancia actual de esta prueba (42 195 m) es la que se introdujo en 1908 en los primeros Juegos Olímpicos de Londres: la distancia desde el Palacio de Windsor al Estadio Olímpico.

En 1921, la IAAF (Asociación Internacional de Federaciones de Atletismo) adoptó esta distancia para la prueba más popular de las carreras de fondo, en lugar de la distancia recorrida por el mítico Filípides quien, de haber existido realmente, debió recorrer la distancia entre Atenas y Esparta y volver, antes de caer muerto, lo que en realidad le convierte en el primer ultramaratoniano de la historia.

Sara y Pablo pertenecen al mismo club de atletismo. Como quedan pocas semanas para la maratón, salen a entrenar todas las tardes haciendo el mismo recorrido. Sara corre a una velocidad constante de 12 km/h y Pablo de 8 km/h. El viernes cuando Sara decide salir a entrenar, Pablo ya lleva una hora corriendo.

1 ¿Crees qué pueden coincidir en algún punto del recorrido?

2 Si la respuesta del **apartado anterior** es afirmativa, ¿cuántos kilómetros habrán recorrido hasta encontrarse? ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde que iniciaron el entrenamiento?

3 Los corredores de élite que aspiran a medallas suelen correr a un ritmo de 3 minutos por kilómetro. ¿Pueden aspirar Sara o Pablo a conseguir alguna medalla?

05 | Función lineal y función afín
Preparando la maratón

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Se ha propuesto esta actividad para, además de tratar los contenidos curriculares correspondientes, analizar y valorar la práctica de deporte, así como abrir un debate que motive la práctica de hábitos saludables.
- Para realizar las actividades, se han utilizado el menú *Estadística* y el menú *Calcular*.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a http://wes.casio.com/es-es/class.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2

Para contestar esta pregunta se construye una tabla de valores asociada a cada corredor. Es importante tener en cuenta que Pablo lleva entrenando una hora cuando empieza a hacerlo Sara.

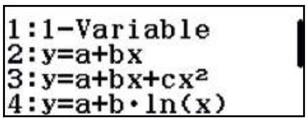
Pablo:

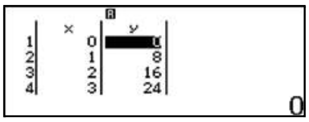
TIEMPO (h)	0	1	2	3	4
DISTANCIA (Km)	0	8	16	24	32

Sara:

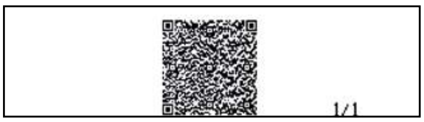
TIEMPO (h)	1	2	3	4	5
DISTANCIA (Km)	0	12	24	36	48

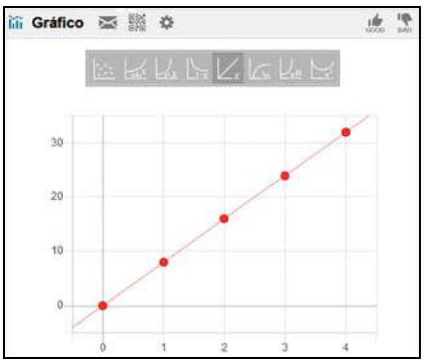
Si se comparan ambas tablas, se observa que a las 3 horas de empezar a correr Pablo ambos corredores han recorrido 24 km. Con la *opción 2:* $y = a + bx$ del menú *Estadística* se introducen los datos de Pablo:

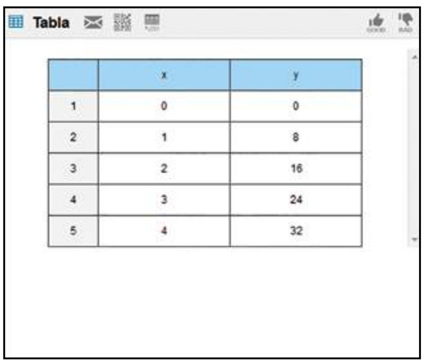




Se genera el código *QR* y se comparte con la clase creada:

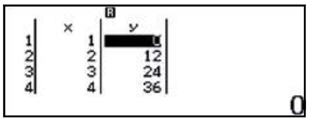


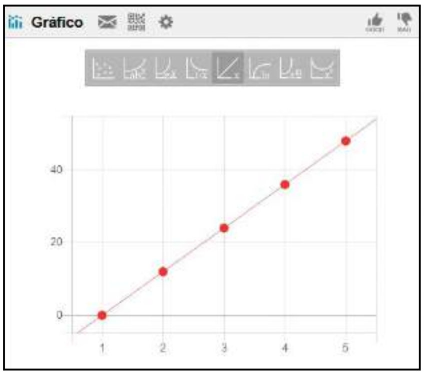


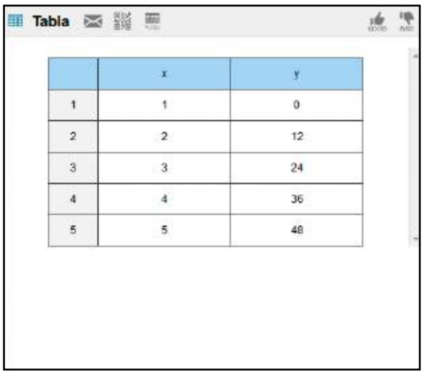


05 | Función lineal y función afín
Preparando la maratón

De forma análoga, se introducen los datos de Sara y se visualizan mediante la aplicación CASIO EDU⁺:

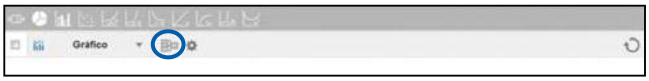


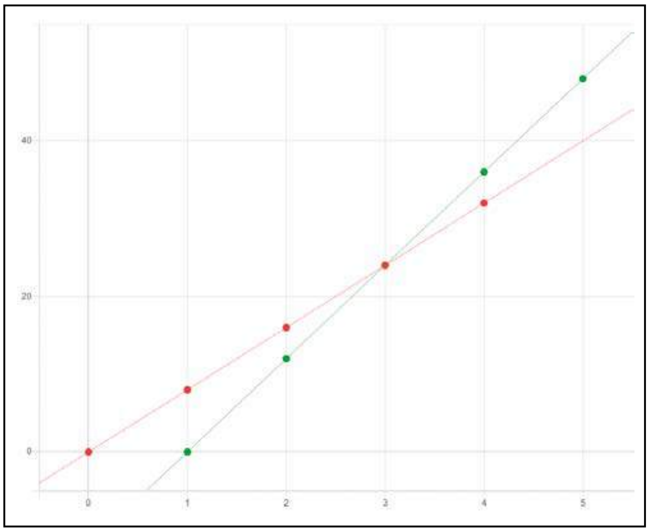




	x	y
1	1	0
2	2	12
3	3	24
4	4	36
5	5	48

Por último, se combinan ambas gráficas para comprobar que tienen un punto en común:





http://wes.casio.com//class/LUn4-VDaj-eeG9-bmFK

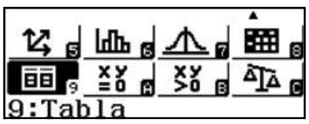
En la gráfica anterior se observa que las rectas se cortan en el punto (3, 24). Por lo tanto, Sara y Pablo coinciden en el recorrido a las 3 horas de haber empezado a entrenar Pablo y a las 2 horas en el caso de Sara. Han recorrido 24 kilómetros.

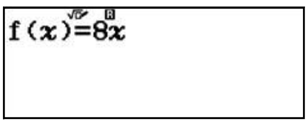
Las funciones que relacionan los kilómetros recorridos con el tiempo están determinadas por las siguientes expresiones algebraicas:

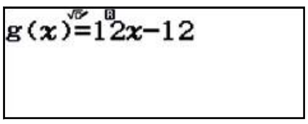
Pablo → $y = 8x,\ x \geq 0$

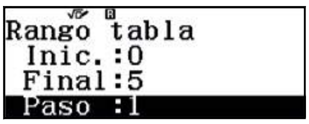
Sara → $y = 12 \cdot (x - 1) = 12x - 12,\ x \geq 1$

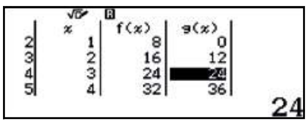
Con el menú *Tabla* se corrobora el resultado anterior:





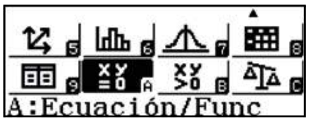


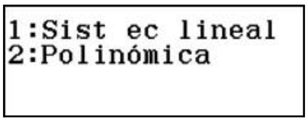


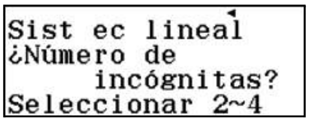


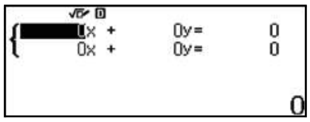
Preparando la maratón

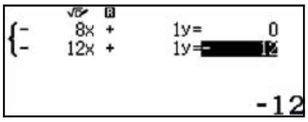
Con el menú *Ecuación/Función* también se comprueba el resultado:

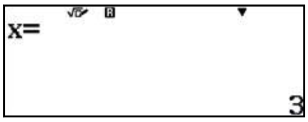


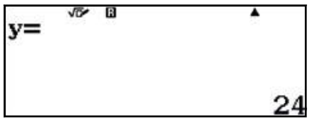






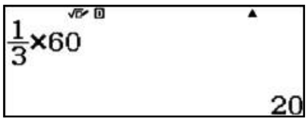






3

Si en 3 minutos recorren 1 kilómetro, esto quiere decir que, en 1 minuto esos corredores recorren $\frac{1}{3}$ de kilómetro. Por lo tanto, en una hora recorren 20 Km:



En consecuencia, ni Sara ni Pablo ganarían medalla, sus velocidades están muy distantes de 20 km/h.

Observación

En la página de la Asociación Internacional de Federaciones de Atletismo se pueden encontrar datos sobre diferentes disciplinas que pueden resultar muy útiles para realizar actividades con datos reales.

https://www.iaaf.org

Otra página interesante para trabajar con datos reales es:

https://www.runnersworld.com/

https://www.runnersworld.com/races-places/a20823734/these-are-the-worlds-fastest-marathon-and-marathon-course/

Los hábitos saludables son un tema transversal en todas las etapas educativas. Las siguientes páginas web son indicadas para este fin:

http://www.estilosdevidasaludable.mscbs.gob.es/

https://www.uco.es/activate/index.php/category/alimentacion-saludable/

06 | Función afín
¿Conoces el Índice de Masa Corporal?

El IMC (Índice de Masa Corporal) es un indicador para medir la obesidad de una persona. Este indicador se obtiene con la fórmula:

$$IMC = \frac{Peso\ (kg)}{Altura^2\ (m^2)}$$

Rangos de masa corporal				
Inferior a 15	Entre 15 y 18,5	Entre 18,5 y 25	Entre 25 y 30	A partir de 30
Por debajo del peso normal	Delgado	Normal	Sobrepeso	Obeso

Si a los datos de peso y altura se añaden los factores edad y género, se obtiene otro índice más preciso llamado CUN-BAE (composición de grasa corporal). Dependiendo del índice CUN-BAE estaremos en uno de los rangos siguientes:

Rangos de % de grasa	Hombres	Mujeres
Peso normal	Hasta 20,0%	Hasta 30,0%
Sobrepeso	20,1% - 25,0%	30,1% - 35,0%
Obesidad	Mayor de 25,1%	Mayor de 35,1%

Actualmente el CUN-BAE está sustituyendo al IMC por ser más representativo.

1 Completa la siguiente tabla:

	Peso (x)	Altura (y)	IMC (A)
Alumno 1	50	1,65	
Alumno 2	48,7		15,9
Alumno 3		1,65	19,5

2 En la clase hay un chico y una chica de la misma edad y el mismo peso. El índice de grasa corporal del chico es de un 14,3% y el de la chica, un 30,6%. Si el chico tiene una altura de 1,66 m y la chica 1,58 m y su peso es de 60,1 Kg. Averigua el IMC de cada uno de ellos y comenta los resultados obtenidos.

3 En la siguiente tabla aparecen las alturas en metros y los pesos en kilos de 10 personas.

Altura (x)	1,75	1,80	1,62	1,57	1,80	1,73	1,71	1,68	1,65	1,65
Peso (y)	75	82	57	67	78	65	65	67	62	58

Utiliza la calculadora para buscar la función lineal que mejor se ajusta a los datos.

4 Calcula el IMC para una altura 1,57 m con el dato del peso correspondiente que aparece en la tabla anterior y con el valor estimado según el modelo que acabas de obtener. Determina también el IMC para unas alturas de 1,50 m y de 1,70 m.

¿Conoces el Índice de Masa Corporal?

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con las dos primeras actividades se pretende que el alumnado, a partir de una expresión algebraica, determine el valor de una variable conocidas las otras.
- Con las últimas actividades, se intenta que busquen a partir de unos datos, y con la ayuda de la calculadora, un modelo que se ajuste a ellos para predecir otros datos no conocidos a partir de la gráfica obtenida.
- Además, con la última actividad se pretende utilizar el modelo tanto para la diferencia entre el valor observado y el valor dado por el modelo, como para estimar el valor del IMC para una altura de la que se desconoce su peso.
- Para realizar la primera actividad se puede asignar valores a las variables y evaluarlas en la fórmula del IMC o bien utilizar la tecla [CALC].
- Para buscar la función lineal se utilizará el menú *Estadística* ([MENU] [6]) y para la representación gráfica se genera un código *QR* ([SHIFT] [OPTN]). La visualización en línea de la gráfica muestra solamente la nube de puntos, si se desea que se dibuje la recta de regresión, es necesario seleccionarla.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Para calcular el IMC se asignan valores a las variables y se realiza la operación:

[5] [0] [STO] [)]

$50 \to x$ — 50

[1] [•] [6] [5] [STO] [S⇔D]

$1.65 \to y$ — $\frac{33}{20}$

[x] [▭/▭] [ALPHA] [S⇔D] [x²] [=]

$\frac{x}{y^2}$ — 18.36547291

Para el cálculo de la altura se utiliza la tecla [CALC]:

[√▭] [x] [▭/▭] [ALPHA] [(−)]

$\sqrt{\frac{x}{A}}$

[▶] [CALC] [4] [8] [•] [7]

$\sqrt{\frac{x}{A}}$ — $x = 48.7$

[=] [1] [5] [•] [9]

$\sqrt{\frac{x}{A}}$ — $A = 15.9$

[=] [=]

$\sqrt{\frac{x}{A}}$ — 1.750112305

Para obtener el peso se procede de manera análoga:

[ALPHA] [(−)] [ALPHA] [S⇔D] [x²]

Ay^2

[CALC] [1] [9] [•] [5]

Ay^2 — $A = 19.5$

[=] [1] [•] [6] [5]

Ay^2 — $y = 1.65$

[=] [=] [S⇔D]

Ay^2 — 53.08875

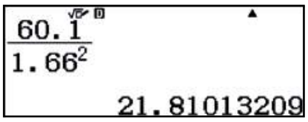
En consecuencia, la tabla queda:

	Peso (x)	Altura (y)	IMC (A)
Alumno 1	50	1,65	18,4
Alumno 2	48,7	1,75	15,9
Alumno 3	53	1,65	19,5

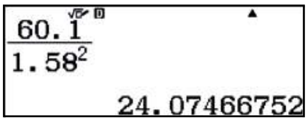
¿Conoces el Índice de Masa Corporal?

2

El IMC del chico es aproximadamente 21,8:



El IMC de la chica es 24,1:



Para comentar los resultados puede ser útil construir una tabla como la siguiente:

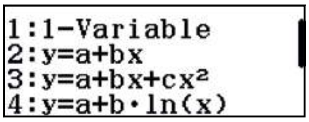
	Peso	Altura	IMC	% grasa corporal
Chico	60,1	1,66	21,8	14,3
Chica	60,1	1,58	24,1	30,6

Según el IMC, tanto el chico como la chica presentan un peso normal. Sin embargo, el % de grasa corporal indica que el chico está en un peso normal y la chica tiene sobrepeso.

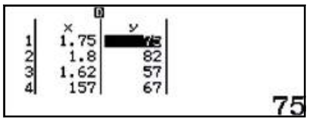
3

Para buscar la función lineal se puede utiliza la *opción 2:* $y = a + bx$ del menú *Estadística*:

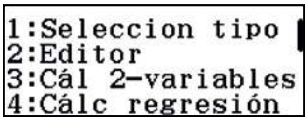
MENU 6



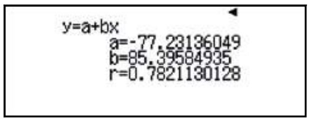
2



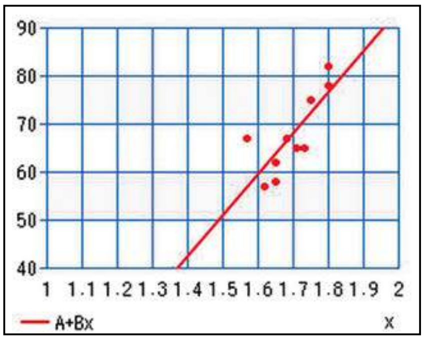
OPTN



4



AC SHIFT OPTN



La expresión de la función lineal que mejor se ajusta a los datos es:

$$y = 85{,}40 \cdot x - 77{,}23$$

¿Conoces el Índice de Masa Corporal?

4

El IMC para 1,57 m de altura, utilizando el peso que aparece en la tabla, se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{67}{1.57^2} \quad 27.18163009$$

Para realizar la estimación del IMC para todos los valores pedidos se utiliza la tecla CALC. Se escribe la expresión, se introducen los valores de la altura y se obtienen los pesos para calcular el IMC.

El IMC estimado para una altura de 1,57 m es, aproximadamente, 23,06:

8 5 . 4 x − 7 7 . 2 3 → 85.4x−77.23

CALC 1 . 5 7 → 85.4x−77.23 ; x =1.57

= S⇔D → 85.4x−77.23 ; 56.848

▭ Ans ▼ 1 . 5 7 x^2 ▶ → $\frac{\text{Ans}}{1.57^2}$

= → $\frac{\text{Ans}}{1.57^2}$; 23.06300458

El IMC estimado para una altura de 1,50 m es, aproximadamente, 22,61:

85.4x−77.23 ; x =1.5

85.4x−77.23 ; 50.87

$\frac{\text{Ans}}{1.5^2}$; $22.60\overline{8}$

Finalmente, para una altura de 1,70 m el IMC estimado es, aproximadamente, 23,51:

85.4x−77.23 ; x =1.7

85.4x−77.23 ; 67.95

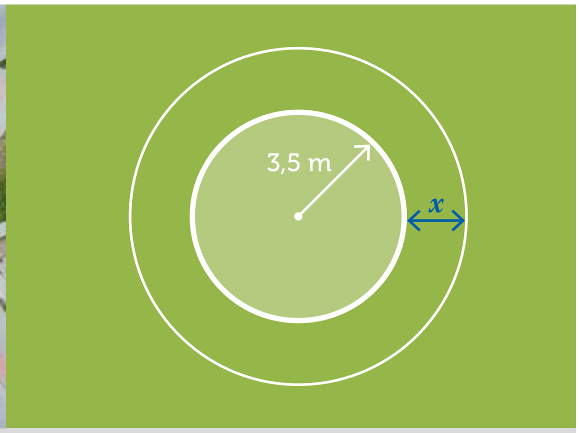
$\frac{\text{Ans}}{1.7^2}$; 23.51211073

Observación

Los hábitos de alimentación son importantes en nuestra dieta. En la página del INE se pueden encontrar datos reales en referencia al índice de masa corporal, sexo y edad:

http://www.ine.es/jaxi/tabla.do?type=pcaxis&path=/t00/mujeres_hombres/tablas_1/l0/&file=d06001.px

07 Función lineal
¡Hagamos la rotonda más grande!



El ayuntamiento de València desea ampliar una rotonda inicial de 3,5 m de radio, y volver a cercar aprovechando la valla que inicialmente la rodea.

1 ¿Cuánto mide la longitud de la valla inicial que la rodea?

2 Si aumentamos el radio 1,5 m, ¿cuánto aumenta la longitud de la valla nueva?

3 Completa la siguiente tabla:

Aumento del radio (m)	Aumento de la valla (m)
0	$A_L(0) = 0$
1	$A_L(1) = 2\pi \approx 6{,}2832$ m
1,25	
1,5	
1,75	
2	
2,25	
2,5	
x	$A_L(x) =$

4 Representa gráficamente la función $A_L(x)$. ¿Qué tipo de función es? Enumera sus características.

5 Si la longitud de la valla aumenta 1 m, ¿cuánto aumenta el radio? ¿Y si aumenta 15 m?

6 Si reponer 1 metro de valla cuesta 253 €, halla la expresión de la función que determina el coste del aumento de la valla. ¿Cuánto costaría el aumento de valla si el radio aumenta 2 m?

07 | Función lineal
¡Hagamos la rotonda más grande!

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de los valores de una función.
  - Representar gráficamente funciones.
  - Resolver ecuaciones con la función *SOLVE* de la calculadora.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 2 3

La longitud de una circunferencia de radio 3,5 m es:

$$L(3{,}5) = 2\pi \cdot 3{,}5 = 7\pi \approx 21{,}99 \text{ m}$$

Si se aumenta el radio 1,5 m, la nueva rotonda tiene radio 5 m y su longitud es:

$$L(5) = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \approx 31{,}415 \text{ m}$$

El aumento de la longitud de la rotonda es:

$$A(1{,}5) = A_L(1{,}5) = 10\pi - 7\pi = 3\pi \approx 9{,}42 \text{ m}$$

Si el aumento del radio es x, la longitud de la nueva circunferencia es:

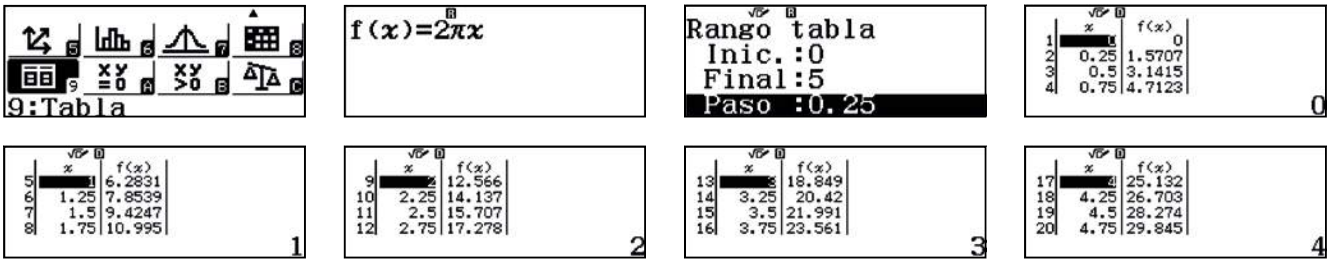
$$L(3{,}5 + x) = 2\pi \cdot (3{,}5 + x) = 7\pi + 2\pi \cdot x$$

El aumento de la longitud de la rotonda es:

$$A_L(x) = L(3{,}5 + x) - L(3{,}5) = 7\pi + 2\pi \cdot x - 7\pi = 2\pi \cdot x$$

Para calcular los valores de la tabla se utiliza el menú *Tabla* ([MENU] [9]):

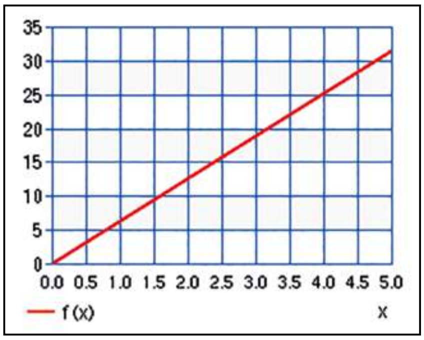
[2] [SHIFT] [×10ˣ] [x] [=] [0] [=] [5] [=] [0] [·] [5] [=] [=]



Aumento del radio (m)	Aumento de la valla (m)
0	0
1	6,28
1,25	7,85
1,5	9,42
1,75	11,00
2	12,57
2,25	14,14
2,5	15,71
x	$A_L(x) = 2\pi x$

4

Se utiliza el código *QR* ([SHIFT] [OPTN]) para representar gráficamente la función:



Se observa que:

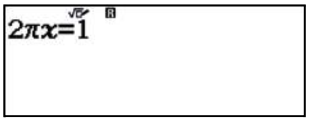
- La función es una recta.
- La pendiente o gradiente de la recta es $m = 2\pi > 0$. Entonces, la recta es creciente.
- La ordenada en el origen es $n = 0$, en consecuencia, la recta pasa por el origen de coordenadas.

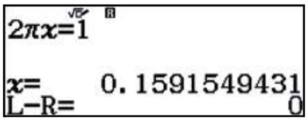
5

Para calcular en qué valor de x (aumento del radio) el aumento de la valla de la rotonda es 1 m, se resuelve la ecuación $A_L(x) = 1$ mediante la función *SOLVE*:

$$2\pi \cdot x = 1$$

[2] [SHIFT] [×10ˣ] [x] [ALPHA] [CALC] [1] [SHIFT] [CALC] [=]

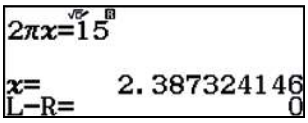




Aumentando 1 m la longitud de la valla de la rotonda, el radio aumenta aproximadamente 16 cm.

Análogamente, para calcular el aumento del radio x si la valla aumenta 15 m, se resuelve la ecuación $A_L(x) = 15$, obteniendo un aumento del radio aproximado de 2,39 m:

$$2\pi \cdot x = 15$$



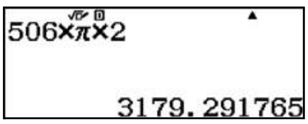
6

La expresión de la función *coste del aumento de la valla* es:

$$f(x) = 253 \cdot 2\pi \cdot x = 506\pi \cdot x$$

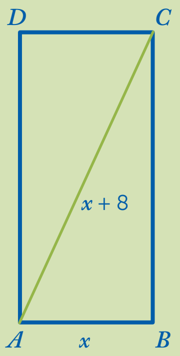
Si el aumento del radio de la valla es 2 m, el coste de reponerla es:

$$f(2) = 506\pi \cdot 2 \approx 3\,179{,}29\ €$$



Problema

Lado de un rectángulo



Sea el rectángulo $ABCD$ de lado $\overline{AB} = x$, y diagonal $\overline{AC} = x + 8$.

1. Calcula la longitud del lado $\overline{AD}$ para $x = 5$ cm.

2. Sea $f(x)$ la función que define la longitud $\overline{AD}$. ¿Qué tipo de función es?

3. Si $\overline{AD} = 20$ cm, calcula la longitud del lado $\overline{AB} = x$.

4. Construye la tabla de la función $g(x) = \frac{1}{16}x^2 - 4$.

5. Compara las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo [0, 25].

6. Construye la tabla de la función $h(x) = 4\sqrt{x}$.

7. Compara las funciones $f(x)$ y $h(x)$.

1

Si $x = 5$ cm, entonces $\overline{AC} = 13$ cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $A\hat{D}C$, se tendrá que $5^2 + \overline{AD}^2 = 13^2$, de donde $\overline{AD} = 12$ cm.

Si $\overline{AB} = x$ y $\overline{AC} = x + 8$, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $A\hat{D}C$:

$$\overline{AD} = \sqrt{(x+8)^2 - x^2} = 4\sqrt{x+4}$$

2

$f(x) = 4\sqrt{x+4}$, $x \in [0, +\infty)$. Es una función irracional.

La tabla se construye con el menú *Tabla*:

$f(x)=4\sqrt{x+4}$

	x	f(x)
1	0	8
2	1	8.9442
3	2	9.7979
4	3	10.583

0

	x	f(x)
5	4	11.313
6	5	12
7	6	12.649
8	7	13.266

7

	x	f(x)
9	8	13.856
10	9	14.422
11	10	14.966
12	11	15.491

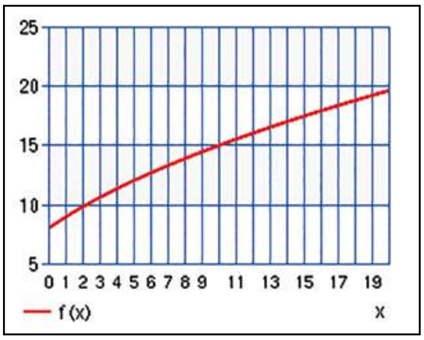
11

	x	f(x)
13	12	16
14	13	16.492
15	14	16.97
16	15	17.435

15

Para dibujar la función $f(x)$ se utiliza el código *QR*:

1/1

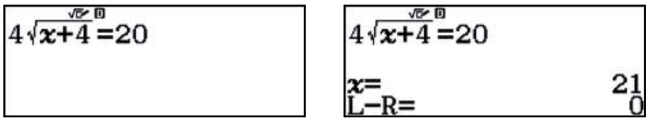


Problema
Lado de un rectángulo

3

Si el lado $\overline{AD}$ = 20 cm, se utiliza la función *SOLVE* para calcular el valor del lado $\overline{AB} = x$:

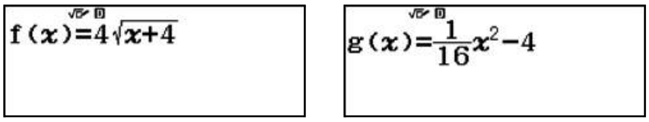
$$4\sqrt{x+4} = 20$$

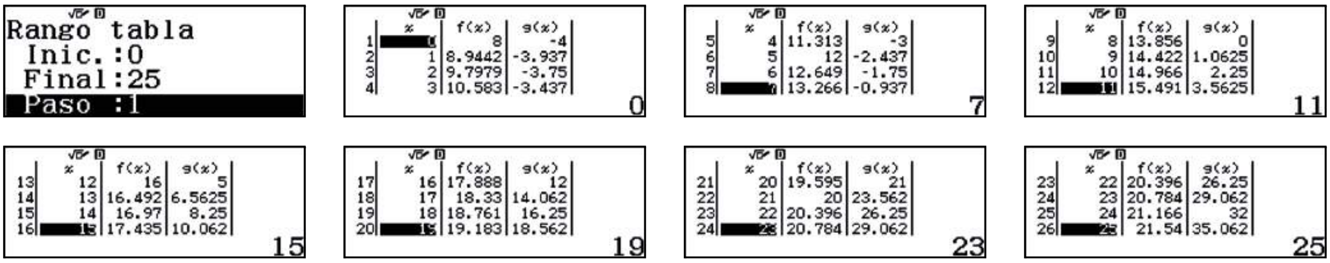


Entonces, $\overline{AB}$ = 21 cm. Se tiene que para los lados 20, 21 y 29 cm el triángulo es pitagórico.

4 **5**

Para comparar las funciones $f(x) = 4\sqrt{x+4}$ y $g(x) = \frac{1}{16}x^2 - 4$ se utiliza el menú *Tabla*:

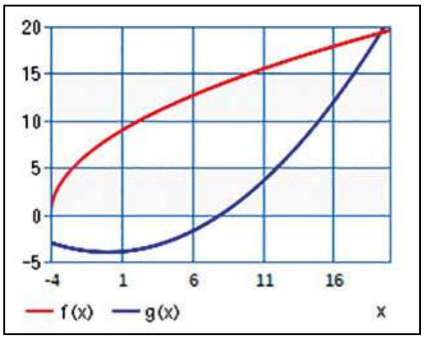




La tabla comparativa queda de la siguiente manera:

x	$f(x) = 4\sqrt{x+4}$	$g(x) = \frac{1}{16}x^2 - 4$
0	8	−4
4	11,31	−3
8	13,36	0
12	16	5
16	17,89	12
20	19,60	21
24	21,17	32

Las dos funciones se representan conjuntamente con el código *QR*:



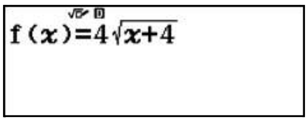
Se aprecia una simetría respecto a la recta $y = x$. Por tanto, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas.

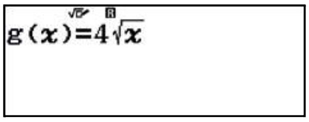
Problema

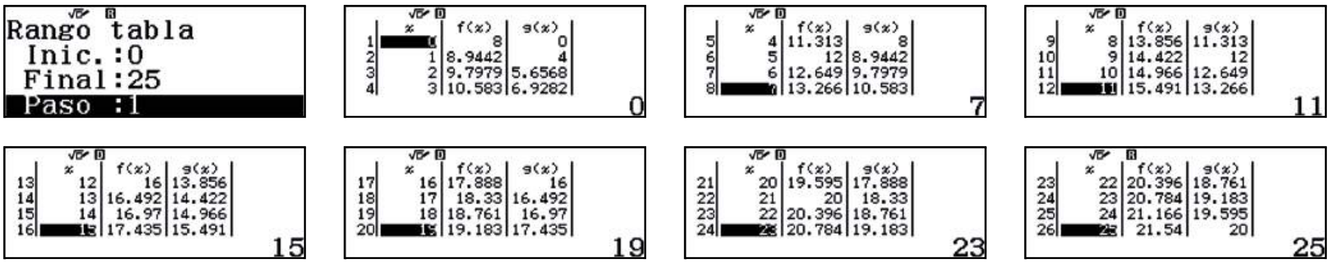
Lado de un rectángulo

6 7

Para construir la tabla de la función $h(x) = 4\sqrt{x}$ conjuntamente con la función $f(x) = 4\sqrt{x+4}$ se utiliza el menú *Tabla*:





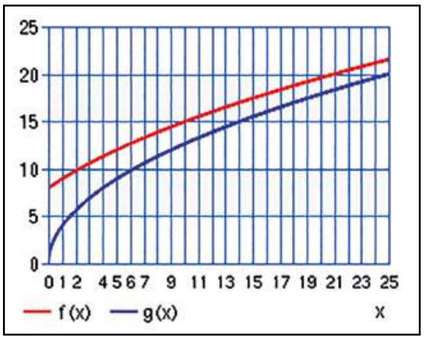


La tabla comparativa queda de la siguiente manera:

x	$f(x) = 4\sqrt{x+4}$	$h(x) = 4\sqrt{x}$
0	8	0
4	11,31	8
8	13,36	11,31
12	16	13,36
16	17,89	16
20	19,60	17,89
24	21,17	19,60

A partir de la tabla se observa que la función $f(x) = 4\sqrt{x+4}$ es una traslación horizontal de –4 unidades de la función $h(x) = 4\sqrt{x}$.

En la representación gráfica se aprecia dicha traslación:

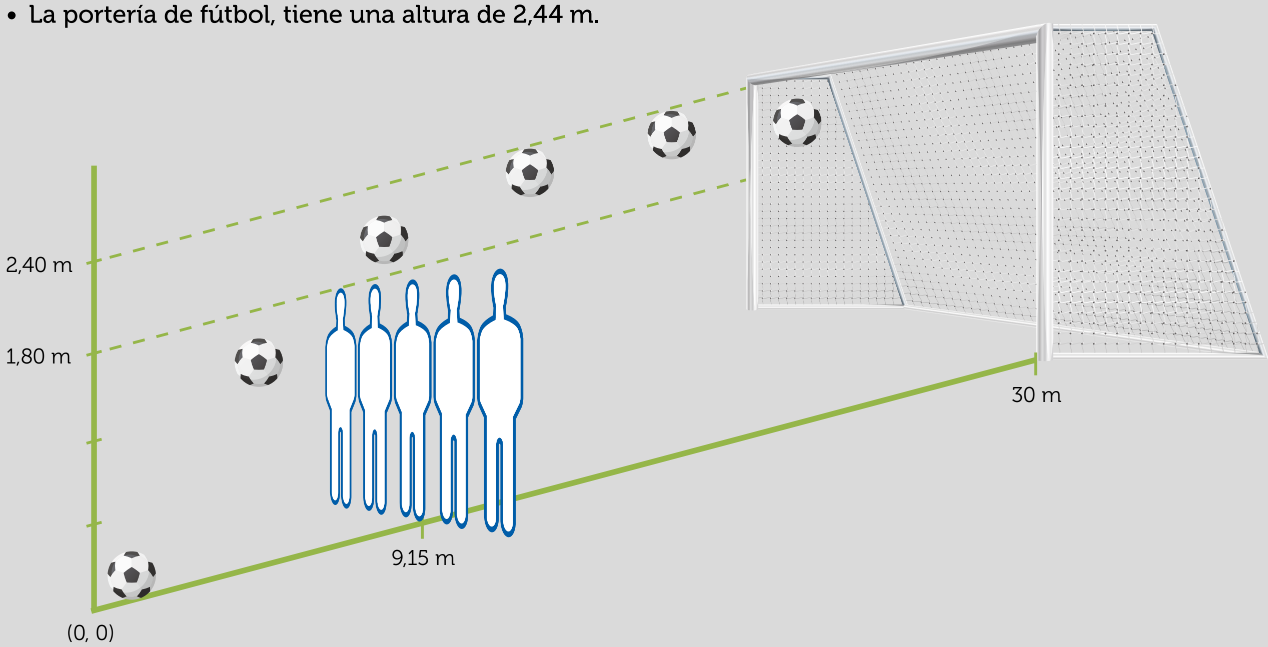


08 | Función cuadrática. Sistemas de ecuaciones

Lanzamiento parabólico directo a gol

Queremos realizar un lanzamiento libre directo a gol, mediante un chut parabólico a 30 metros de distancia de la portería. Las condiciones que debes conocer son las siguientes:

- La barrera se sitúa a 9,15 m del balón y se estima que tiene una altura máxima de 1,80 m.
- La portería de fútbol, tiene una altura de 2,44 m.



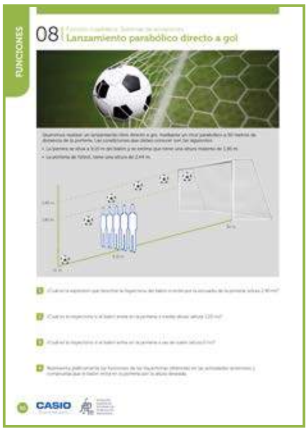
1 ¿Cuál es la expresión que describe la trayectoria del balón si entra por la escuadra de la portería (altura 2,40 m)?

2 ¿Cuál es la trayectoria si el balón entra en la portería a media altura (altura 1,20 m)?

3 ¿Cuál es la trayectoria si el balón entra en la portería a ras de suelo (altura 0 m)?

4 Representa gráficamente las funciones de las trayectorias obtenidas en las actividades anteriores y comprueba que el balón entra en la portería por la altura deseada.

08 | Función cuadrática. Sistemas de ecuaciones
Lanzamiento parabólico directo a gol



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+.

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se quiere conseguir:
  - Trabajar la resolución de sistemas lineales de ecuaciones.
  - Transformar el enunciado de un problema al lenguaje algebraico.
  - Construir funciones cuadráticas y ver sus propiedades.
  - Analizar tablas de valores y sus gráficas.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a http://wes.casio.com/es-es/class.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Del enunciado del problema, se deduce que la expresión que describe la trayectoria del balón es una función cuadrática. Es decir, se pretende encontrar una expresión del tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para determinar el valor de los coeficientes a, b y c, se consideran tres puntos que se extraen de la información del enunciado:

- Inicialmente el balón se coloca en el origen de coordenadas, en consecuencia el punto (0, 0) pertenece a la función $f(x)$.

  De la ecuación $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$, se deduce que $c = 0$.

- El balón debe pasar por encima de la barrera, por tanto la función $f(x)$ pasa por el punto (9,15, 1,80).

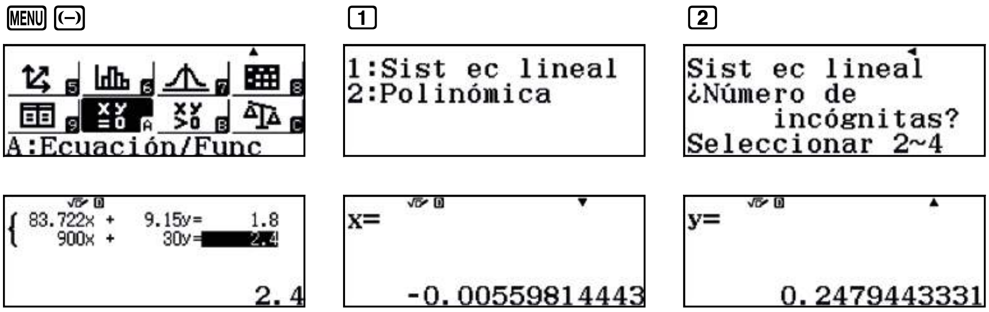
  Sustituyendo las coordenadas de dicho punto en la expresión algebraica de la función $f(x)$ se obtiene:

$$f(9{,}15) = a \cdot (9{,}15)^2 + b \cdot 9{,}15 = 1{,}80$$

- Finalmente, el balón debe entrar por la escuadra de la portería, por tanto:

$$f(30) = a \cdot (30)^2 + b \cdot 30 = 2{,}40$$

Se resuelve el sistema que se genera con las dos últimas condiciones:



La trayectoria del lanzamiento libre directo desde los 30 metros, en la que el balón entra por la escuadra resulta ser:

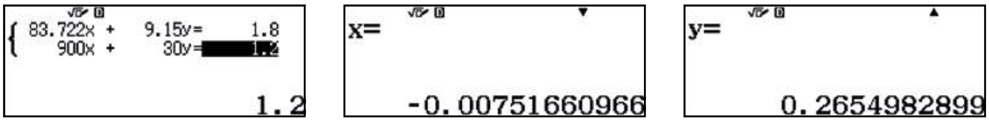
$$f(x) = -0{,}005598x^2 + 0{,}247944x$$

2

Para resolver la situación en la que el balón entra en la portería a una altura de 1,20 m solo se debe modificar el último punto. Las coordenadas, en este caso, son (30, 1,20) y por tanto, la segunda ecuación es:

$$f(30) = a \cdot (30)^2 + b \cdot 30 = 1{,}20$$

Se resuelve el nuevo sistema:



La trayectoria del lanzamiento libre directo desde los 30 metros en la que el balón entra en la portería a media altura resulta ser:

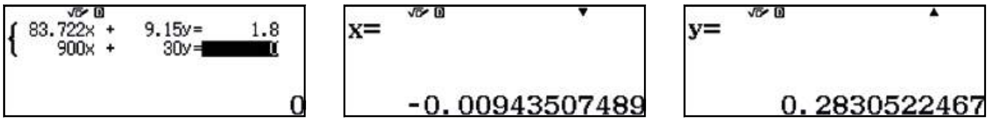
$$f(x) = -0{,}007517x^2 + 0{,}265498x$$

3

Para finalizar, la ecuación que describe la situación en la que el balón entra en la portería a ras de suelo, se obtiene al sustituir el punto (30, 0) en la expresión algebraica de la función $f(x)$:

$$f(30) = a \cdot (30)^2 + b \cdot 30 = 0$$

y se resuelve el nuevo sistema:

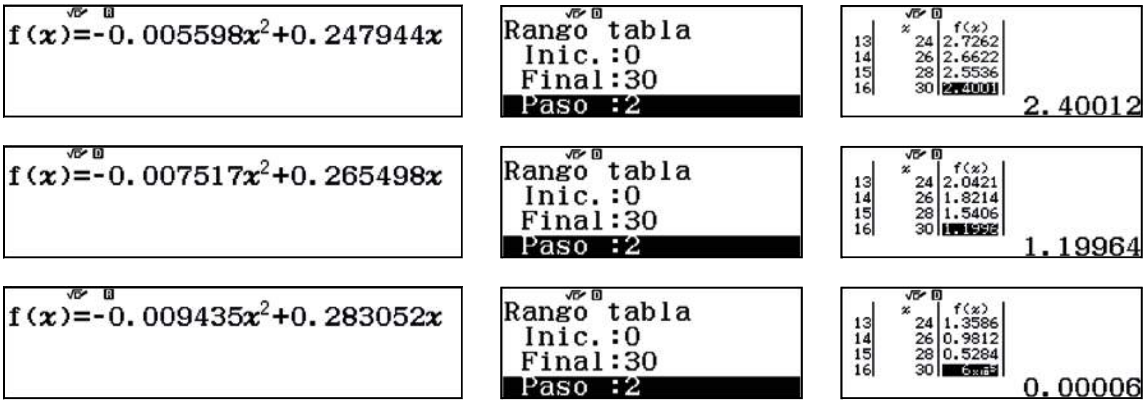


La función de la trayectoria del balón en este caso es:

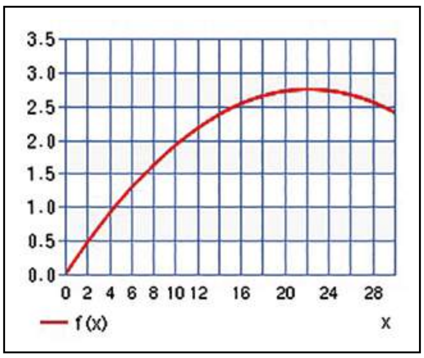
$$f(x) = -0{,}009435x^2 + 0{,}283052x$$

4

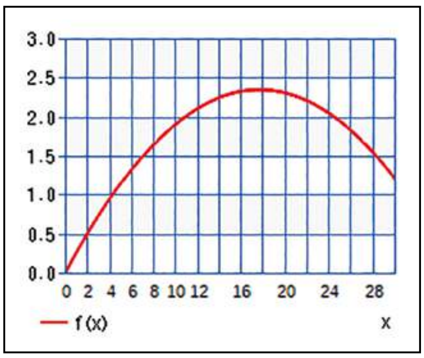
En el menú *Tabla* se introducen cada una de las funciones obtenidas en los **apartados anteriores**, se observan los valores en las tablas y se generan los respectivos códigos *QR* para visualizar cada una de las gráficas:



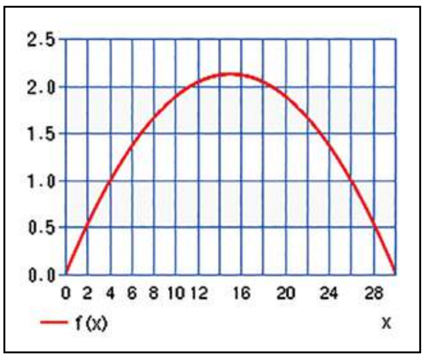
Entra por la escuadra



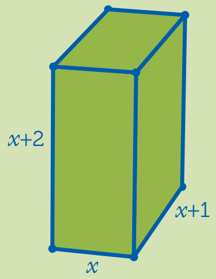
Entra a media altura



Entra a ras de suelo



Problema
Volumen de un ortoedro



Las aristas de un ortoedro miden x, $x + 1$, $x + 2$ cm.

Si el volumen del ortoedro es menor o igual que 8 000 cm^3, ¿entre qué valores varía el lado x?

Como x es la medida de un lado, $x > 0$.

El volumen del ortoedro viene dado por:

$$V(x) = x(x + 1)(x + 2)$$

Como el volumen es menor o igual que 8 000 cm^3:

$$V(x) \leq 8\,000 \text{ cm}^3$$

$$x(x + 1)(x + 2) \leq 8\,000$$

Por tanto:

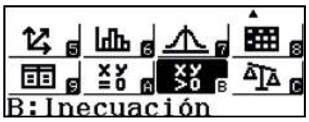
$$0 < x^3 + 3x^2 + 2x \leq 8\,000$$

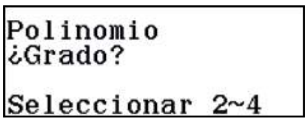
$$0 < x^3 + 3x^2 + 2x - 8\,000 \leq 0$$

Para resolver la inecuación se utiliza el menú *Inecuación*.

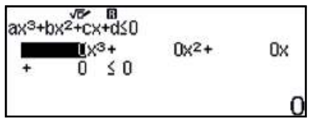
Se selecciona el grado de la inecuación y el tipo:

MENU



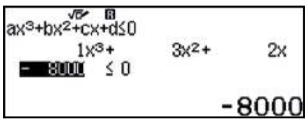


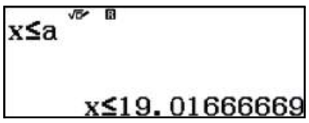
3 4



Se introducen los coeficientes:

1 = 3 = 2 = (−) 8 0 0 0 = =





Los valores de x que satisfacen la inecuación son $0 < x \leq 19{,}01666669$.

Las dimensiones del ortoedro de volumen 8 000 cm^3 son, aproximadamente, 19, 20 y 21 cm.

09 | Función lineal, función cuadrática y función cúbica
Cuerda alrededor de la Tierra

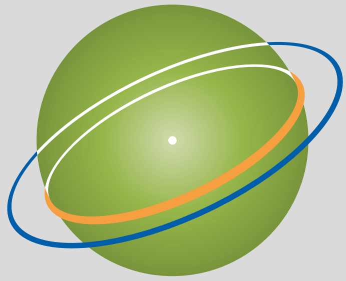
Imagina una cuerda que rodee la Tierra por el Ecuador.

¿Cuánto tendrías que alargar la cuerda para lograr que la distancia entre la cuerda y la superficie de la Tierra fuera de 1 metro en todos sus puntos?

¿Cuánto aumentaría el área del nuevo círculo?

Si envolviéramos la Tierra con una esfera a una distancia de 1 metro en todos sus puntos, ¿cuánto aumentaría el volumen de la esfera?

Nota: se adopta como radio de la Tierra el valor de 6 370 km.



A partir de una esfera de 1 m de radio, R = 1 m, se construye una nueva esfera concéntrica a la anterior de 2 metros de radio.

1 ¿Cuánto aumenta la longitud de la circunferencia máxima de la nueva esfera respecto a la longitud de la esfera inicial?

2 Rellena la siguiente tabla:

Aumento del radio	Aumento de la longitud
0	
1	
2	
3	
x	$A_L(x)$ =

3 ¿Qué tipo de función es $A_L(x)$? Represéntala gráficamente.

4 ¿Cuánto aumenta el área del círculo máximo de la nueva esfera respecto al de la esfera inicial si aumentamos el radio?

5 Rellena la siguiente tabla:

Aumento del radio	Aumento del área
0	
1	
2	
3	
x	$A_S(x)$ =

6 ¿Qué tipo de función es $A_S(x)$? Represéntala gráficamente.

7 ¿Cuánto aumenta el volumen de la nueva esfera respecto al volumen de la esfera inicial si aumentamos el radio?

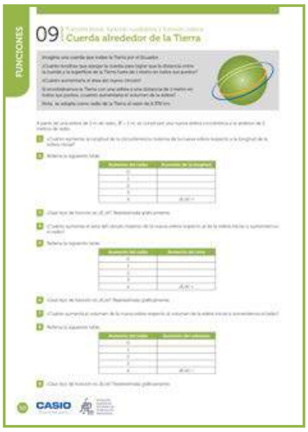
8 Rellena la siguiente tabla:

Aumento del radio	Aumento del volumen
0	
1	
2	
3	
x	$A_V(x)$ =

9 ¿Qué tipo de función es $A_V(x)$? Represéntala gráficamente.

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

09 | Función lineal, función cuadrática y función cúbica
Cuerda alrededor de la Tierra



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

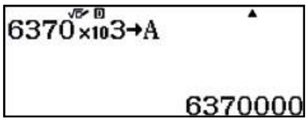
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Utilizar la notación científica.
  - Definir un valor constante con la memoria de la calculadora.
  - Construir la tabla de valores de funciones.
  - Representar gráficamente funciones.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

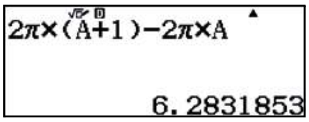
Como se van a efectuar diversas operaciones con el radio de la Tierra, es conveniente introducir su valor en la variable A (A = 6 370 · 10³ m):

6 3 7 0 x10ˣ 3 STO (−)

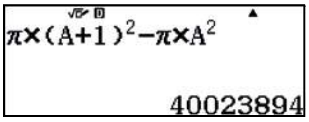


El aumento de longitud de la circunferencia, $2\pi \cdot (A + 1) - 2\pi \cdot A$, es aproximadamente 6,28 m:

2 SHIFT x10ˣ × (ALPHA (−) + 1) − 2 SHIFT x10ˣ × ALPHA (−) =

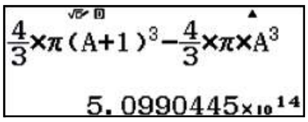


El aumento del área del círculo máximo, $\pi \cdot (A + 1)^2 - \pi \cdot A^2$, es aproximadamente 40 023 894 m², es decir, 40,02 km²:



El volumen de la esfera sufre un aumento aproximado de $5{,}1 \cdot 10^{14}$ m³, es decir, $5{,}1 \cdot 10^{5}$ km³:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (A + 1)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot A^3$$



1 2 3

Si x = 1 m el aumento de longitud es:

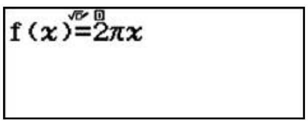
$$A_L(1) = 2\pi \cdot (1 + 1) - 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

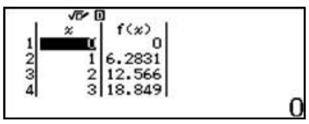
En general:

$$A_L(x) = 2\pi \cdot (1 + x) - 2\pi \cdot 1 = 2\pi \cdot x$$

Expresión de la que se deduce que es una función lineal.

Para rellenar la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:



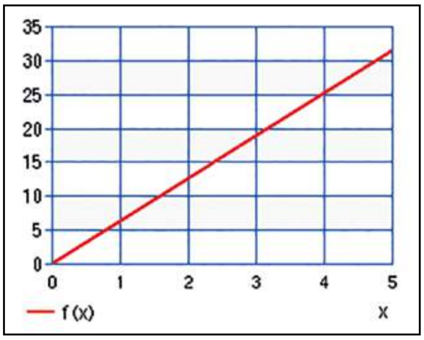


Cuerda alrededor de la Tierra

Aumento del radio	Aumento de la longitud
0	0
1	6,28
2	12,57
3	18,85
x	$A_L(x) = 2\pi \cdot x$

Para representar la función se utiliza el código *QR*:

1/1



4 **5** **6**

Si $x = 1$ m el aumento del área es:

$$A_S(1) = \pi \cdot (1 + 1)^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$$

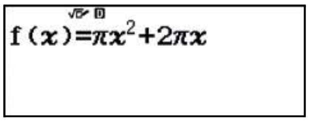
En general:

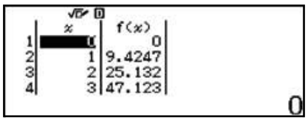
$$A_S(x) = \pi \cdot (x + 1)^2 - \pi \cdot 1^2$$

$$A_S(x) = \pi \cdot (x + 1)^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi \cdot x^2 + 2\pi \cdot x$$

De esta expresión se deduce que la función es una parábola cóncava.

Para rellenar la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:

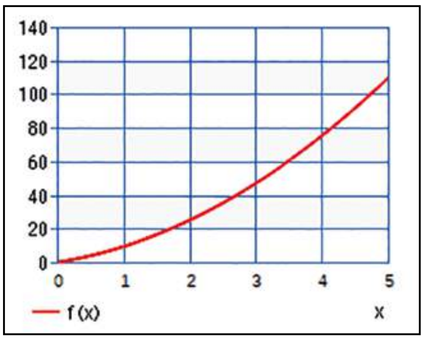




Aumento del radio	Aumento del área
0	0
1	9,42
2	25,13
3	47,12
x	$A_S(x) = \pi \cdot x^2 + 2\pi \cdot x$

Se genera el código *QR* para representar la función:

1/1



7 **8** **9**

Si x = 1 m el aumento del volumen es:

$$A_V(1) = \frac{4}{3}\pi \cdot (1 + 1)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{28}{3}\pi$$

En general se obtiene:

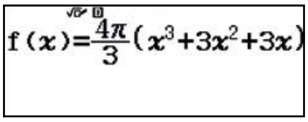
$$A_V(x) = \frac{4}{3}\pi \cdot (x + 1)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3$$

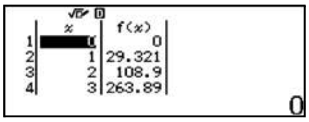
Expresión que al simplificar se transforma en:

$$A_V(x) = \frac{4\pi}{3} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x)$$

Se trata de una función cúbica.

Para rellenar la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:

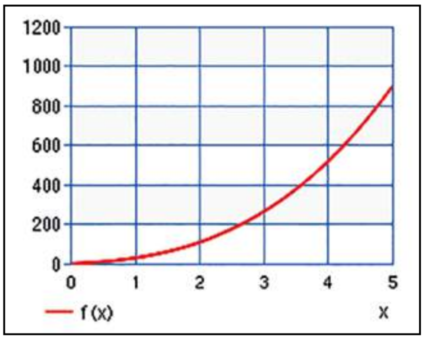




Aumento del radio	Aumento del volumen
0	0
1	29,32
2	108,9
3	263,89
x	$A_V(x) = \frac{4\pi}{3} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x)$

La función se representa con el código *QR*:

1/1



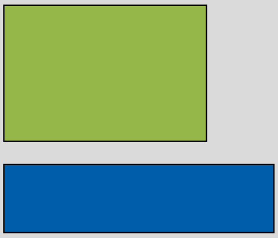
Ampliación

1 ¿Cuánto hay que aumentar el radio de la esfera inicial para que la longitud de la circunferencia máxima aumente en 1 km?

2 ¿Y si se desea duplicar el área del círculo máximo?

3 ¿Cuánto hay que aumentar el radio de la esfera inicial para que se duplique su volumen?

10 | Función lineal, función afín y función cuadrática
Rectángulos isoperimétricos



Se llaman rectángulos isoperimétricos a los rectángulos que tienen el mismo perímetro.

Si el perímetro es P, ¿cómo puedes averiguar la longitud de la base b, en función de la altura a?

¿Cuál es la fórmula que proporciona el área, A, de los rectángulos isoperimétricos en función de la altura?

1 Antes de contestar a las preguntas analiza algunos casos particulares.

Completa la siguiente tabla con algunos valores:

Perímetro (cm)	Longitud de la altura (cm)	Longitud de la base (cm)	Área (cm²)
40			
40			
40			
40			
40			
40	a	$b =$	$A =$

2 Elige otro valor para el perímetro y vuelve a completar una tabla como la anterior.

3 Representa gráficamente la función de la longitud de la base para cada uno de los casos particulares que has analizado.

¿Qué tipo de funciones son?

¿Qué propiedades tienen en común ambas gráficas? ¿Para qué valores de x tiene sentido dibujar la gráfica en cada caso?

4 Representa gráficamente la función $f(x) = x$. ¿Qué transformaciones algebraicas hay que realizar para pasar de la función $f(x) = x$, a cada una de las gráficas obtenidas en el **apartado 3**?

5 De todos los rectángulos isoperimétricos de perímetro P, ¿cuál es el que tiene área máxima?

Representa gráficamente la función del área para cada uno de los dos casos particulares que has analizado.

¿Qué propiedades tienen en común ambas gráficas?

6 Representa gráficamente la función $f(x) = x^2$. ¿Qué transformaciones algebraicas hay que realizar para pasar de la función $f(x) = x^2$, a cada una de las gráficas obtenidas en el **apartado 5**?

10 | Función lineal, función afín y función cuadrática
Rectángulos isoperimétricos

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad se pretende que los estudiantes se aproximen al estudio de las familias de las funciones lineales y cuadráticas a partir del análisis de casos particulares y de su generalización en un contexto geométrico.
- Se pretende que el alumnado investigue sobre el efecto que producen en las gráficas de las funciones $f(x) = a \cdot f\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ los cambios en los parámetros c y d, y las dilataciones verticales de factor $a = -1$.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

Perímetro (cm)	Longitud de la altura (cm)	Longitud de la base (cm)	Área (cm²)
40	1	19	19
40	5	15	75
40	10	10	100
40	15	5	75
40	19	1	19
40	a	$b = 20 - a$	$A = (20 - a) \cdot a = 20a - a^2$

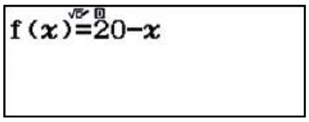
2

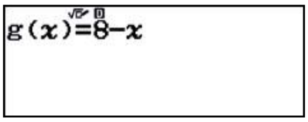
Respuesta abierta. Ejemplo: $P = 16$, $b = 8 - a$ y $A = (8 - a) \cdot a = 8a - a^2$.

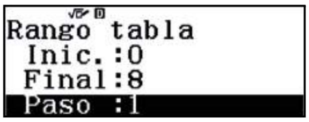
3

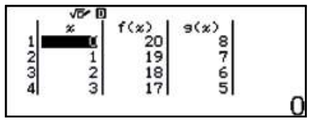
La longitud de la base se obtiene al despejar b en la expresión del perímetro de un rectángulo. Como la expresión del perímetro es $P = 2a + 2b$, $b = \frac{P}{2} - a$.

Las funciones $f(x) = 20 - x$ y $g(x) = 8 - x$ son afines. Para obtener sus gráficas se utiliza el menú *Tabla* (MENU 9) y se genera el código *QR* (SHIFT OPTN):







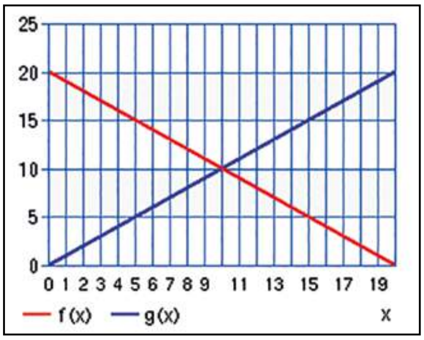


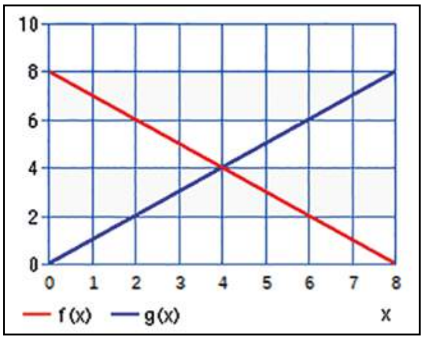
Ambas funciones tienen la misma pendiente y por tanto sus gráficas son rectas paralelas. Los valores de x para los que tiene sentido dibujar las gráficas son los que pertenecen al intervalo $\left[0, \frac{P}{2}\right]$.

Rectángulos isoperimétricos

4

En ambos casos se produce una dilatación vertical de factor –1. Hay una traslación vertical hacia arriba de 20 unidades para $f(x) = 20 - x$ y de 8 unidades para $g(x) = 8 - x$:



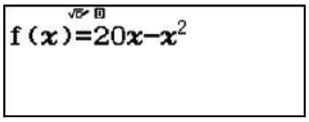


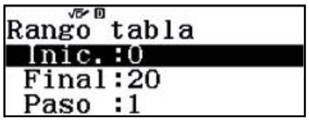
5

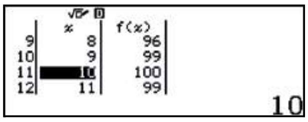
El área en los casos particulares analizados es $A = (20 - a) \cdot a = 20a - a^2$ para un rectángulo de perímetro 40 cm y $A = (8 - a) \cdot a = 8a - a^2$ si el perímetro es 16 cm. Generalizando, se obtiene que el área de un rectángulo de perímetro P es $A = \left(\frac{P}{2} - a\right) \cdot a = \frac{P}{2}a - a^2$. Todas las gráficas son parábolas convexas.

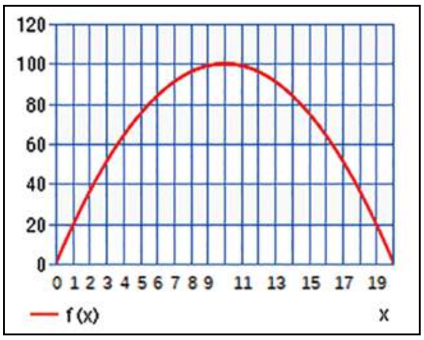
El área máxima se obtiene analizando los valores a partir de la tabla y de la gráfica o calculando el vértice de las parábolas mediante el menú *Ecuación/Función* (MENU ALPHA (–)).

Para P = 40 cm, (A = $20a - a^2$), se obtiene el área máxima con la tabla y la gráfica:

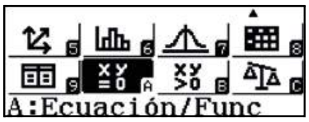


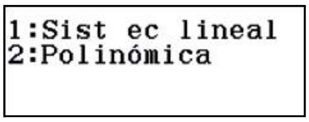


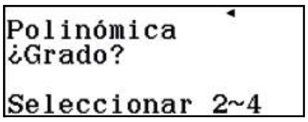


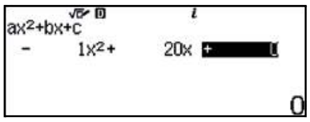


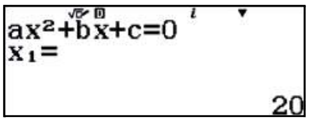
Con el menú *Ecuación/Función* además de las soluciones de la ecuación, se calcula también el vértice:

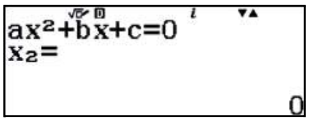


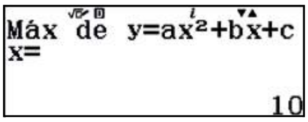


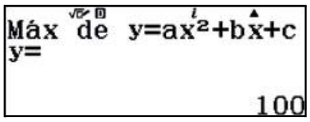






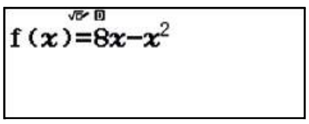


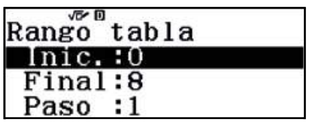


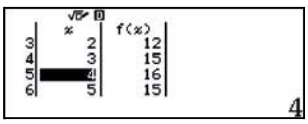


De las dos maneras, se obtiene que el área máxima se alcanza en x = 10 cm y su valor es 100 cm².

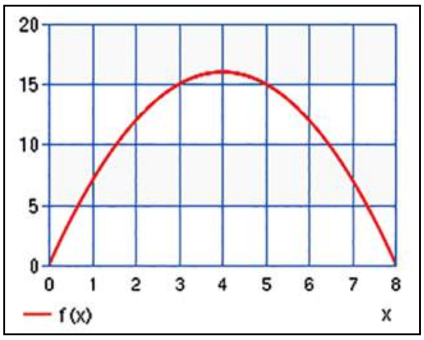
Al igual que antes, para P = 16 cm, ($A = 8a - a^2$), se utilizan los dos menús:

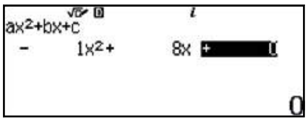


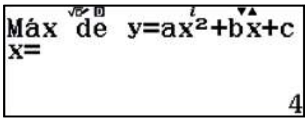


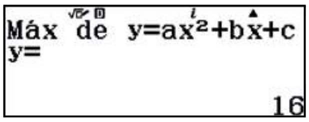


Rectángulos isoperimétricos









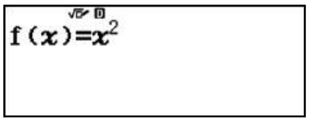
El área máxima se alcanza en x = 4 cm y su valor es 16 cm^2.

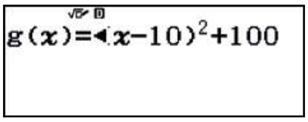
Generalizando, el área máxima se alcanza en $x = \frac{P}{4}$, es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado y su valor es $\left(\frac{P}{4}\right)^2$. El dominio de definición es $\left(0, \frac{P}{2}\right]$.

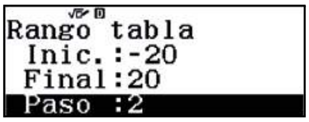
6

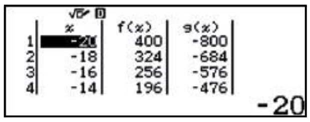
En ambos casos hay que hacer una dilatación vertical de factor −1, una traslación horizontal de $\frac{P}{4}$ unidades a la derecha y otra vertical de $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ unidades hacia arriba.

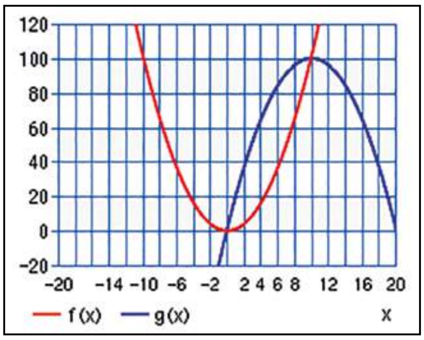
Perímetro = 40 cm. Área: $A = 20a - a^2 = -(a-10)^2 + 100$





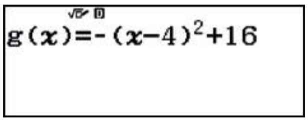


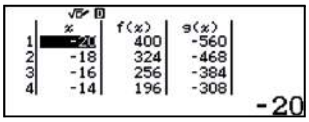


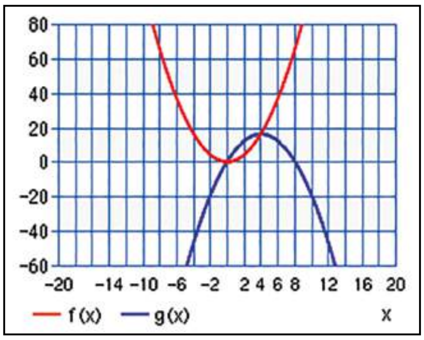


Traslación horizontal: 10 unidades a la derecha. Traslación vertical: 100 unidades hacia arriba.

Perímetro = 16 cm. Área: $A = 8a - a^2 = -(a-4)^2 + 16$



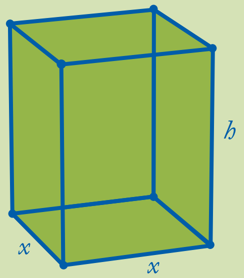




Traslación horizontal: 4 unidades a la derecha. Traslación vertical: 16 unidades hacia arriba.

Problema

Área de un prisma



En un prisma regular cuadrangular la suma de sus aristas es 160 cm.

1. Calcula el área total del prisma si la arista de la base es $x = 4$ cm.

2. Determina los valores que puede tomar x.

3. ¿Qué tipo de función es $S(x)$? Represéntala.

4. ¿Para qué valor de x el área es máxima?

5. ¿Para qué valores de x el área es 400 cm²?

1

El prisma regular cuadrangular consta de 8 aristas básicas iguales de longitud 4 cm y de 4 aristas laterales de longitud h cm correspondiente a la altura:

$$8 \cdot 4 + 4h = 160 \text{ cm}$$

Se resuelve la ecuación para obtener el valor de h:

$$h = 32 \text{ cm}$$

El área del prisma es:

$$S(4) = 2 \cdot 4^2 + 4(4 \cdot 32) = 544 \text{ cm}^2$$

2 **3**

Sea x la arista de la base y h la altura del prisma, la suma de las aristas es 160 cm:

$$8x + 4h = 160$$

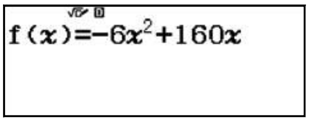
$$h = 40 - 2x$$

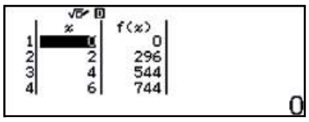
El área total del prisma es:

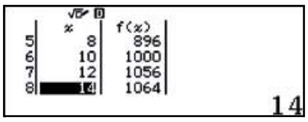
$$S(x) = 2x^2 + 4[x(40 - 2x)]$$

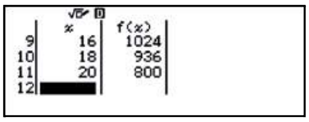
$$S(x) = -6x^2 + 160x,\ x \in [0, 20]$$

Se construye la tabla de valores de la función:

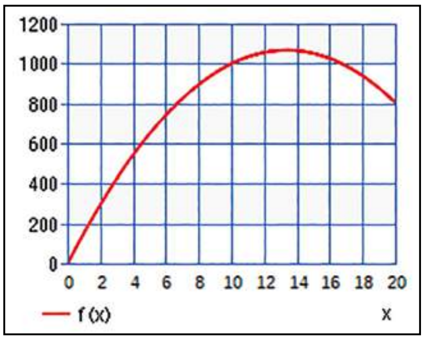








La función es una parábola convexa como se observa al generar el código *QR*:

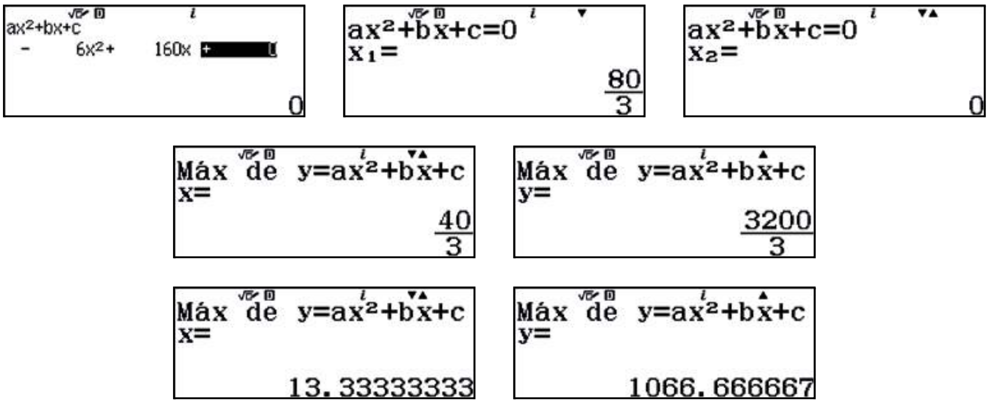


Problema
Área de un prisma

4

Para determinar el valor máximo del área, se utiliza el menú *Ecuación/Función*, que además de resolver la ecuación $S(x) = 0$, dando las raíces (cortes con el eje OX) de la parábola, proporciona las coordenadas del vértice y en consecuencia, al ser la parábola convexa, su valor máximo.

$$-6x^2 + 160x = 0$$



El área máxima se alcanza cuando $x = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$ cm y su valor es:

$$S\left(\frac{40}{3}\right) = \frac{3200}{3} \approx 1\,066{,}67 \text{ cm}^2$$

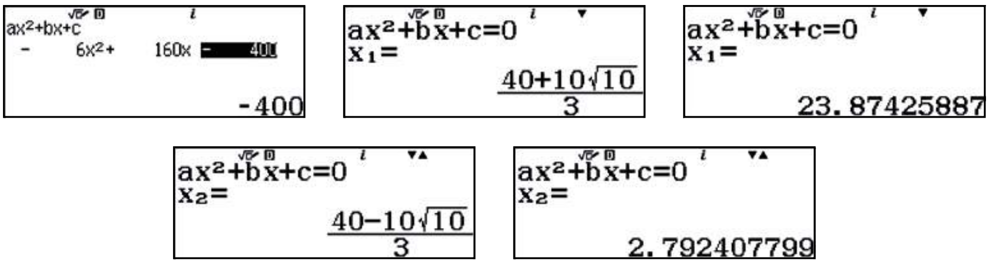
5

Para determinar los valores de x tales que el área del prisma sea 400 cm^2, se resuelve la ecuación:

$$S(x) = 400$$

$$-6x^2 + 160x = 400$$

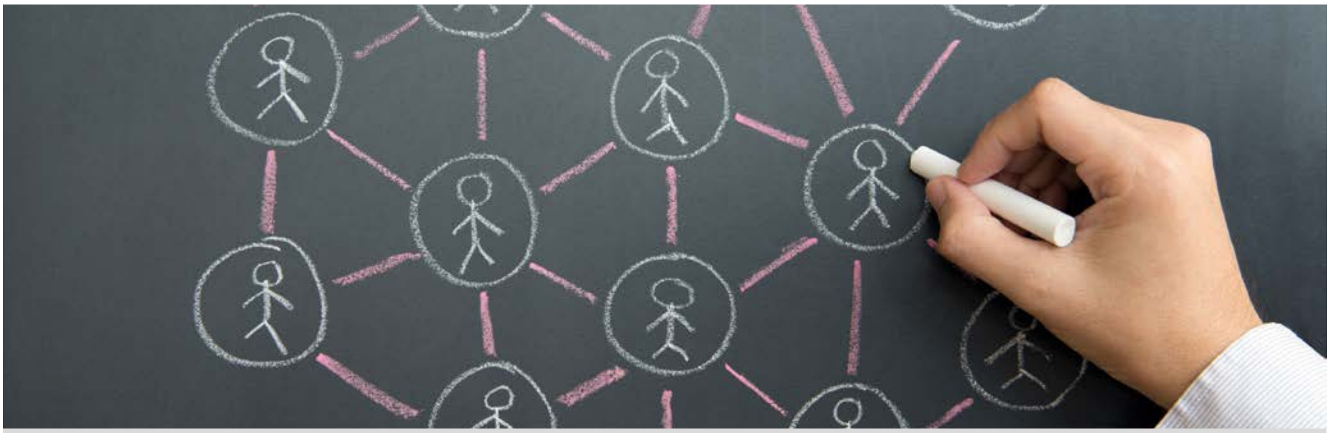
$$-6x^2 + 160x - 400 = 0$$



La primera solución no pertenece al dominio de la función, por lo que no se considera.

El área del prisma es 400 cm^2 cuando $x = \frac{40 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 2{,}79$ cm.

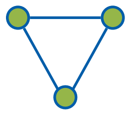
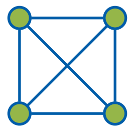
11 Función cuadrática
¿Cómo crece una red social?



Las redes sociales de internet se han convertido, sin lugar a duda, en un fenómeno social que ha revolucionado la comunicación e interacción que las personas teníamos hasta ahora.

Una red social es una estructura social formada por personas o entidades conectadas entre sí por algún tipo de relación o interés común.

La red social más pequeña que se puede establecer es la formada por dos personas y el vínculo que las une. Observa el siguiente cuadro donde se muestran las redes formadas por tres y cuatro personas respectivamente:

	Nº de personas que forman la red social:					
	2		3		4	
Vínculos		1		3		6

1 Si consideramos 5 personas, ¿cuántos vínculos se pueden establecer? ¿Y con 6 personas?

2 Realiza una tabla de valores con todos los datos que tienes a tu disposición.

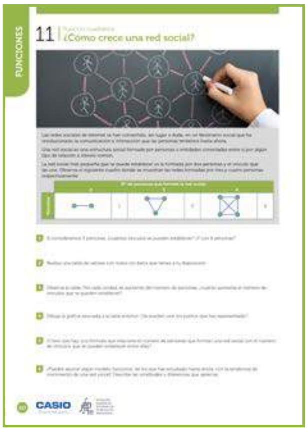
3 Observa la tabla. Por cada unidad de aumento del número de personas, ¿cuánto aumenta el número de vínculos que se pueden establecer?

4 Dibuja la gráfica asociada a la tabla anterior. ¿Se pueden unir los puntos que has representado?

5 ¿Crees que hay una fórmula que relacione el número de personas que forman una red social con el número de vínculos que se pueden establecer entre ellas?

6 ¿Puedes asociar algún modelo funcional, de los que has estudiado hasta ahora, con la tendencia de crecimiento de una red social? Describe las similitudes y diferencias que aprecias.

11 | Función cuadrática
¿Cómo crece una red social?



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

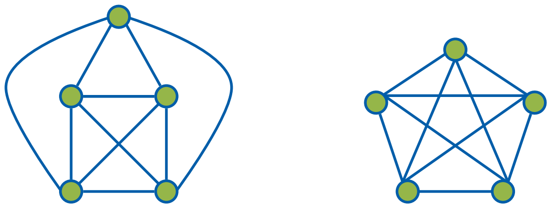
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad se presenta en un contexto cercano al alumnado para despertar su interés. Se pretende que explore las diferentes formas de representar esta situación, establecer conjeturas y modelizarla utilizando la función cuadrática.
- El desarrollo de la actividad se realiza con el menú *Estadística*. Se utiliza el cálculo directo de la regresión probando con las diferentes opciones de regresiones que proporciona la calculadora.

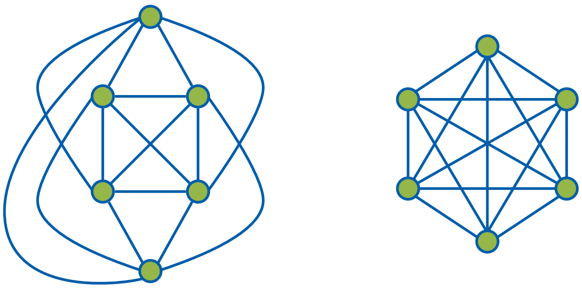
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Con cinco personas se establecen 10 vínculos, que se pueden representar de diferentes formas. Por ejemplo:



Del mismo modo, en una red de 6 personas se observan 15 vínculos:



Si la representación configura un polígono convexo y los vínculos se representan en su interior, se puede relacionar el número de vínculos en una red de n personas con el número de diagonales de un polígono de n vértices.

2

La tabla de valores es:

Número de personas	2	3	4	5	6
Número de vínculos	1	3	6	10	15

3

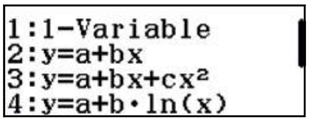
Se observa que el aumento del número de vínculos por cada persona que se une a la red, no es constante:

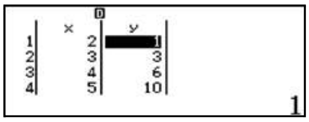
Número de personas	2		3		4		5		6
		+1		+1		+1		+1	
Número de vínculos	1		3		6		10		15
		+2		+3		+4		+5	

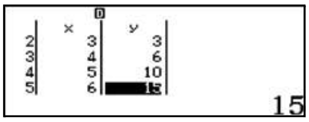
Este puede ser el punto de partida para que el alumnado utilice las sucesiones para obtener la generalización del número de vínculos.

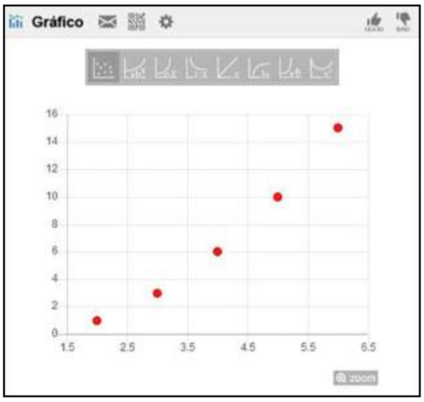
4

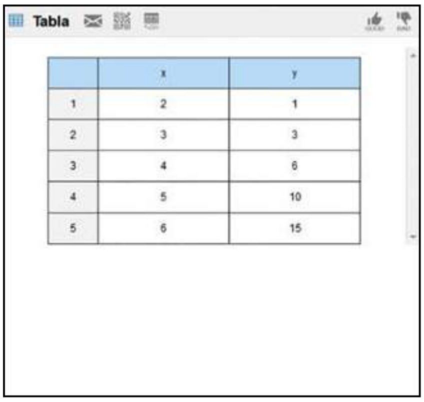
Se introducen los valores en el menú *Estadística* (MENU 6) y se escoge, por ejemplo, el modelo lineal: $y = a + bx$. Se obtiene la representación de la nube de puntos generando el código *QR* (SHIFT OPTN):











	x	y
1	2	1
2	3	3
3	4	6
4	5	10
5	6	15

Los puntos no pueden unirse ya que ambas variables son discretas. Sin embargo, para apreciar mejor la tendencia de crecimiento, en las gráficas se unirán, siguiendo los diferentes modelos funcionales de los que se dispone en la visualización en línea.

5

Si se representa la red mediante un polígono convexo, es fácil reconocer, que el número de vínculos coincide con el número de diagonales más el número de lados del polígono:

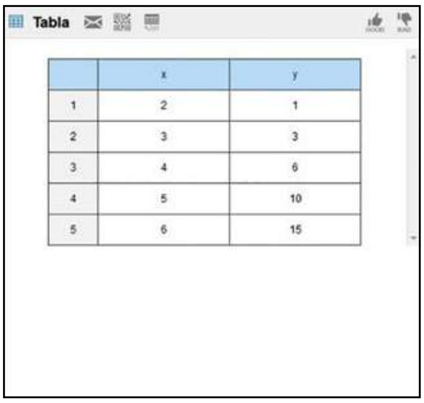
número de personas que forman la red = n

$$\text{número de vínculo} = n + \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{2n + n^2 - 3n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

6

La visualización en línea permite evaluar diferentes tipos de regresiones.

Como se observa, es la función cuadrática la que pasa por todos los puntos:



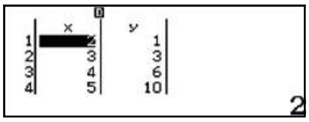
	x	y
1	2	1
2	3	3
3	4	6
4	5	10
5	6	15

¿Cómo crece una red social?

La regresión se obtiene directamente desde el menú *Estadística*. Se pulsa la tecla AC para regresar a la tabla de datos y se selecciona la regresión cuadrática mediante la secuencia de teclas OPTN 1 3:

```
1:Selec tipus
2:Editor
3:Càl 2-variables
4:Càlcul regress
```

```
1:1-Variable
2:y=a+bx
3:y=a+bx+cx²
4:y=a+b·ln(x)
```



La ecuación de la regresión se obtiene pulsando OPTN 4:

```
1:Selec tipus
2:Editor
3:Càl 2-variables
4:Càlcul regress
```

```
y=a+bx+cx2
a=0
b=-0.5
c=0.5
```

$$y = 0{,}5 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x$$

Que coincide con los cálculos efectuados en el **apartado 5** de la actividad.

Ampliación

1 María está conectada a una red con 171 vínculos, ¿cuántas personas forman esta red?

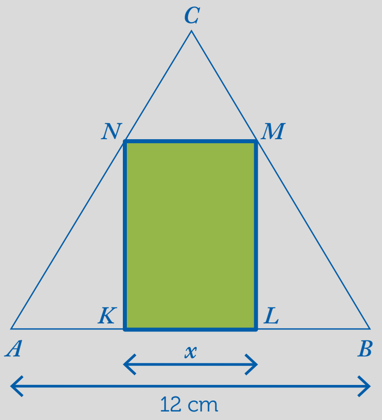
2 Rosana solamente recuerda que su red tiene más de 330 vínculos y menos de 360, ¿cuántas personas configuran la red de Rosana?

3 ¿Puede una red social estar formada por 1 230 vínculos? ¿Por qué?

4 ¿Cuántas personas forman una red social si los vínculos que las unen son más de 2 000 y menos de 2 500?

12 Función cuadrática

Área de un rectángulo inscrito en un triángulo equilátero



En un triángulo equilátero $\overset{\triangle}{ABC}$ de lado $\overline{AB}$ = 12 cm se ha inscrito un rectángulo $KLMN$ de lado $\overline{KL}$ = x cm.

1 Calcula el área del rectángulo $KLMN$ para x = 2 cm.

2 Determina el área $S(x)$ del rectángulo $KLMN$ en función de $x = \overline{KL}$.

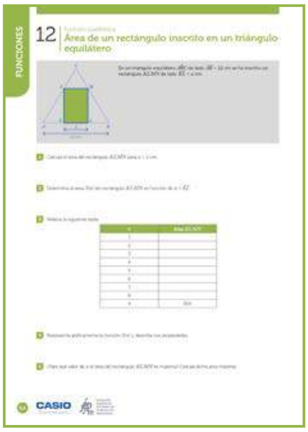
3 Rellena la siguiente tabla:

x	Área $KLMN$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
x	$S(x)$

4 Representa gráficamente la función $S(x)$ y describe sus propiedades.

5 ¿Para qué valor de x el área del rectángulo $KLMN$ es máxima? Calcula dicha área máxima.

Área de un rectángulo inscrito en un triángulo equilátero



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Calcular el valor máximo de una función
  - Representar gráficamente funciones.
  - Visualizar la simetría de la parábola.
  - Resolver ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 2 3

De la figura se deduce que:

$$\overline{AK} = \overline{BL} = 6 - \frac{x}{2}$$

$$\overline{MN} = \overline{CM} = \overline{CN} = x$$

$$\overline{AK} + \overline{BL} = 12 - x = \overline{AN} + \overline{BN}$$

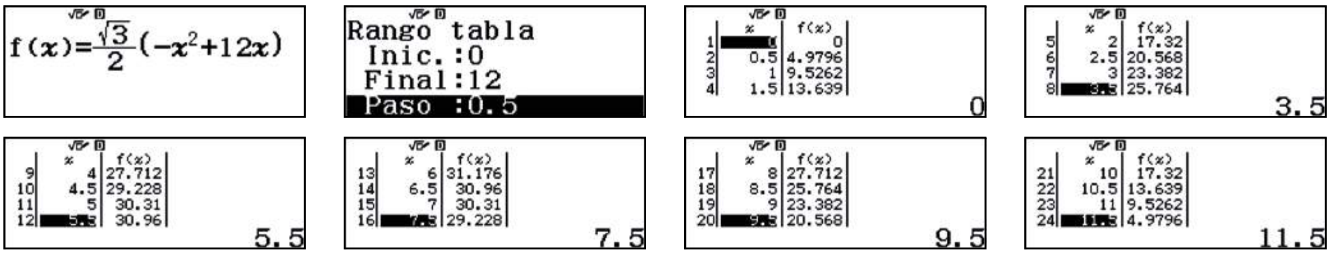
Por tanto, el área del rectángulo $KLMN$ es igual al área del triángulo equilátero $A\hat{B}C$ menos la suma de las áreas de dos triángulos equiláteros de lados x y $12 - x$, respectivamente:

$$S_{KLMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12 - x)^2\right)$$

Simplificando la expresión se obtiene:

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-x^2 + 12x),\ x \in [0, 12]$$

Se rellena la tabla de valores de esta función con el menú *Tabla*:



Si x = 2 cm, $S(2) = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17{,}32$ cm^2.

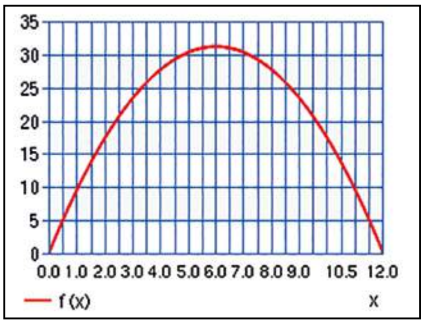
La tabla queda de la siguiente manera:

x	Área $KLMN$
1	9,53
2	17,32
3	23,38
4	27,12
5	30,96
6	31,18
7	30,31
8	27,71
x	$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-x^2 + 12x)$

Área de un rectángulo inscrito en un triángulo equilátero

4 5

Se utiliza el código *QR*:



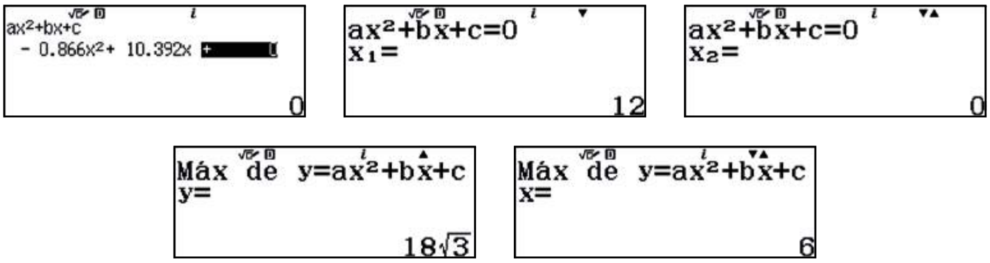
La gráfica de la función es una parábola convexa. El máximo se alcanza en el vértice, es decir, cuando $x = 6$ cm.

El menú *Ecuación/Función* permite hallar los puntos de corte con el eje de abscisas resolviendo la ecuación:

$$S(x) = 0$$

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-x^2 + 12x) = 0$$

Al mismo tiempo la calculadora muestra las coordenadas del vértice de la parábola, que en este caso corresponde al máximo de la función:



Los puntos de corte con el eje de abscisas son (0, 0) y (12, 0) .

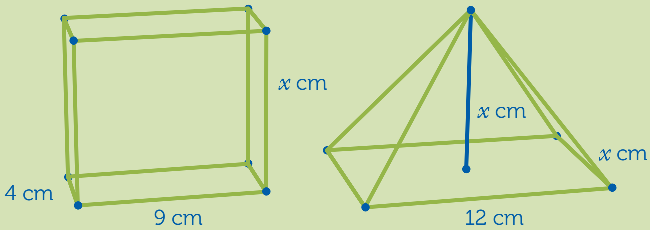
El valor máximo se alcanza cuando $x = 6$ cm y el área máxima es:

$$S(6) = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Finalmente, se observa que, para el valor máximo $\overline{MN}$ es paralela media del triángulo equilátero. Entonces, $\overline{KN}$ es igual a la mitad de la altura del triángulo equilátero.

Problema

Volúmenes de un ortoedro y una pirámide



En las figuras anteriores, las aristas del ortoedro miden 4, 9 y x cm. La altura de la pirámide rectangular mide x cm y las aristas de la base, 12 y x cm.

1. Calcula el volumen del ortoedro y de la pirámide para $x = 1$ cm.

2. Representa en los mismos ejes los dos volúmenes en función de x: $f(x)$ y $g(x)$.

3. ¿Qué tipos de funciones son? Estudia sus características.

4. ¿Para qué altura x, los dos volúmenes son iguales?

5. ¿Para qué altura x, el volumen del ortoedro es mayor o igual que el volumen de la pirámide?

1

Si $x = 1$ cm, el volumen del ortoedro es:

$$V_{ortoedro} = 9 \cdot 4 \cdot 1 = 36 \text{ cm}^3$$

Y el de la pirámide:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \text{ cm}^3$$

2 **3**

El volumen del ortoedro en función de x está expresado por:

$$f(x) = 9 \cdot 4 \cdot x = 36x$$

El volumen de la pirámide en función de x es:

$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot x \cdot x = 4x^2$$

Para realizar una tabla conjunta de las dos funciones, en el menú *Configuración* se elige la *opción 2:*

SHIFT MENU ▼

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

▼

```
1:Result fracción
2:Complejos
3:Estadística
4:Hoja de cálculo
```

2

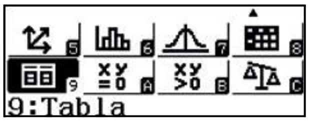
```
1:Ecuación/Func
2:Tabla
3:Dec periódico
4:Simplificar
```

2

```
1:f(x)
2:f(x),g(x)
```

En el menú *Tabla* se introducen las dos funciones:

MENU 9 =



3 6 x =

```
f(x)=36x
```

4 x x² =

```
g(x)=4x²
```

0 = 1 0 = • 5 = =

```
Rango tabla
 Inic. :0
 Final:10
 Paso  :.5
```

	x	f(x)	g(x)
1	0	0	0
2	0.5	18	1
3	1	36	4
4	1.5	54	9

0

	x	f(x)	g(x)
5	2	72	16
6	2.5	90	25
7	3	108	36
8	3.5	126	49

3.5

	x	f(x)	g(x)
9	4	144	64
10	4.5	162	81
11	5	180	100
12	5.5	198	121

5.5

	x	f(x)	g(x)
13	6	216	144
14	6.5	234	169
15	7	252	196
16	7.5	270	225

7.5

	x	f(x)	g(x)
17	8	288	256
18	8.5	306	289
19	9	324	324
20	9.5	342	361

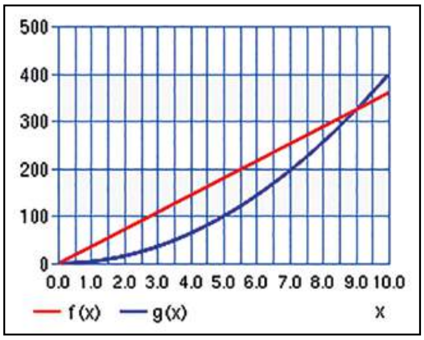
324

Problema

Volúmenes de un ortoedro y una pirámide

Para representar las dos funciones se utiliza el código *QR*:

SHIFT OPTN =



La gráfica de la función $f(x)$ es una recta de pendiente 36 que pasa por el origen de cordenadas (0,0). La representación gráfica de la función $g(x)$ es una parábola cóncava.

4

Se igualan las funciones $f(x)$ y $g(x)$ para determinar el valor de la altura para el cual los volúmenes de ambos poliedros son iguales:

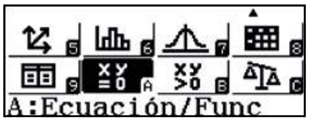
$$f(x) = g(x)$$

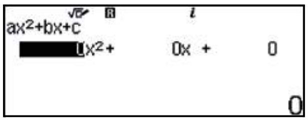
$$36x = 4x^2$$

$$4x^2 - 36x = 0$$

En el menú *Ecuación/Función* se resuelve la ecuación de segundo grado:

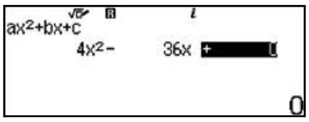
MENU (−) 2 2

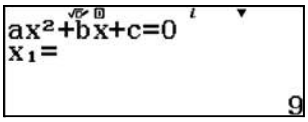


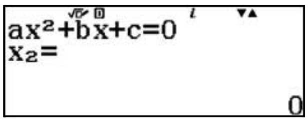


Se introducen los coeficientes y se resuelve:

4 = − 3 6 = 0 =   =   =







Los valores de las dos funciones son iguales cuando x = 9 cm y x = 0 cm.

En el primer caso, $f(9) = g(9)$, el volumen de ambos poliedros es 324 cm^3:

En el segundo caso, $f(0) = g(0)$, el volumen es 0 cm^3, por lo que no existen los poliedros.

Este resultado se puede observar en las tablas y en la gráfica del **apartado anterior**.

Problema

Volúmenes de un ortoedro y una pirámide

5

En la gráfica de las funciones se observa que el volumen del ortoedro es igual o mayor que el de la pirámide si la altura varía de 0 a 9 cm.

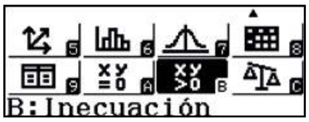
Analíticamente, la solución se obtiene de la resolución de la inecuación:

$$f(x) \geq g(x)$$

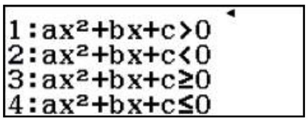
$$36x \geq 4x^2$$

$$\begin{cases} -4x^2 + 36x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

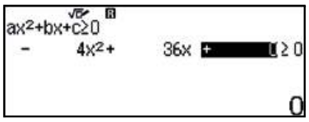
MENU ⁰,,, 2



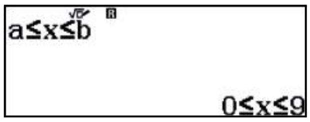
3



(−) 4 = 3 6 = 0 =

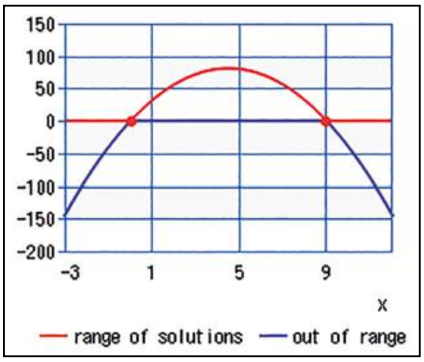


=



Obteniendo como solución $0 \leq x \leq 9$.

Se utiliza el código *QR* para representar gráficamente la solución de la inecuación:



En definitiva, el volumen del ortoedro es mayor o igual que el de la pirámide en el intervalo]0, 9]. Para alturas mayores de 9 cm, el volumen del ortoedro siempre será menor que el de la pirámide.

13 | Función cuadrática
Choque frontal

El test SHARP para cascos y el EURO NCAP para coches, ofrecen información del nivel de seguridad para los usuarios. Ambos se han convertido en un estándar de referencia en su campo.

Las pruebas de EURO NCAP son cada vez más exigentes. A día de hoy, los coches exhiben un máximo de cinco estrellas, no solo por la protección de los pasajeros y de los peatones ante una colisión, sino también por su capacidad de evitar accidentes. Las pruebas representan casos reales de accidentes que podrían ocasionar lesiones personales o la muerte. Los fabricantes deben demostrar que sus coches están equipados, de serie, con la tecnología necesaria para evitar o mitigar accidentes y que cuando estos se produzcan, la protección sea la adecuada para los pasajeros y los demás usuarios de la carretera.

En las imágenes se observa la diferencia entre el mismo test para un coche de hace 20 años y uno actual. Aunque sea visible la mejora de los sistemas de seguridad pasiva, ¿no debemos ser más activos en pro de nuestra propia seguridad?

1 En una caída libre, en el instante inicial, un objeto se encuentra a su máxima altura (h_0) y sin velocidad inicial, de manera que su energía inicial es exclusivamente energía potencial ($Ep_0 = m \cdot g \cdot h_0$). A medida que transcurre la caída, la energía potencial se va transformando en energía cinética ($Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2$) de tal forma que, en el momento de la colisión contra el suelo, toda la energía potencial en el momento inicial (Ep_0) se ha transformado en energía cinética final (Ec_F), dándose la siguiente igualdad:

$$Ep_0 = Ec_F$$
$$m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_F{}^2$$

En el caso del choque frontal entre dos vehículos de igual masa y que circulan a la misma velocidad y sentido contrario ($v_1 = -v_2 = v_{choque}$), la energía cinética total será la suma de las energías cinéticas de ambos vehículos:

$$Ec_{choque} = Ec_{v_1} + Ec_{v_2} = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2_{choque} + \frac{1}{2}\, m \cdot v^2_{choque} = m \cdot v^2_{choque}$$

Utilizando la información anterior y sabiendo que la altura media de una planta de un edificio es de 3 m, realiza una tabla de equivalencia que relacione la velocidad en un choque frontal entre dos vehículos de igual masa que circulan a la misma velocidad (expresada en km/h), con el número de plantas de caída libre de uno de ellos, necesarias para que la energía cinética en el momento del choque frontal sea igual a la energía cinética de la caída en el momento del impacto con el suelo.

Choque frontal

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP XII Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad está diseñada para concienciar al alumnado, como usuario de distintos medios de transporte, en el uso de medidas de seguridad pasiva y en la conducción responsable. Para resolverla hay que tener en cuenta que estamos buscando la equivalencia energética entre dos situaciones distintas: un choque frontal de dos vehículos de igual masa a igual velocidad y el impacto contra el suelo en una caída libre de uno de esos coches. Esta equivalencia la hacemos a través de las energías cinéticas en el momento del impacto en ambas situaciones.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Si se iguala a la energía cinética de la caída libre en el momento del impacto contra el suelo quedaría:

$$Ec_{F_{caída}} = Ec_{choque} \Rightarrow \frac{1}{2}\, m \cdot v_{caída}^2 = m \cdot v_{choque}^2$$

Por lo que la equivalencia es:

$$v_{caída}^2 = 2 \cdot v_{choque}^2 \Rightarrow v_{caída} = \sqrt{2} \cdot v_{choque}$$

Sin embargo, lo que se busca es la equivalencia entre velocidad de una situación y la altura en la otra, por lo que se tiene que:

$$Ep_0 = Ec_{caída} \Rightarrow Ep_0 = Ec_{choque}$$

$$m \cdot g \cdot h_0 = m \cdot v_{choque}^2$$

$$h_0 = \frac{v_{choque}^2}{g}$$

Se modifica la expresión para que la velocidad (que viene dada en km/h) se exprese en m/s:

$$h_0 = \frac{1}{g}\left(\frac{v_{choque} \cdot 1000}{3600}\right)^2$$

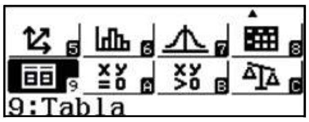
O lo que es lo mismo:

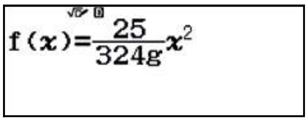
$$h_0 = \frac{25}{324 \cdot g}\, v_{choque}^2$$

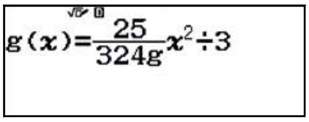
Para obtener el número de plantas del edificio solo se divide la expresión anterior entre 3 y se realiza la tabla de valores:

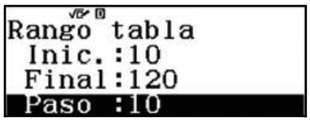
2 5 ▭ 3 2 4 SHIFT 7 ▼ 1 1 ▶ x x²

= = 1 0 = 1 2 0 = 1 0

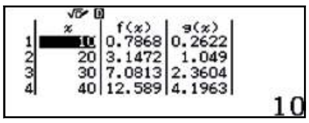


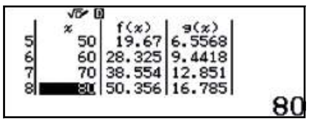


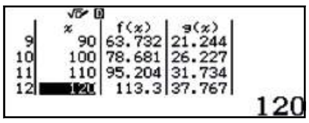




= =



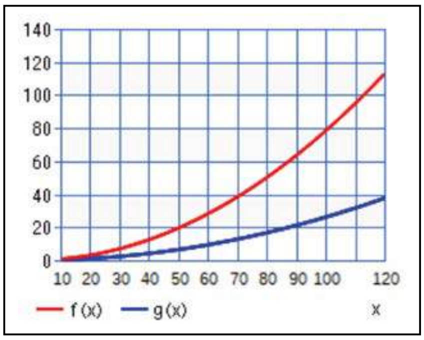




13 | Función cuadrática
Choque frontal

Se utiliza el código *QR* (SHIFT OPTN) para representar gráficamente la función cuadrática:

1/1



Se aprecia como la energía cinética en un choque frontal entre dos vehículos (de igual masa) que circulen ambos a una velocidad de 50 km/h, equivale a la energía que tiene cualquiera de ellos al impactar contra el suelo si cae desde una altura de aproximadamente 20 metros o, lo que es lo mismo, desde lo alto de un edificio de aproximadamente 7 plantas. Se comenta con el alumnado otros resultados que aparecen en las tablas y se enfatiza el hecho de que, como el modelo es cuadrático, si la razón entre dos velocidades de choque es k, la razón entre las alturas es k^2; entonces, si en lugar de chocar a 10 km/h choca a 30 km/h el valor correspondiente para la altura será aproximadamente:

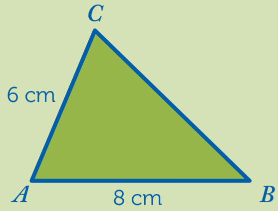
$$0{,}7868 \text{ m} \cdot 3^2 = 7{,}0813 \text{ m}$$

Problema

Función área de un triángulo. Área máxima

Determina el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de lados $\overline{AB}$ = 8 cm, $\overline{AC}$ = 6 cm que tiene área máxima.

En este caso, calcula el valor del lado $\overline{BC}$.



Se resuelve este problema de tres formas distintas:

Solución 1

El área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ en función del ángulo $\hat{A}$ es:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot sen\ \hat{A}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\ sen\ \hat{A}$$

$$S(x) = 24 \cdot sen\ x$$

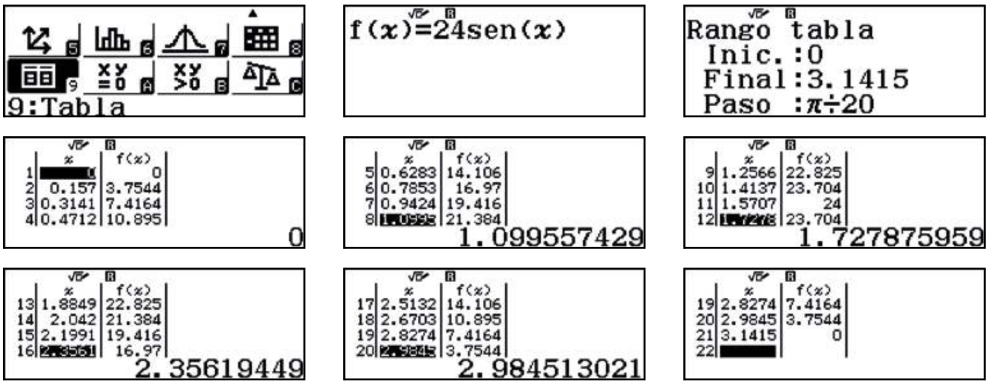
Se construye la tabla de valores de la función área:

$$S(x) = 24 \cdot sen\ x,\ 0 \leq x \leq \pi$$

Al menú *Tabla* se accede pulsando las teclas MENU 9.

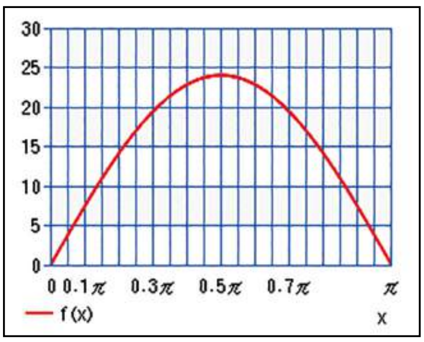
Se indican los valores siguientes: Inicial x = 0 rad, Final x = π rad y Paso $\frac{\pi}{20}$ rad.

Se cambia a radianes mediante la secuencia SHIFT MENU 2 2.



Se observa en la tabla que el valor máximo se alcanza cuando x = 1,5707 cm y el área máxima es 24 cm^2.

Se dibuja la función utilizando el código *QR* a través de las teclas SHIFT OPTN:



De la gráfica se deduce que el máximo se alcanza cuando $x = \frac{\pi}{2}$ rad. Es decir, cuando el triángulo es rectángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es a = 10 cm y el área máxima es 24 cm^2.

Problema
Función área de un triángulo. Área máxima

Solución 2

Se utiliza la fórmula de Herón:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)\,(a+b-c)}}{4}$$

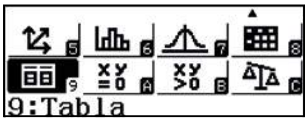
El área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es:

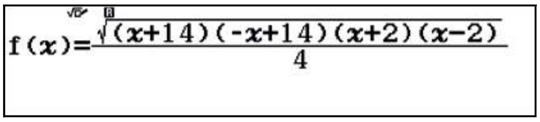
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+14)(-a+14)(a+2)\,(a-2)}}{4},\ a < 8+6 = 14,\ a+6 > 8$$

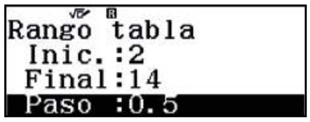
$$S(x) = \frac{\sqrt{(x+14)(-x+14)(x+2)\,(x-2)}}{4},\ 2 < x < 14$$

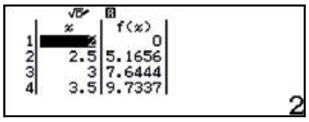
Se construye la tabla de la función anterior:

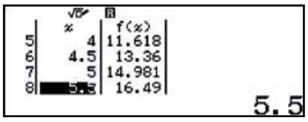
MENU 9

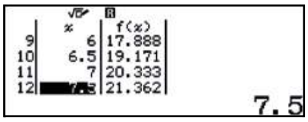


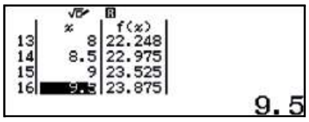


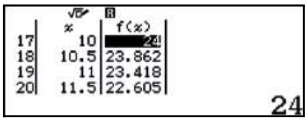


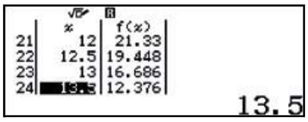






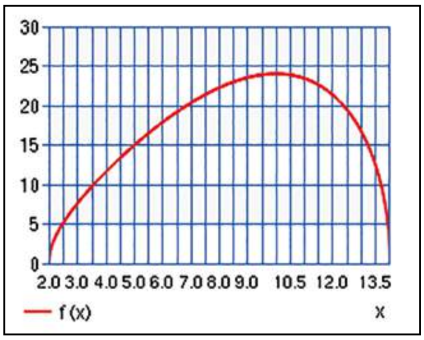






En la tabla se aprecia que el valor máximo se alcanza cuando x = 10 cm y el área máxima es 24 cm^2.

Se dibuja la función utilizando el código *QR*:



En la gráfica se observa que el máximo se alcanza cuando x = 10 cm. Es decir, cuando el triángulo es rectángulo, ya que cumple el teorema inverso de Pitágoras.

El área máxima es 24 cm^2.

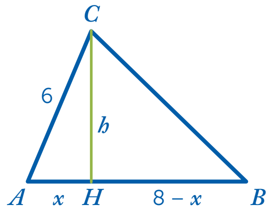
Problema

Función área de un triángulo. Área máxima

Solución 3

Si la altura del triángulo es $\overline{CH}$ y $\overline{AH} = x$, se tiene que $\overline{BH} = 8 - x$.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{AHC}$:



$$6^2 - x^2 = h^2,\ h = \sqrt{36 - x^2}$$

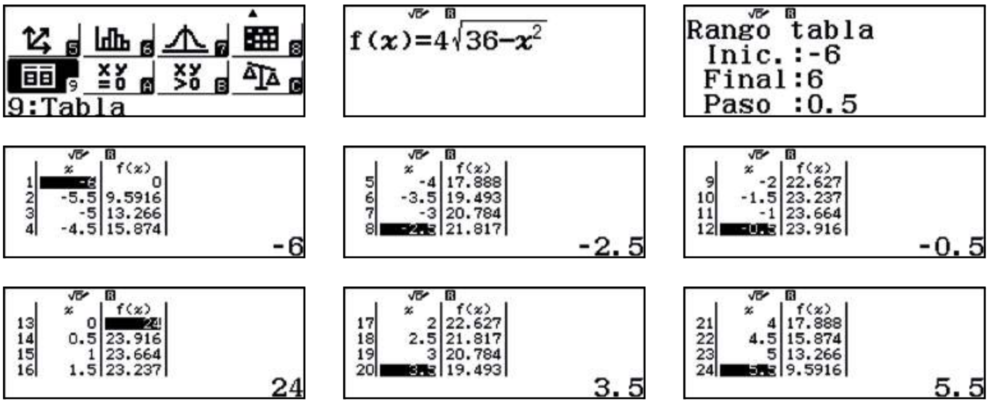
El área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h = 4\sqrt{36 - x^2}$$

$$S(x) = 4\sqrt{36 - x^2},\ -6 < x < 6$$

Se construye la tabla de la función anterior:

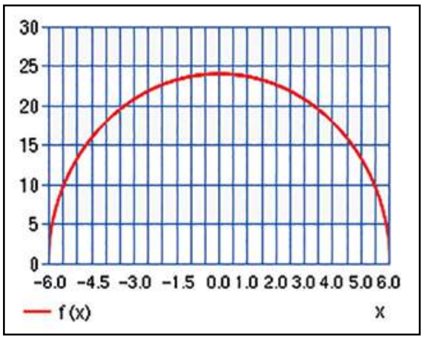
MENU 9



En la tabla se observa que el valor máximo se alcanza cuando $x = 0$ cm que corresponde al área máxima de 24 cm^2.

Se dibuja la función utilizando el código *QR*:

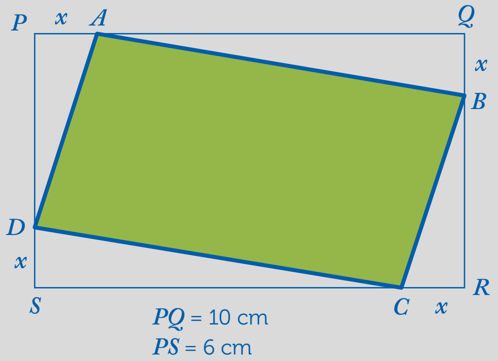
SHIFT OPTN



Si se observa la gráfica, el máximo se alcanza cuando $x = 0$ cm; es decir, cuando el triángulo es rectángulo y el área máxima es 24 cm^2.

Si se aplica el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es $a = 10$ cm.

14 | Función cuadrática
Área de un cuadrilátero



En el rectángulo $PQRS$ de lados $\overline{PQ}$ = 10 cm y $\overline{PS}$ = 6 cm se inscribe el paralelogramo $ABCD$.

Los vértices A, B, C, D pertenecen a los lados $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$, respectivamente, de forma que:

$$\overline{PA} = \overline{QB} = \overline{RC} = \overline{SD} = x$$

1 Calcula el área del cuadrilátero $ABCD$ para x = 1 cm.

2 ¿Qué valores puede tomar x?

3 Rellena la siguiente tabla:

x	Área $ABCD$
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	
4,5	
5	
x	$S(x)$

4 ¿Qué tipo de función es $S(x)$? Enumera sus características y represéntala gráficamente.

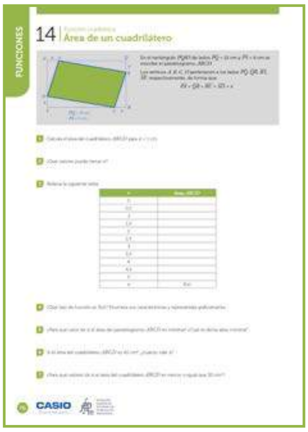
5 ¿Para qué valor de x el área del paralelogramo $ABCD$ es mínima? ¿Cuál es dicha área mínima?

6 Si el área del cuadrilátero $ABCD$ es 40 cm², ¿cuánto vale x?

7 ¿Para qué valores de x el área del cuadrilátero $ABCD$ es menor o igual que 30 cm²?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

14 | Función cuadrática
Área de un cuadrilátero



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

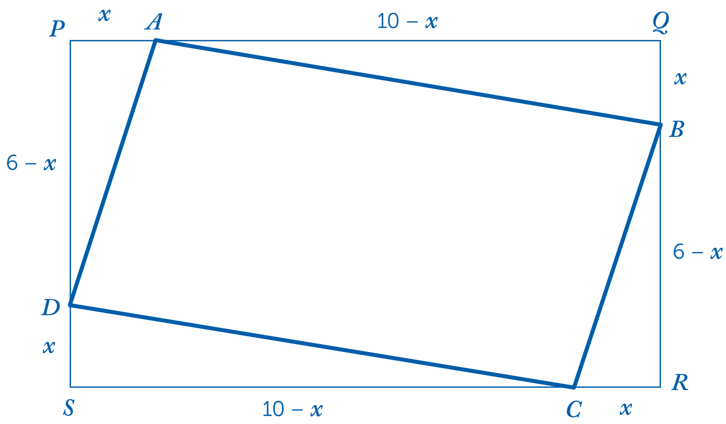
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Calcular el valor mínimo de una función.
  - Representar funciones gráficamente.
  - Resolver ecuaciones de segundo grado.
  - Resolver inecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 2 3

De la figura se deduce que el área del cuadrilátero $ABCD$ es igual al área del rectángulo $PQRS$ menos la suma de las áreas de los triángulos rectángulos PAD, QAB, RCB y SCD, por tanto, el área viene expresado por:



$$S_{ABCD} = 10 \cdot 6 - \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6 - x) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot (10 - x)\right) =$$

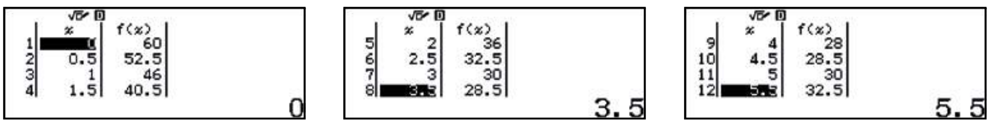
$$10 \cdot 6 - \left(\frac{2 \cdot x \cdot (6 - x)}{2} + \frac{2 \cdot x \cdot (10 - x)}{2}\right) =$$

$$10 \cdot 6 - (x \cdot (6 - x) + x \cdot (10 - x))$$

Simplificando la expresión se obtiene:

$$S(x) = 2x^2 - 16x + 60,\ x \in [0, 6]$$

Para construir la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:



En la tabla se observa que $S(1) = 46$ cm^2.

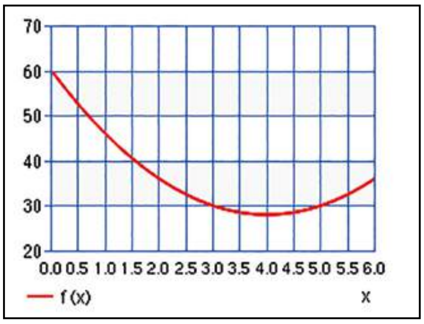
La tabla queda de la siguiente manera:

x	Área $ABCD$
0	60
0,5	52,5
1	46
1,5	40,5
2	36
2,5	32,5
3	30
3,5	28,5
4	28
4,5	28,5
5	30
x	$S(x) = 2x^2 - 16x + 60$

4

La representación de la función se obtiene mediante el código *QR*:

1/1



La gráfica de la función $S(x)$ es una parábola cóncava.

5

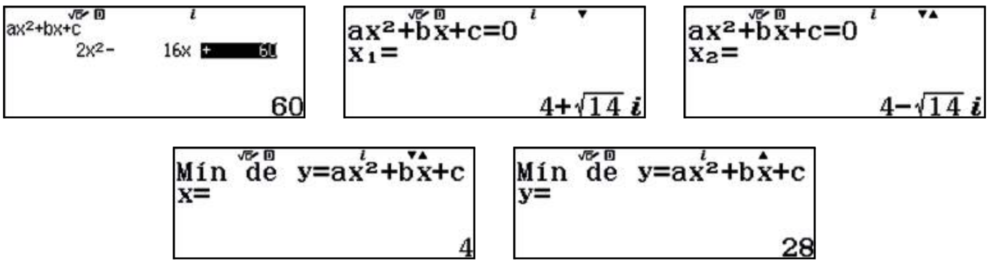
En la gráfica se observa que el mínimo se alcanza en el vértice: $x = 4$.

El menú *Ecuación/Función* permite hallar los puntos de corte con el eje de abscisas resolviendo la ecuación:

$$S(x) = 0$$

$$2x^2 - 16x + 60 = 0$$

La calculadora muestra también las coordenadas del vértice de la parábola, que en este caso corresponde al mínimo de la función:



En consecuencia, el mínimo se alcanza en $x = 4$ cm y el área mínima del cuadrilátero $ABCD$ es $S(4) = 28$ cm².

6

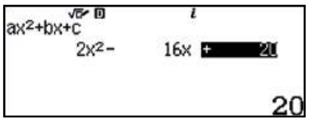
Para determinar los valores de x para los que el área del cuadrilátero $ABCD$ es 40 cm², se resuelve la ecuación:

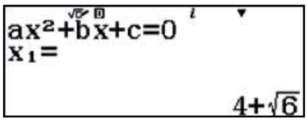
$$S(x) = 40$$

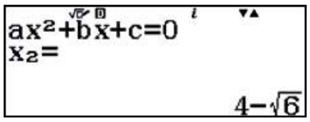
$$2x^2 - 16x + 60 = 40$$

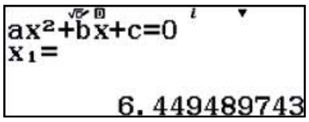
$$2x^2 - 16x + 20 = 0$$

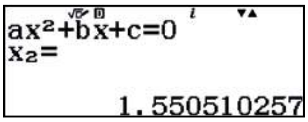
Se utiliza el menú *Ecuación/Función*:











La primera solución no pertenece al dominio.

Así pues, el área del cuadrilátero es 40 cm² cuando $x = 4 - \sqrt{6} \approx 1{,}55$ cm.

7

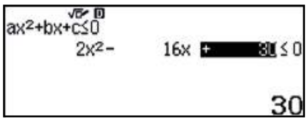
Para determinar los valores para los que el área del cuadrilátero $ABCD$ es menor o igual que 30 cm² se resuelve la inecuación:

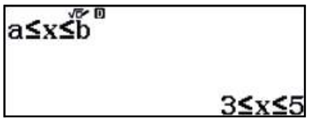
$$S(x) \le 30$$

$$2x^2 - 16x + 60 \le 30$$

$$2x^2 - 16x + 30 \le 0$$

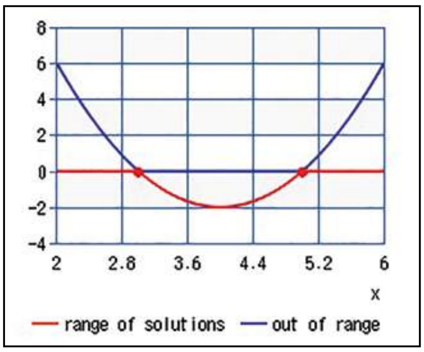
Se utiliza el menú *Inecuación*:





El área del cuadrilátero $ABCD$ es menor o igual que 30 cm² cuando $x \in [3, 5]$.

Con el código *QR* se obtiene la representación gráfica de la solución de la inecuación:

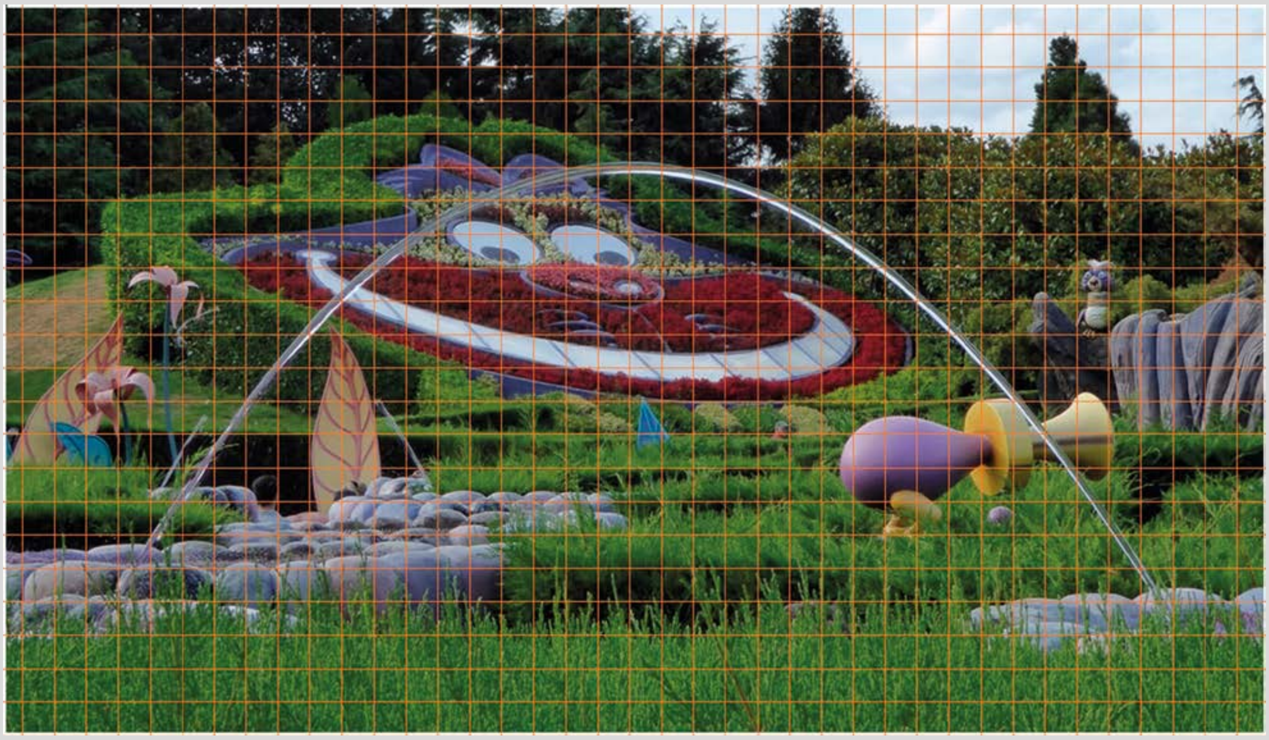


15 | Función cuadrática
Trayectoria parabólica

Cuando vamos a un parque y bebemos agua de un surtidor u observamos los chorros de agua de una fuente, no solemos imaginarnos que esa figura esté relacionada con el bote de una pelota o con la trayectoria que describe una piedra cuando la lanzamos.

Desde el punto de vista matemático todas las situaciones anteriores son equivalentes entre sí, debido a que todas ellas se pueden describir utilizando un mismo modelo matemático: la función cuadrática.

Aunque Galileo Galilei haya pasado a la historia como el constructor del primer telescopio y representar el símbolo de la lucha contra la autoridad y de la libertad en la investigación, uno de sus grandes descubrimientos científicos fue el determinar la trayectoria parabólica de los proyectiles.



Observa la imagen anterior y encuentra un modelo funcional que se ajuste al chorro de agua que aparece en la misma.

15 | Función cuadrática
Trayectoria parabólica

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

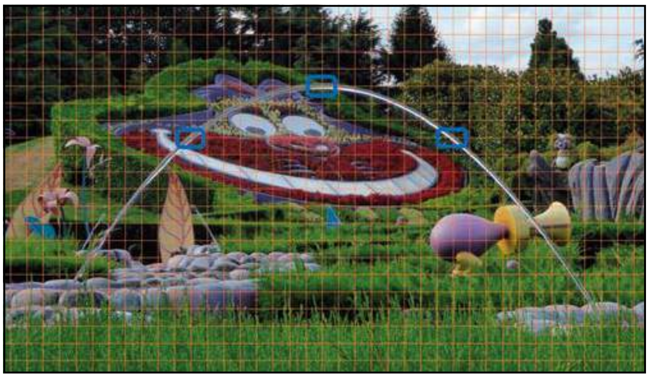
4º de ESO

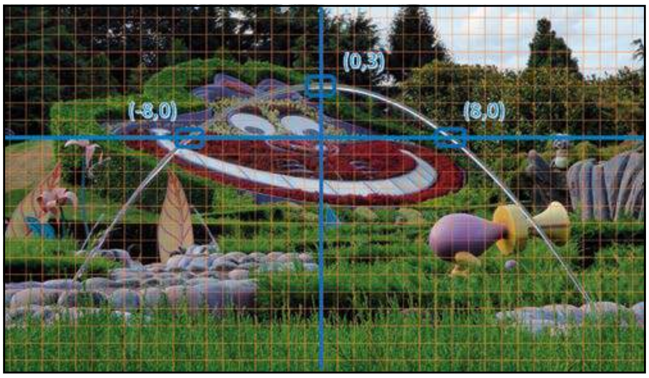
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- El interés de esta actividad, no se centra en la corrección del modelo buscado, sino en el proceso que debe llevar al alumnado a encontrarlo. La elección de un sistema de referencia adecuado, las estrategias de cálculo utilizadas, la comparación entre los distintos modelos y las transformaciones que llevan de unos a otros, son los aspectos más interesantes de esta actividad.
- Al tratarse de una actividad abierta se puede crear entre el alumnado una sensación de desorientación, de no saber por dónde comenzar. Para evitar esto se ha superpuesto una rejilla a la imagen para ayudar a elegir los puntos que servirán para encontrar el modelo. Se realizarán dos elecciones de puntos y de sistemas de referencia diferentes que conducirán a dos modelos distintos. Posteriormente se intentará transformar un modelo en otro.
- En esta actividad se utiliza los menús *Ecuación/Función* (MENU (−)) y *Tabla* (MENU 9).

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

Se eligen los puntos que más se ajustan a la rejilla y se sitúan los ejes de coordenadas. Esta primera elección se ha hecho teniendo en cuenta la simetría de la parábola.



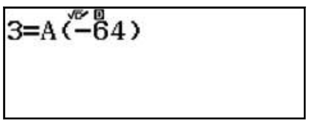


Una vez obtenidas las coordenadas de los puntos (–8,0), (0,3) y (8,0), la propuesta de modelo es:

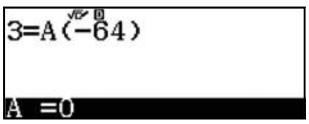
$$f(x) = a \cdot (x^2 - 64)$$

Para el cálculo de a, se sustituye el punto (0,3) y se utiliza la función *SOLVE*:

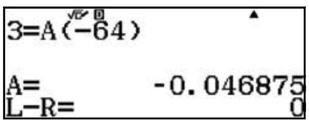
$$3 = a \cdot (-64)$$



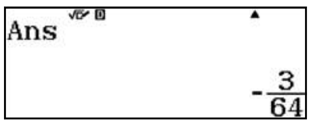
SHIFT CALC



=



Ans =



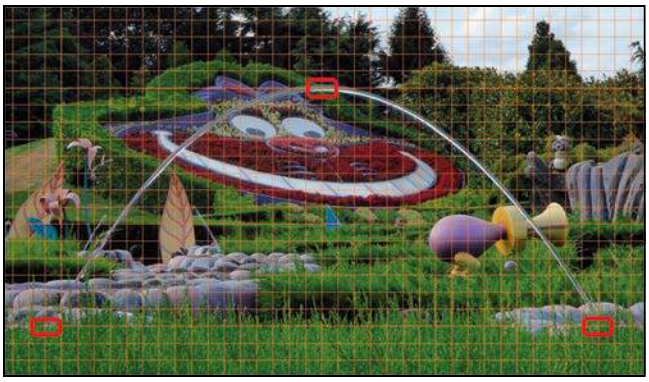
Se obtiene la función:

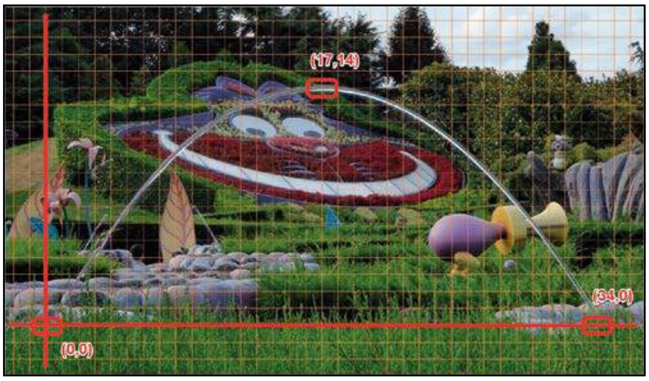
$$f(x) = -\frac{3}{64}x^2 + 3$$

15 Función cuadrática
Trayectoria parabólica

SEGUNDO EJEMPLO DE SOLUCIÓN

La segunda elección de puntos y del sistema de referencia es el siguiente:



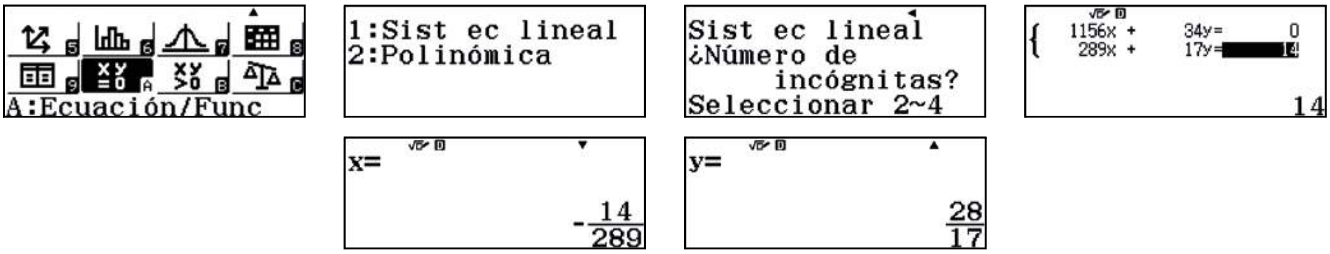


Se puede optar, como en el primer ejemplo de solución, por volver a utilizar las identidades notables para plantear el modelo. Sin embargo, se resuelve por un método más general.

Se plantea y se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(34)=0 \\ f(17)=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 0 \\ a\cdot 34^2 + b\cdot 34 + c = 0 \\ a\cdot 17^2 + b\cdot 17 + c = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 1156\cdot a + 34\cdot b = 0 \\ 289\cdot a + 17\cdot b = 14 \end{cases}$$

Se utiliza la calculadora para resolver el sistema:

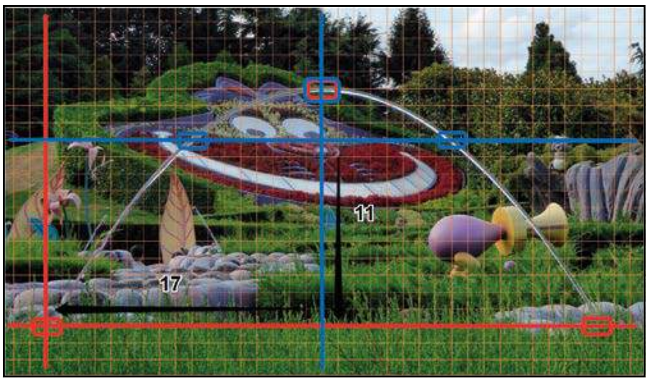


Se obtiene para el segundo modelo:

$$f(x) = -\frac{14}{289}\cdot x^2 + \frac{28}{17}\cdot x$$

Observación

La elección de distintos sistemas de referencia provoca que se obtengan diferentes modelos de función cuadrática. Para compararlos basta con realizar las trasformaciones algebraicas pertinentes. Ahora bien, esto no va a ser posible debido a los errores de aproximación que se cometen en la elección de los puntos.



Trayectoria parabólica

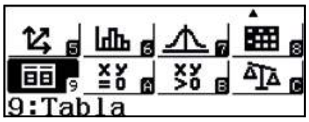
Si se transforma el primer modelo en el segundo quedaría:

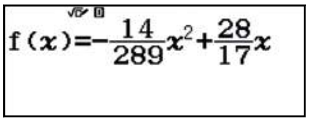
$$f(x) = -\frac{3}{64} \cdot (x - 17)^2 + 3 + 11$$

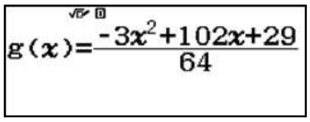
Y operando:

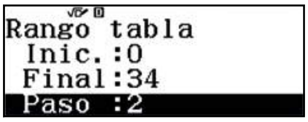
$$f(x) = \frac{-3x^2 + 102 \cdot x + 29}{64}$$

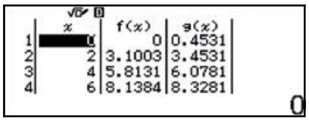
Se utiliza el menú *Tabla* para dibujar tanto el modelo original como el transformado:





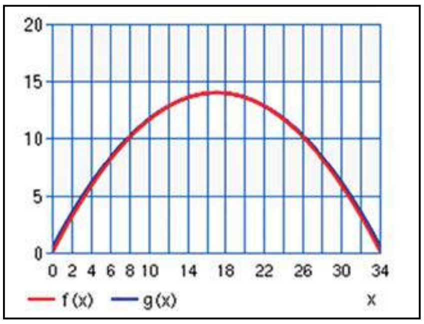




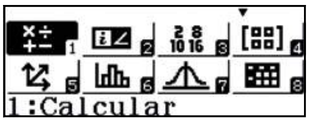


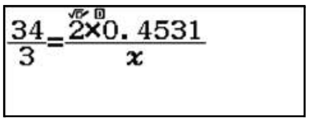
Se utiliza el código *QR* (SHIFT OPTN) y cualquier dispositivo móvil con la aplicación CASIO EDU+ o cualquier lector de códigos, para representar gráficamente ambos modelos a través del servicio de visualización en línea del Worldwide Education Service de CASIO.

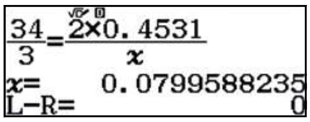
Se observa como ambos modelos son casi idénticos en el rango de valores que se ha considerado:



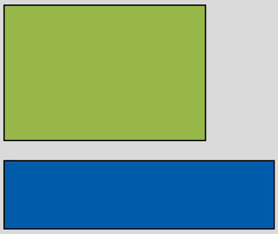
Si la distancia real entre los puntos (0,0) y (34,0) fuese de 3 m, la diferencia entre el rango cubierto por los dos modelos sería de 8 cm aproximadamente. Utilizando la función *SOLVE* se obtiene este valor:







16 Función de proporcionalidad inversa
Rectángulos equivalentes



Se llaman rectángulos equivalentes a los rectángulos que tienen la misma área.

La fórmula $x \cdot y = 36$ expresa el área de todos los rectángulos de área 36 u², en la que x representa la longitud de la base e y la longitud de la altura.

1 Completa la tabla siguiente con algunos valores:

Longitud de la base	Longitud de la altura	Área	Perímetro
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	

2 ¿Cuántos rectángulos diferentes de dimensiones enteras se pueden construir? Explica cómo lo has averiguado.

3 ¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden construir?

Escribe la fórmula que permite obtener la longitud de la altura de un rectángulo de área 36 u² a partir de la longitud de la base.

Representa gráficamente la función anterior y analiza sus características.

¿Cuál es el rectángulo que tiene el perímetro más pequeño?

4 ¿Qué le ocurre a la altura de los rectángulos de área 36 u² a medida que la base toma valores muy próximos a cero? ¿Y si la base toma valores cada vez más grandes?

5 Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y compara sus características con la función de la altura.

6 Representa gráficamente distintas funciones del tipo $f(x) = \frac{a}{x}$ y compáralas con la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

¿Qué cambios se producen en la gráfica de la función al variar el valor del parámetro a?

16 | Función de proporcionalidad inversa
Rectángulos equivalentes

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Esta actividad permite utilizar el modelo de la función de proporcionalidad inversa para explicar y representar la relación entre la altura y la base de rectángulos equivalentes.
- Este contexto sirve para analizar las características de la función de proporcionalidad inversa, y en particular, sus asíntotas.
- Con las últimas actividades se estudia las dilataciones en la familia de funciones de proporcionalidad inversa.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2

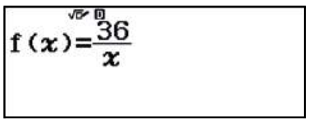
Se pueden construir 9 rectángulos. Las dimensiones de la base y la altura son los divisores de 36. Se utiliza la tabla para recoger todas las posibilidades:

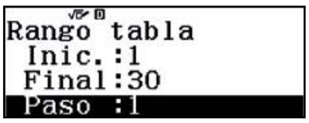
Longitud de la base	Longitud de la altura	Área	Perímetro
1	36	36	74
2	18	36	40
3	12	36	30
4	9	36	26
6	6	36	24
9	4	36	26
12	3	36	30
18	2	36	40
36	1	36	74

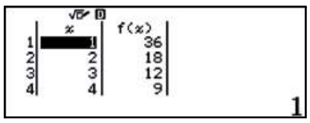
3

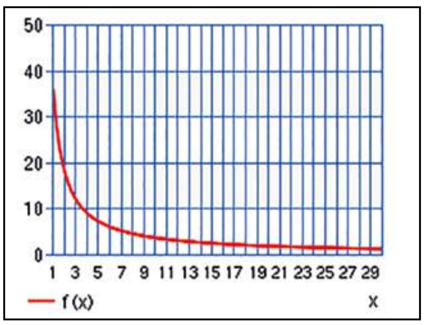
Se pueden construir infinitos rectángulos. La fórmula de la altura es $y = \frac{36}{x}$, siendo x la longitud de la base.

Su representación gráfica se puede obtener utilizando el menú *Tabla* y el código *QR*:





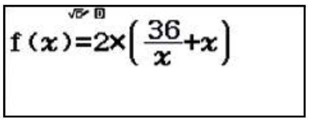


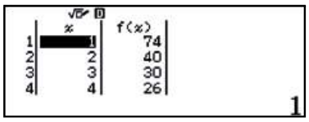


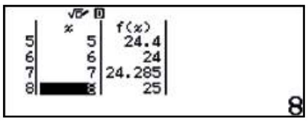
16 Función de proporcionalidad inversa
Rectángulos equivalentes

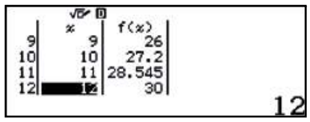
La expresión del perímetro es $P = 2 \cdot \left(\frac{36}{x} + x\right)$.

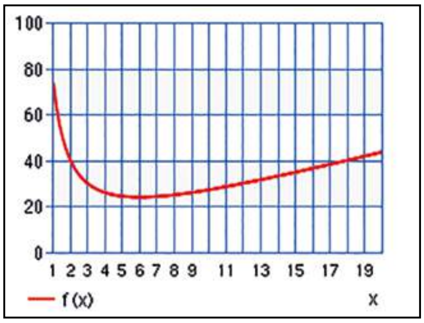
Mediante la tabla de valores o su gráfica se comprueba que el rectángulo de perímetro mínimo es el cuadrado:





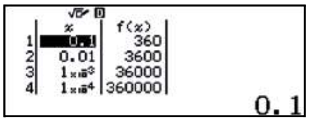


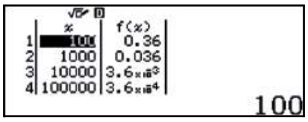




4

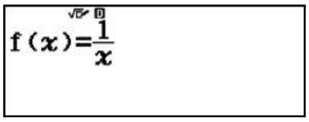
A medida que la longitud de la base se aproxima a cero, la altura tiende a infinito. Es decir, la gráfica de la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$. Cuando la base toma valores cada vez más grandes, la altura tiende a 0. Es decir, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$:

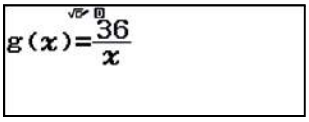


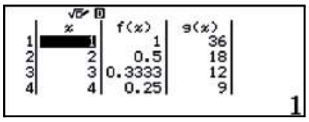


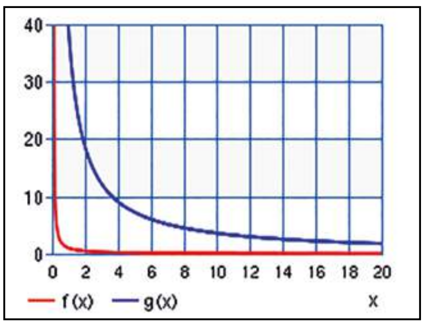
5

Si se comparan ambas funciones en un mismo gráfico se observa que tienen las mismas propiedades: mismo dominio, recorrido y asíntotas. La función de la altura es una transformación de la función de proporcionalidad inversa. Se trata de una dilatación vertical de factor 36:









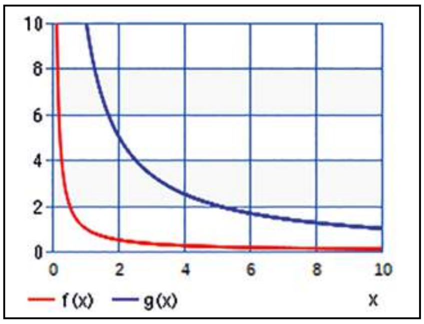
CASIO División Educativa

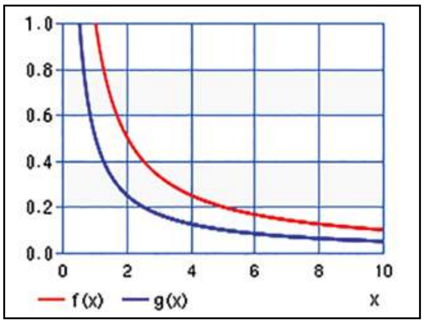
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

6

Los cambios en el parámetro a producen dilataciones verticales en la gráfica:

$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{10}{x}$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{0{,}5}{x}$





Ampliación

1 **Parejas de divisores**

Los números enteros positivos a y b satisfacen la relación $a \cdot b = 2010$.

Si $a > b$, ¿cuál es el menor valor posible de $a - b$?

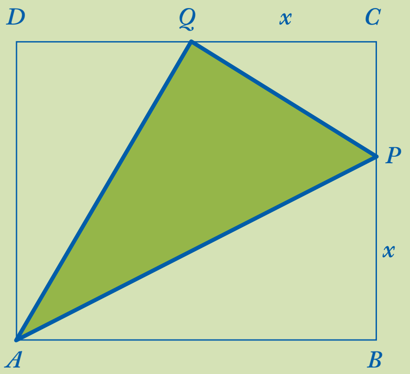
¿Cuál es el menor valor posible de $a - b$ si a y b son números reales positivos?

¿Cuál es el menor valor posible de $a - b$ si a y b son números reales cualesquiera?

Maurici Contreras
Calendario matemático 2014-15: 27 de abril
SEMCV

Problema

Área de un triángulo inscrito en un rectángulo



En la figura, $ABCD$ es un rectángulo de lados $\overline{AB} = 12$ cm y $\overline{BC} = 10$ cm, siendo $\overline{BP} = \overline{CQ} = x$ cm.

Se dibuja el triángulo $A\hat{P}Q$.

1. ¿Para qué valores de x se puede construir el triángulo $A\hat{P}Q$?
2. Dibuja la gráfica de la función área del triángulo $A\hat{P}Q$ que representamos por $S(x)$.
3. ¿Para qué valor de x el área del triángulo es mínima?
4. ¿Para qué valor de x el área del triángulo es máxima?

1

Los valores de x estarán comprendidos entre 0 y 10, $x \in [0, 10]$ que es la longitud del lado $\overline{BC}$.

Si $x = 2$ cm, se calcula el valor del área $S(2)$ del triángulo $A\hat{P}Q$.

El área del rectángulo $ABCD$ es:

$$S_{ABCD} = 12 \cdot 10 = 120 \text{ cm}^2$$

Las áreas de los distintos triángulos rectángulos representados en las figuras son:

$$A\hat{B}P \text{ es: } S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 12 \text{ cm}^2$$

$$P\hat{C}Q \text{ es: } S_{PCQ} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2$$

$$A\hat{D}Q \text{ es: } S_{ADQ} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50 \text{ cm}^2$$

El área del triángulo $A\hat{P}Q$ es igual al área del rectángulo $ABCD$ menos la suma de las áreas de los triángulos $A\hat{B}P$, $P\hat{C}Q$ y $A\hat{D}Q$:

$$S(2) = 120 - (12 + 8 + 50) = 50 \text{ cm}^2$$

2

Se calcula el área del triángulo $A\hat{P}Q$, para un valor variable de x. $\overline{BP} = x$ cm:

El área del triángulo rectángulo $A\hat{B}P$ es:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x = 6x$$

El área del triángulo rectángulo $P\hat{C}Q$ es:

$$S_{PCQ} = \frac{1}{2} \cdot (10 - x)x = 5x - \frac{1}{2}x^2$$

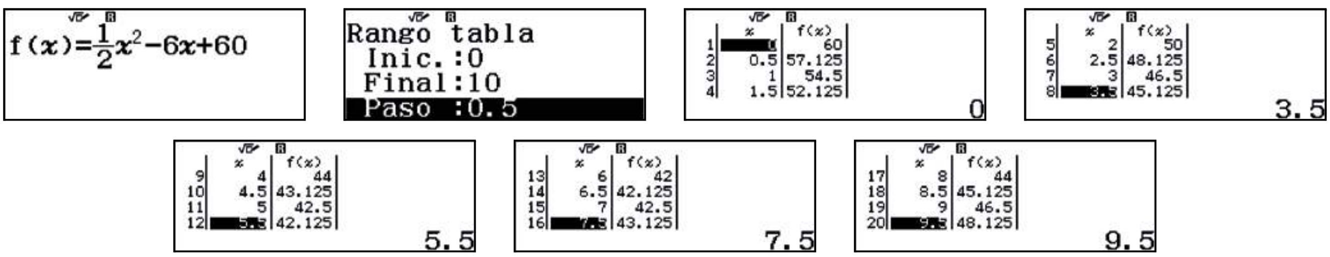
El área del triángulo rectángulo $A\hat{D}Q$ es:

$$S_{ADQ} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (12 - x) = 60 - 5x$$

$$S(x) = 120 - \left(6x + 5x - \frac{1}{2}x^2 + 60 - 5x\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 60$$

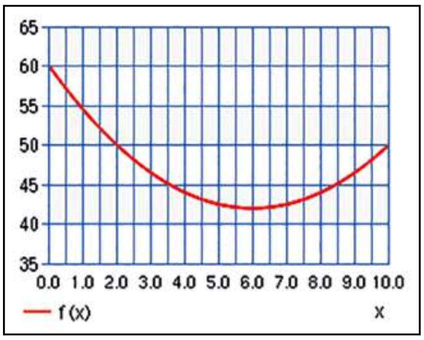
Se construye la tabla de valores de la función:



Problema

Área de un triángulo inscrito en un rectángulo

Se utiliza el código *QR* para representar la función:



3 **4**

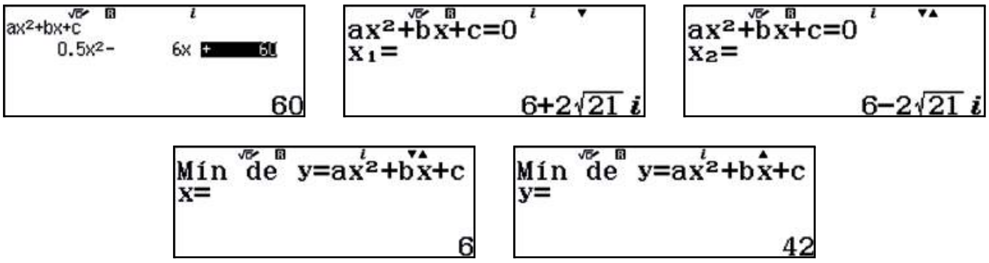
Se observa que el máximo se alcanza para $x = 0$ cm, $S(0) = 60$ cm².

El menú *Ecuación/Función* permite hallar los puntos de corte con el eje de abscisas resolviendo la ecuación:

$$S(x)=0$$

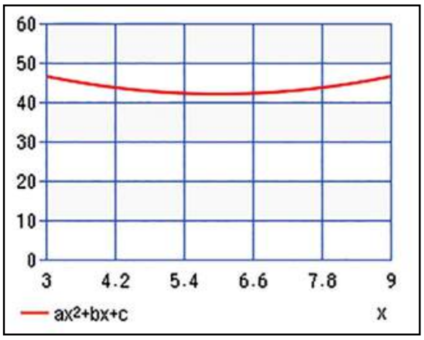
$$\frac{1}{2}x^2 - 6x + 60 = 0$$

Al mismo tiempo la calculadora muestra las coordenadas del vértice de la parábola, que en este caso corresponden al mínimo de la función:



El mínimo se alcanza en $x = 6$ cm, siendo el área $S(6) = 42$ cm².

El valor mínimo también se puede apreciar en la gráfica de la función obtenida mediante el código *QR* y ajustando los parámetros de visualización:



17 | Función de proporcionalidad inversa
Gases. Ley de Boyle-Mariotte

El físico y químico anglo-irlandés Robert Boyle (1662) y el físico y botánico francés Edme Mariotte (1676) formularon, de forma independiente, una de las leyes de los gases, la ley de Boyle-Mariotte que relaciona el volumen y la presión de una cierta cantidad de gas mantenida a temperatura constante.

En un recipiente cerrado, a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que se le aplica.

En términos matemáticos $P \cdot V = k$. Siendo k constante si la temperatura y la masa se mantienen constantes.

Al aumentar el volumen, las partículas (átomos o moléculas) del gas tardan más en llegar a las paredes del recipiente y por lo tanto chocan menos veces por unidad de tiempo contra ellas. Esto significa que la presión será menor ya que ésta representa la frecuencia de choques del gas contra las paredes. Cuando disminuye el volumen la distancia que tienen que recorrer las partículas es menor y por tanto se producen más choques en cada unidad de tiempo, es decir, aumenta la presión.

No es necesario conocer el valor exacto de la constante k para poder utilizar dicha ley. Supongamos que tenemos un cierto volumen de gas V_1 que se encuentra a una presión P_1 al comienzo del experimento. Si variamos el volumen de gas hasta un nuevo valor V_2, entonces la presión cambiará a P_2, y se cumplirá que:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

Para poder verificar su teoría, Boyle introdujo un gas en un cilindro con un émbolo y comprobó las distintas presiones al bajar el émbolo.

V(L)	Presión (atm)
60	0,5
30	1,0
20	1,5
15	2,0
12	2,5
10	3

1 Representa los datos del experimento, obtén la expresión de la función que relaciona la presión según el volumen y represéntala gráficamente.

2 ¿Qué presión se debe aplicar para que el gas ocupe 25 L? ¿Cuál será el volumen si se aplica una presión de 2,25 atm?

3 Otro gas ocupa 8 L a una presión de 2,5 atm. Si la temperatura permanece constante, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

La presión también se puede expresar en mmHg: 1 atm equivale a 760 mmHg.

¿Cuál es la presión en mmHg, si se pasa a un recipiente de 5 L? ¿Qué volumen ocupa el gas si se le aplica una presión de 950 mmHg?

Averigua la expresión de la función que relaciona la presión según el volumen para este gas y represéntala gráficamente.

4 Compara las dos gráficas que has obtenido. ¿Qué características tienen en común? ¿Qué diferencias observas?

17 | Función de proporcionalidad inversa
Gases. Ley de Boyle-Mariotte

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Esta actividad pretende utilizar el modelo de la función de proporcionalidad inversa para explicar y representar la relación entre el volumen y la presión de los gases, en un recipiente cerrado a temperatura constante. Este contexto favorece un análisis significativo de las características de la función de proporcionalidad inversa y propicia el estudio del efecto en la gráfica de la variación del parámetro a en la expresión analítica de una función cuya expresión general es:

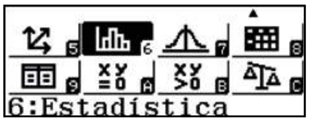
$$f(x) = a \cdot f\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$$

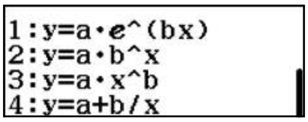
- Además, los factores de conversión, permiten en un mismo contexto utilizar la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora hay que elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso, se elige el menú *Estadística* opción $y = a + \frac{b}{x}$ (MENU 6 ▼ 4) sin frecuencias, que se desactivan con la siguiente secuencia: SHIFT MENU ▼ 3 2.

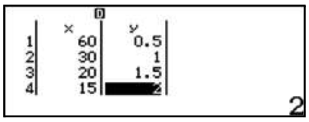
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

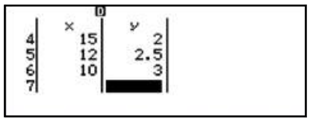
1

Se introducen los datos del experimento en la calculadora desde el menú *Estadística* y se genera un código *QR* pulsando las teclas SHIFT OPTN:

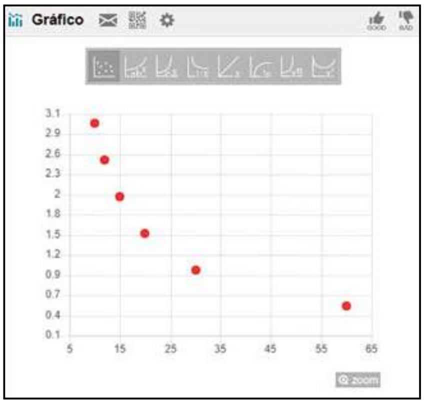








La nube de puntos obtenida es:

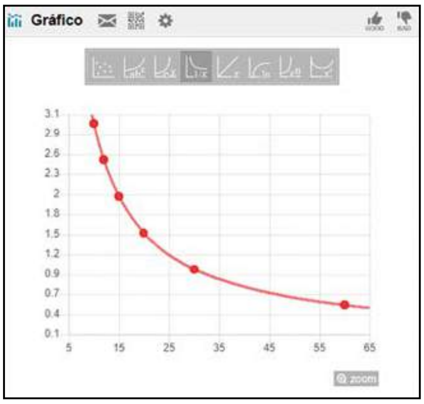


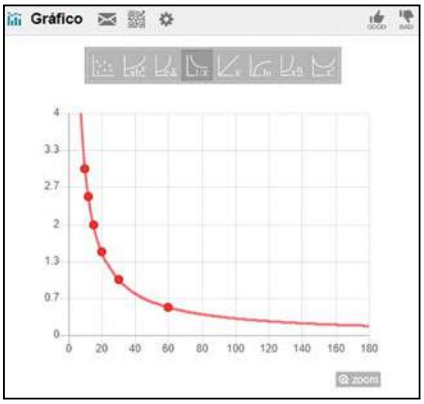
Tabla

	x	y
1	60	0.5
2	30	1
3	20	1.5
4	15	2
5	12	2.5
6	10	3

Gases. Ley de Boyle-Mariotte

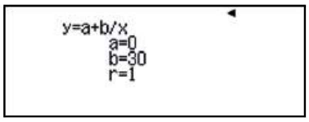
El servicio de visualización en línea permite obtener la gráfica de la regresión y modificar la escala:





La expresión se obtiene desde *Cálc regresión* ([OPTN] [4]):

$$P = \frac{30}{V}$$



El valor de la constante de proporcionalidad, k = 30, se obtiene fácilmente multiplicando los pares de valores de la tabla de datos.

2

$P\ (25) = \frac{30}{25} = 1{,}2$ atm

$V\ (2{,}25) = \frac{30}{2{,}25} = 13{,}3$ L

3

La constante de proporcionalidad es:

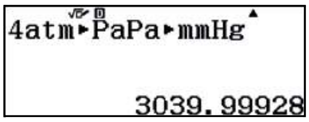
$$k = 8 \cdot 2{,}5 = 20 \text{ atm}$$

Utilizando la expresión $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$, se obtiene $8 \cdot 2{,}5 = P_2 \cdot 5$. De donde se deduce que $P_2 = \frac{20}{5} = 4$ atm.

Haciendo la conversión de atm a mmHg, se obtiene:

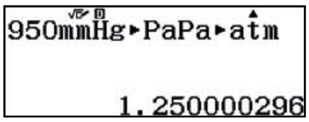
$$4 \text{ atm} \cdot \frac{760 \text{ mmHg}}{1 \text{ atm}} = 3040 \text{ mmHg}$$

[4] [SHIFT] [8] [▼] [2] [1] [SHIFT] [8] [▼] [2] [4] [=]



De la misma manera, $950 \text{ mmHg} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mmHg}} = 1{,}25$ atm:

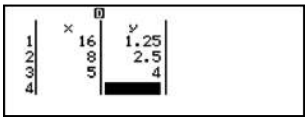
[9] [5] [0] [SHIFT] [8] [▼] [2] [3] [SHIFT] [8] [▼] [2] [2] [=]

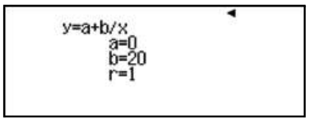


A partir de la expresión $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$, se obtiene $V_2 = \frac{20}{1{,}25} = 16$ L.

Gases. Ley de Boyle-Mariotte

La expresión de la función presión-volumen se obtiene con el menú *Estadística*:

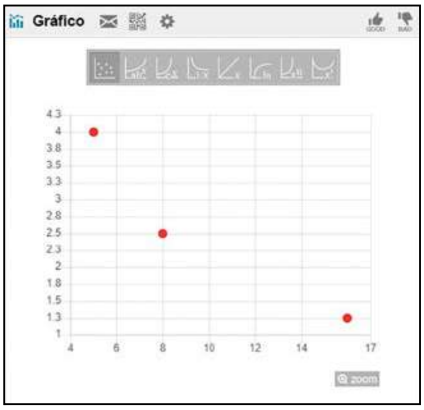


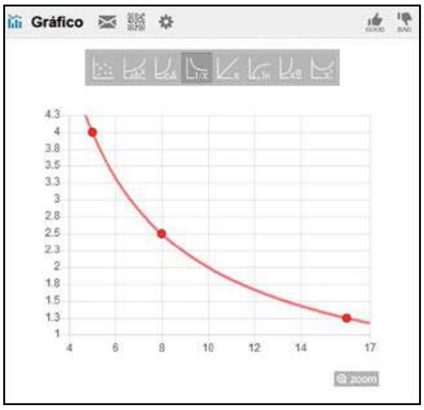


Por consiguiente, $P = \frac{20}{V}$.

Se obtiene la gráfica generando un código *QR* desde la tabla de datos:

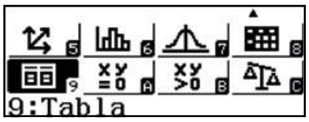
1/1

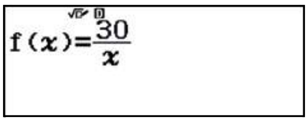


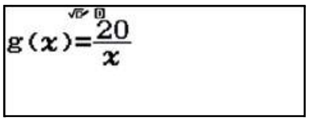


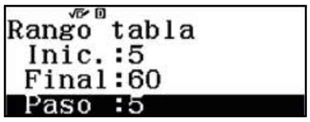
4

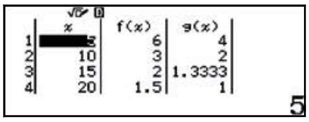
Se introducen las dos funciones en el menú *Tabla* y se obtiene la representación gráfica generando un código *QR*:

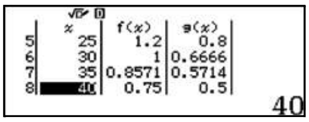


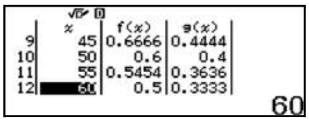




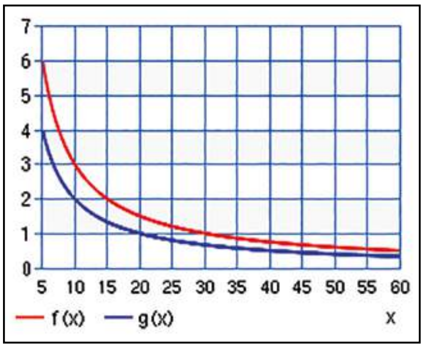








1/1



Se observa que se trata de sendas dilataciones verticales de factor positivo. Estas dilataciones no modifican las asíntotas, si el parámetro a (constante de proporcionalidad) crece, la dilatación es cada vez mayor, es decir, la gráfica es más "estirada".

18 Función racional
Pisando fuerte

La empresa *Adelante* fabrica zapatillas deportivas y quiere lanzar un nuevo modelo llamado *Pisa Fuerte*.

Para la producción de dichas zapatillas necesita una inversión inicial de 1 000 € y la fabricación de cada par de zapatillas le supone un gasto de 50 €.

1 Si la empresa fabrica 100 pares de zapatillas ¿qué coste de fabricación tiene cada par de zapatillas?

2 Rellena la siguiente tabla:

Número de pares fabricados	Coste por par de zapatillas (€)
10	
25	
50	
100	
150	
200	
250	
x	$c(x)$

3 Representa gráficamente la función $c(x)$. ¿Qué tipo de función es $c(x)$? Describe sus características.

4 Si la empresa *Adelante* quiere que un par de zapatillas tenga un coste de fabricación de 75 €, ¿cuántos pares tiene que fabricar?

5 Haz una tabla de valores de las funciones $c(x)$ y $g(x) = \frac{1000}{x}$ cuando $x \in]0, +\infty[$.

6 Compara las características de las funciones $c(x)$ y $g(x)$.

7 Si la empresa quiere obtener un beneficio del 20% por la venta de las zapatillas *Pisa Fuerte*, ¿a qué precio tiene que vender cada par de zapatillas?

8 ¿Cuántos pares debe vender como mínimo para que el precio no supere los 95 €?

Pisando fuerte

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar funciones gráficamente.
  - Estudiar las características de la función racional.
  - Resolver una ecuación racional.
  - Comparar dos funciones racionales.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Si se fabrican 100 pares de zapatillas el coste de fabricación por unidad es:

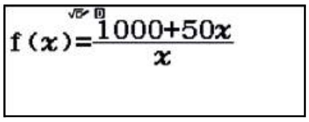
$$\frac{1000 + 50 \cdot 100}{100} = 60 \text{ €}$$

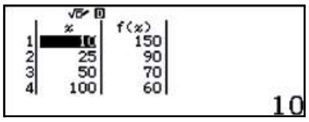
Si x es el número de pares de zapatillas fabricadas, el coste por unidad es:

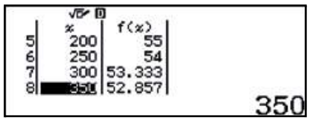
$$c(x) = \frac{1000 + 50x}{x} = \frac{1000}{x} + 50,\ x \in \,]0, +\infty[$$

2

Se completa la tabla de la función utilizando el menú *Tabla*:





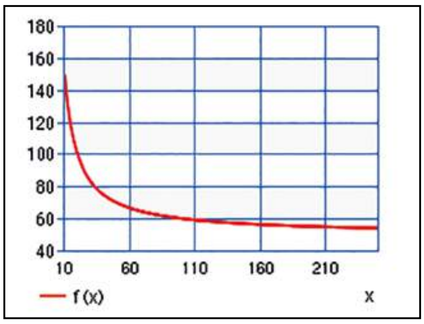


Número de pares fabricados	Coste por par de zapatillas (€)
10	150
25	90
50	70
100	60
150	55
200	54
250	30
x	$S(x) = \frac{1000 + 50x}{x}$

3

Para representar gráficamente la función se utiliza el código *QR*.

1/1



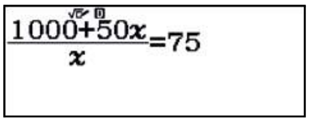
Es una función racional. La función es decreciente.

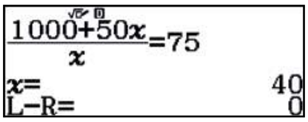
FUNCIONES

4

Para calcular cuántos pares se tienen que fabricar para que el coste del par sea 75 € se resuelve la ecuación con la función *SOLVE*:

$$\frac{1000+50x}{x}=75$$

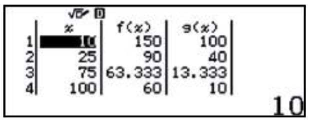


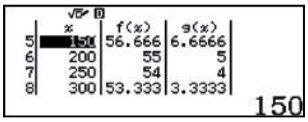


Por consiguiente, se tienen que fabricar 40 pares de zapatillas.

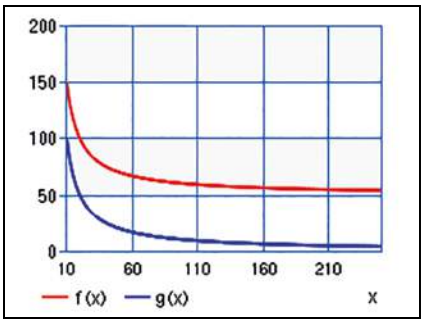
5

Se construyen las tablas de las funciones $c(x)$ y $g(x)=\frac{1000}{x}$ cuando $x \in \,]0, +\infty[$:





Con el código *QR* se obtienen las gráficas de las dos funciones en los mismos ejes:



6

Se observa que $c(x)=\frac{1000}{x}+50=g(x)+50$.

La función $c(x)$ es una traslación vertical de 50 unidades hacia arriba de la función $g(x)=\frac{1000}{x}$, $x \in \,]0, +\infty[$.

De la expresión $c(x)=\frac{1000}{x}+50$ se deduce que el coste de fabricación de un par de zapatillas siempre es mayor de 50 €.

7

La función que proporciona el precio de venta de cada par de zapatillas para ganar un 20% es:

$$p(x)=\frac{120}{100}\cdot\frac{1000+50x}{x}$$

Simplificando se obtiene:

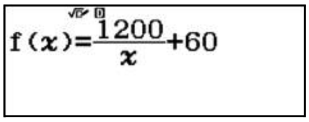
$$p(x)=\frac{1200+60x}{x}=\frac{1200}{x}+60$$

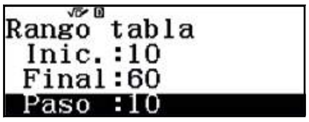
CASIO División Educativa

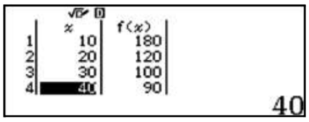
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

8

Para obtener el número mínimo de pares de zapatillas para que el precio no supere los 95 € se utiliza el menú *Tabla*:

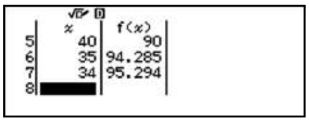




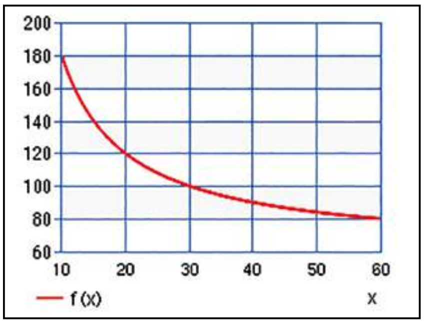


De los valores de la tabla se deduce que se deben vender más de 30 y menos de 40 pares de zapatillas.

Por iteración, se observa que hay que vender al menos 35 pares de zapatillas:

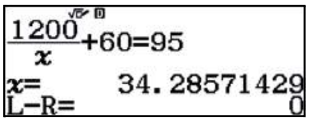


Mediante el código *QR* se puede visualizar la solución:



Si se desea observar mejor la solución, es posible ajustar la escala de los ejes desde el botón de herramientas:

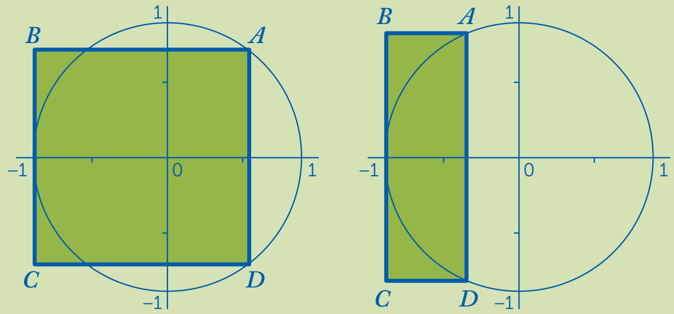
Se comprueba la solución resolviendo la ecuación $\frac{1200}{x} + 60 = 95$ con la función *SOLVE*:



Teniendo en cuenta que la función es decreciente y que el número de pares de zapatillas es entero, se deduce que como mínimo se deben vender 35 pares para que el precio sea inferior a 95 €.

Problema

Rectángulos entrelazados con una circunferencia



En las figuras anteriores se considera una circunferencia de radio 1 unidad.

1. ¿Para qué valores de la coordenada x del punto A se obtiene un cuadrado entrelazado con la circunferencia, como aparece en la primera figura?

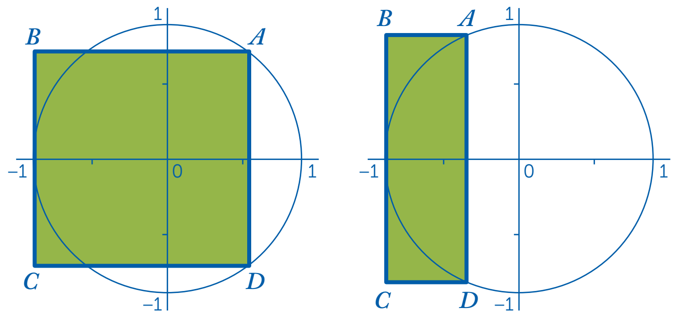
2. De los diferentes rectángulos que se pueden obtener en esas posiciones, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

3. ¿Para qué valores de la coordenada x del punto A el área del rectángulo es mayor que la del círculo?

1

La ecuación de la circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = 1$ u viene dada por $x^2 + y^2 = 1$.

Los vértices sobre la circunferencia que determinan los rectángulos son:



$A = (x, \sqrt{1-x^2})$ $\qquad$ $B = (-1, \sqrt{1-x^2})$

$D = (x, -\sqrt{1-x^2})$ $\qquad$ $C = (-1, -\sqrt{1-x^2})$

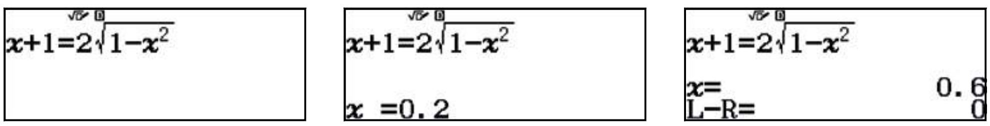
La variable x toma los valores $-1 \le x \le 1$.

La base del rectángulo varía en función de x, siendo su valor $x + 1$, mientras que la altura del rectángulo es $2 \cdot \sqrt{1-x^2}$.

Para obtener un cuadrado, deben coincidir base y altura, por lo que se plantea y resuelve la siguiente ecuación:

$$x + 1 = 2 \cdot \sqrt{1-x^2}$$

En el menú *Calcular* se resuelve la ecuación con radicales utilizando la función *SOLVE* (SHIFT CALC) y tomando un valor semilla adecuado ($-1 < x < 1$):



Se recuerda que se debe utilizar ALPHA CALC para introducir el símbolo de =.

Se obtiene como solución $x = 0{,}6$ por lo que el lado del cuadrado mide 1,6 unidades.

Problema

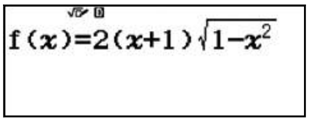
Rectángulos entrelazados con una circunferencia

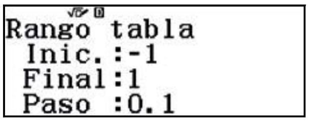
2

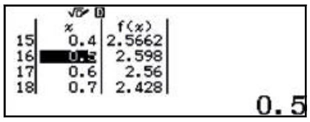
El área de los posibles rectángulos, en función de x, viene dada por la función:

$$f(x) = (x + 1) \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

Se selecciona el menú *Tabla* para introducir la función y observar la tabla de valores para $-1 \leq x \leq 1$ con un paso de valor 0,1:







Para $x = 0{,}5$ se obtiene el rectángulo de área máxima, cuyas dimensiones son:

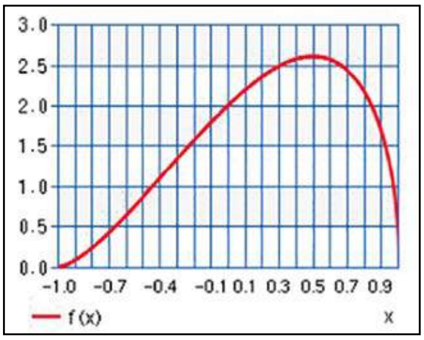
$$\text{Base} = 0{,}5 + 1 = 1{,}5 \text{ u.} \qquad \text{Altura} = 2 \cdot \sqrt{1 - 0{,}5^2} = \sqrt{3} \text{ u.}$$

El valor máximo del área es:

$$\text{Área} = 1{,}5 \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}598 \text{ u}^2$$

Se visualiza la tabla en un entorno de $x = 0{,}5$ comprobando que, efectivamente, el valor donde se alcanza el máximo es 0,5.

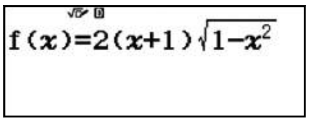
Se visualiza la gráfica de la función con SHIFT OPTN que activa el código *QR* para contrastar gráficamente los resultados obtenidos:

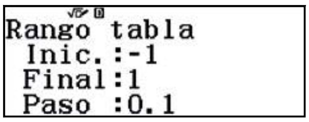


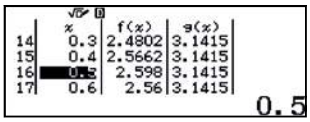
3

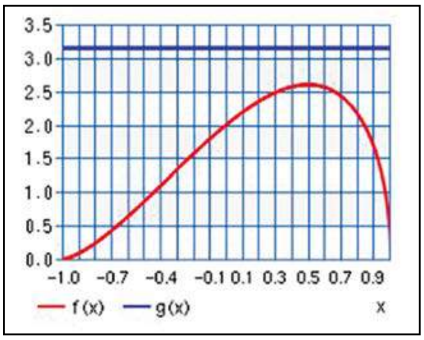
El área del círculo de radio 1 unidad es π u². En el **apartado anterior** se ha obtenido que el valor máximo del área de los posibles rectángulos es 2,598 u², por lo que no hay ningún rectángulo cuya área supere π u².

Se representan gráficamente las dos funciones con el código *QR* para visualizar gráficamente este resultado:









19 | Función racional
¿Cuánto cuesta una camiseta?

El alumnado de 4º de secundaria del instituto IES Veles e Vents de Torrent quieren hacer una camiseta para celebrar su graduación. Han pedido presupuesto a dos empresas distintas, *Personaliza tu camiseta* y *Diseña tu camiseta*.

Ambas empresas les han comunicado que el precio de las camisetas depende de la cantidad final que pidan.

Para que los precios queden claros, cada empresa les ha enviado un correo con las siguientes tablas de precios:

Personaliza tu camiseta						
Número de camisetas	**1**	**2**	**5**	**10**	**20**	**50**
Precio unitario (€)	203	103	43	23	13	7

Diseña tu camiseta						
Número de camisetas	**1**	**2**	**5**	**10**	**20**	**50**
Precio unitario (€)	104	54	24	14	9	6

1 Representa gráficamente el precio de una camiseta en función del número de camisetas pedidas en cada una de las empresas y escribe, para cada una de ellas, una función que se ajuste a los precios por unidad.

2 En el instituto hay matriculados 150 alumnos en 4º de secundaria. Si todos quieren una camiseta, ¿cuánto les costaría una camiseta en *Personaliza tu camiseta*? ¿Y en la empresa *Diseña tu camiseta*?

3 Si solamente 120 alumnos desean comprar la camiseta, ¿cuánto debe pagar cada alumno por una camiseta en la empresa *Personaliza tu camiseta*? ¿Y en *Diseña tu camiseta*? ¿Y si solo la quieren comprar 80 alumnos?

4 Por muchas camisetas que encarguen, el precio de una camiseta nunca será menor que una cierta cantidad, ¿cuál es esa cantidad en cada una de las empresas?

5 Cada empresa cobra una cantidad fija por el diseño, ¿cuál es esa cantidad en cada una de las empresas?

6 Como el precio de cada camiseta depende del número total de camisetas que se pidan, deciden confeccionar una la lista con todos los compañeros que quieren comprarla y analizar en qué empresa les conviene encargarlas.

Según el número de peticiones, ¿en qué empresa les conviene encargarlas?

19 | Función racional
¿Cuánto cuesta una camiseta?

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad pretende utilizar el modelo de la función de proporcionalidad inversa para explicar y representar la relación entre el precio unitario y el precio total de una compra en la que el precio unitario varía según el número total de artículos adquiridos. Este contexto favorece un análisis significativo de las características de la función de proporcionalidad inversa y propicia el estudio del efecto en la gráfica de la variación de los parámetros en la expresión analítica de la función.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora es conveniente elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso, se debe elegir la opción $y = a + \frac{b}{x}$ (MENU 6 ▼ 4) del menú *Estadística*: sin frecuencias. Las frecuencias se desactivan con la siguiente secuencia: SHIFT MENU ▼ 3 2.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

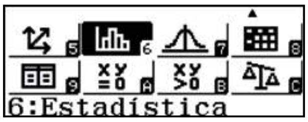
  Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a:

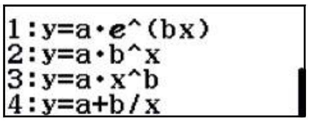
  http://wes.casio.com/es-es/class

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

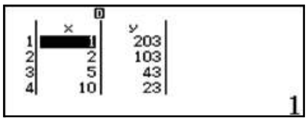
1

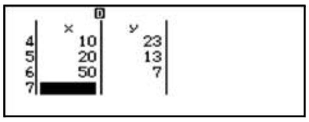
Se introducen los datos de los precios en el menú *Estadística* y se genera un código *QR* pulsando las teclas SHIFT OPTN:

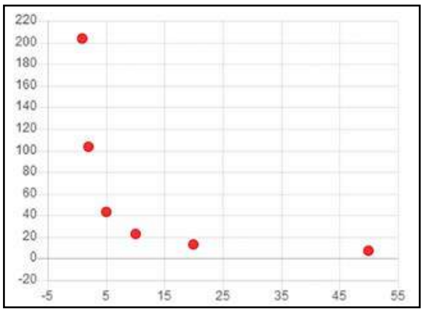




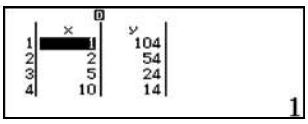
Personaliza tu camiseta

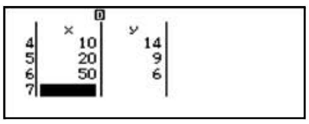






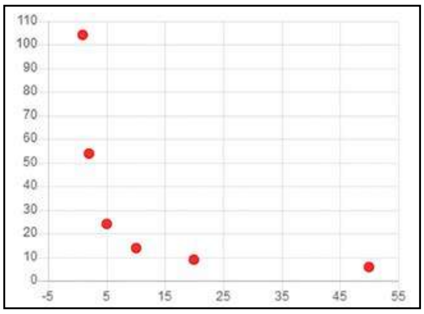
Diseña tu camiseta





19 | Función racional
¿Cuánto cuesta una camiseta?

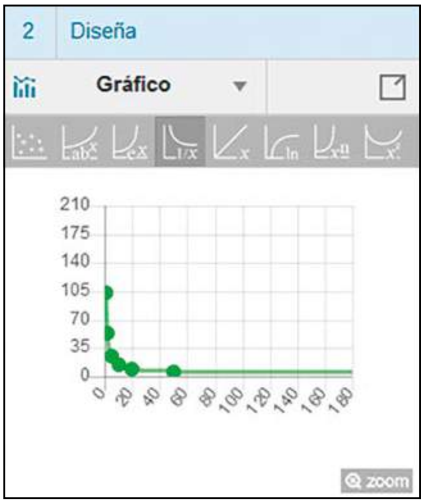
Diseña tu camiseta

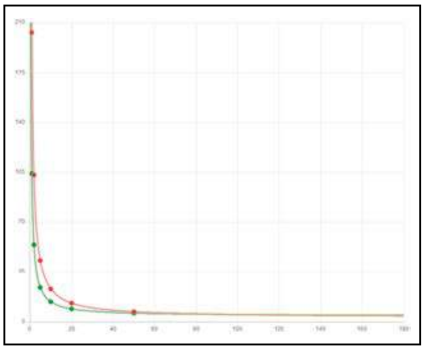


Se puede obtener la función que mejor se ajusta directamente, o bien elegir alguna de las regresiones que ofrece la aplicación y que mejor se ajuste a la nube de puntos. Teniendo en cuenta que el precio unitario disminuye a medida que aumenta el número total de camisetas compradas, la función que mejor se ajusta, pertenece a la familia de las funciones de proporcionalidad inversa.

Se pueden visualizar las dos regresiones en los mismos ejes representando simultáneamente las nubes de puntos mediante la colocación de múltiples gráficos estadísticos, unos encima de otros:

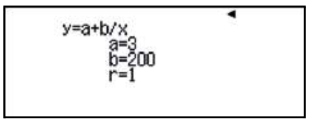
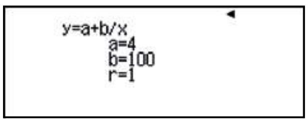
La representación gráfica de las regresiones tras ajustar los ejes es:





http://wes.casio.com/class/4Z3Q-Oiw2-y4p1-SqLe

La ecuación de la regresión se obtiene desde el menú *Estadística*. En primer lugar, se regresa a los datos estadísticos pulsando AC y mediante la secuencia OPTN 4 se obtiene la regresión:

Personaliza tu camiseta	*Diseña tu camiseta*
	
$y = 3 + \frac{200}{x}$	$y = 4 + \frac{100}{x}$

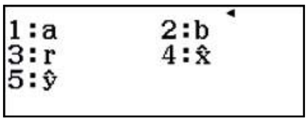
¿Cuánto cuesta una camiseta?

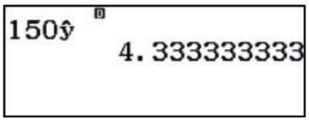
2

El precio unitario se calcula desde el menú *Estadística*:

Personaliza tu camiseta

OPTN ▼ 1 OPTN ▼ 4 5 ◄ 1 5 0 =





$\hat{y}(150) \approx 4{,}33$ €

De la misma forma se obtiene el otro precio:

Diseña tu camiseta: $\hat{y}(150) = 4{,}66666666 \approx 4{,}67$ €

3

Procediendo de la misma forma que en el **apartado 2**:

Personaliza tu camiseta: $\hat{y}(120) = 4{,}66666666 \approx 4{,}67$ € $\hat{y}(80) = 5{,}50$ €

Diseña tu camiseta: $\hat{y}(120) = 4{,}83333333 \approx 4{,}83$ € $\hat{y}(80) = 5{,}25$ €

4

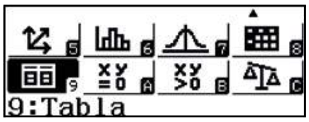
De las ecuaciones obtenidas en el **apartado 1**, se deduce que el precio de una camiseta nunca será menor de 3 € en la empresa *Personaliza tu camiseta*, ni de 4 € en *Diseña tu camiseta*.

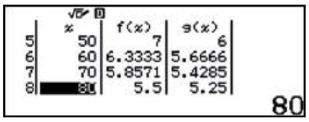
5

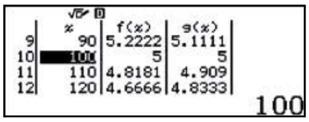
De las ecuaciones obtenidas en el **apartado 1**, se deduce que la empresa *Personaliza tu camiseta* cobra 200 € por el diseño de las camisetas y la empresa *Diseña tu camiseta*, 100 €.

6

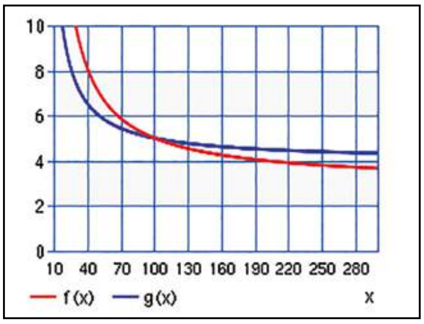
Se utiliza el menú *Tabla* para averiguar a partir de qué cantidad conviene elegir cada una de las empresas:







Generando un código *QR* se comprueba gráficamente la solución:



En cualquier caso, se observa que:

- Para un pedido de menos de 100 camisetas, la empresa *Diseña tu camiseta* ofrece mejor precio unitario.
- Para un pedido de 100 camisetas es indiferente qué empresa se elija.
- Y, para un pedido de más de 100 camisetas, la empresa *Personaliza tu camiseta* ofrece un precio más económico por camiseta.

20 Función exponencial
Concentración de anestesia en la sangre

Al inicio de una intervención quirúrgica, se administra anestesia a un paciente.

Sabiendo que la concentración de anestesia disminuye el 5% cada minuto, ¿cuánto tiempo crees que tendrá que transcurrir para que la concentración de anestesia en el paciente sea inferior al 0,5%?

1 Rellena la siguiente tabla:

Tiempo (min)	Concentración de anestesia
1	$C(1)$ = 95% = 0,95
2	
3	
5	
10	
15	
20	
30	
t	$C(t)$ =

2 Representa gráficamente la función $C(t)$. ¿Qué tipo de función es? Escribe sus características.

3 ¿En qué instante la concentración de anestesia es del 50%? ¿Y del 25%?

4 ¿En qué instante la concentración de anestesia es menor que el 0,5%?

Concentración de anestesia en la sangre

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO (Matemáticas Académicas)

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar funciones gráficamente con el código *QR*.
  - Calcular antiimágenes de la función resolviendo ecuaciones exponenciales con la función *SOLVE*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Al cabo de 2 minutos la concentración de anestesia será:

$$C(2) = 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9025$$

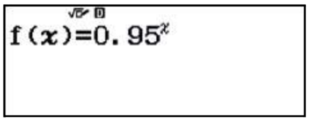
Al cabo de 3 minutos:

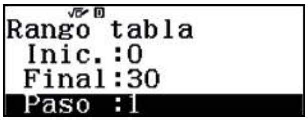
$$C(3) = 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}95^3$$

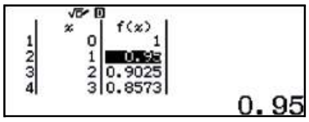
Generalizando se obtiene:

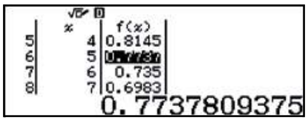
$$C(t) = 0{,}95^t$$

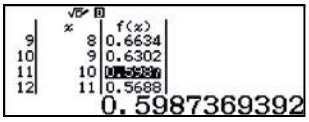
Se utiliza el menú *Tabla* para calcular la tabla de valores de la función:

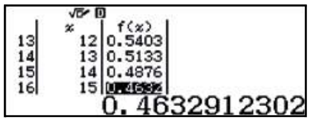


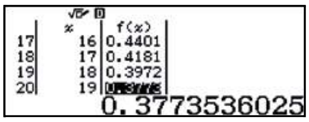


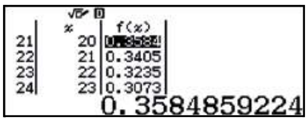


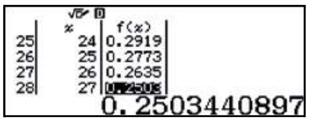


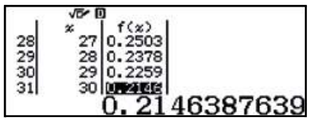












La tabla queda de la siguiente forma:

Tiempo (min)	Concentración de anestesia
1	$C(1)$ = 95% = 0,95
2	$C(2)$ = 90,25% = 0,9025
3	$C(3)$ = 85,74% = 0,8574
5	$C(5)$ = 77,38% = 0,7738
10	$C(10)$ = 59,87% = 0,5987
15	$C(15)$ = 46,33% = 0,4633
20	$C(20)$ = 35,85% = 0,3585
30	$C(30)$ = 21,46% = 0,2146
t	$C(t) = 0{,}95^t$

20 | Función exponencial
Concentración de anestesia en la sangre

2

La representación gráfica se obtiene generando el código *QR*:

$C(t)$ es una función exponencial, sus características son:

- El dominio de la función es [0, + ∞[.
- El recorrido de la función es]0, 1].
- $C(0) = 1$.
- La función es estrictamente decreciente.
- La función se aproxima a 0 cuando la variable tiempo se aproxima a + ∞, es decir, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

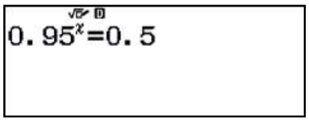
3

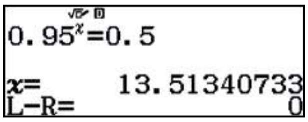
Para calcular en qué instante la concentración de anestesia es del 50%, se resuelve la ecuación $C(t) = 0{,}50$:

$$0{,}95^t = 0{,}50$$

Se utiliza la función *SOLVE* para resolver la ecuación:

0 . 9 5 x■ x ▶ ALPHA CALC 0 . 5 SHIFT CALC =



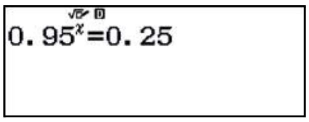


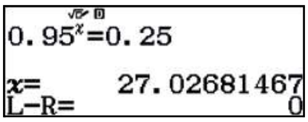
Luego, la concentración de anestesia es aproximadamente del 50% al cabo 13 minutos y 30 segundos.

Análogamente, para saber el instante en el que la concentración es del 25% se resuelve la ecuación $C(t) = 0{,}25$:

$$0{,}95^t = 0{,}25$$

0 . 9 5 x■ x ▶ ALPHA CALC 0 . 2 5 SHIFT CALC =



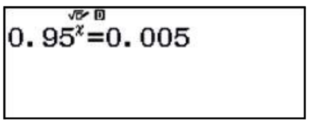


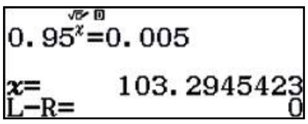
En consecuencia, la concentración es del 25% aproximadamente a los 27 minutos de la administración de la anestesia.

4

Se resuelve la ecuación $C(t) = 0{,}005$:

$$0{,}95^t = 0{,}005$$





Es decir, al cabo de 103,2945423 minutos (1h 43m 18s) desde que se administró la anestesia la concentración es menor que 0,5%.

Problema
Área de un triángulo

Sea A un punto de la semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$ = 20 cm.

A partir del punto A se construye el ángulo $\alpha = \angle ABC$.

1. Si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad, determina el área $S(\alpha)$ del triángulo $A\hat{B}C$ (las medidas angulares se realizan en radianes).

2. Representa gráficamente la función $S(\alpha)$ y determina qué tipo de función es.

El ángulo $\alpha = \angle ABC$ está inscrito en la semicircunferencia y abarca un diámetro, por lo que el triángulo $A\hat{B}C$es rectángulo en A y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Antes de realizar los cálculos es conveniente configurar la calculadora para trabajar con radianes: SHIFT MENU 2 2.

1

Aplicando las razones trigonométricas al triángulo rectángulo $A\hat{B}C$, se tiene:

$$\overline{AB} = 20 \cdot \cos\alpha \text{ y } \overline{AC} = 20 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

El área del triángulo rectángulo $A\hat{B}C$ es:

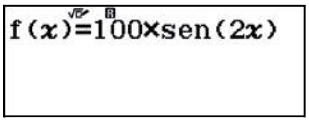
$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \cos\alpha \cdot 20 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

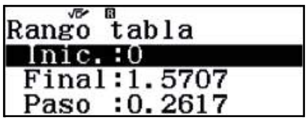
Aplicando las relaciones trigonométricas del ángulo doble ($\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$), se tiene que:

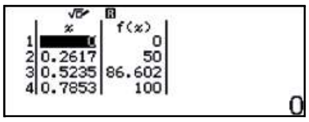
$$S(\alpha) = 100 \operatorname{sen} 2\alpha$$

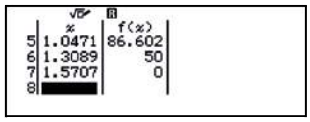
$$S\left(\frac{\pi}{6}\right) = 50\sqrt{3} \approx 86{,}60 \text{ cm}^2$$

Para construir la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:



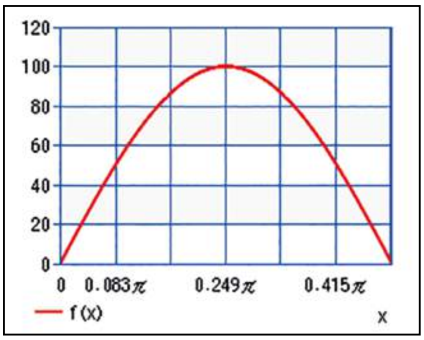






2

Es una función trigonométrica cuya representación se obtiene con el código *QR*:



21 | Función exponencial
Bola de nieve

Una bola de nieve pesa inicialmente 10 kilógramos. Mientras rueda, cada segundo que pasa, su peso aumenta un 5%.

1 Completa la siguiente tabla:

Tiempo (s)	Peso de la bola (kg)
1	$P(1) = 10 \cdot 1{,}05 = 10{,}50$ kg
2	
3	
5	
10	
15	
20	
30	
t	$P(t) =$

2 ¿Cuánto tiempo tardará la bola de nieve en duplicar su peso?

3 Dibuja la gráfica de la función $P(t)$. ¿Qué tipo de función es? Enumera sus características.

4 ¿En qué instante la bola pesará 25 kg? ¿Y 50 kg?

21 | Función exponencial
Bola de nieve

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar funciones gráficamente con el código *QR*.
  - Calcular antiimágenes de la función, resolviendo ecuaciones exponenciales con la función *SOLVE*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Al cabo de 2 y 3 segundos la bola pesará:

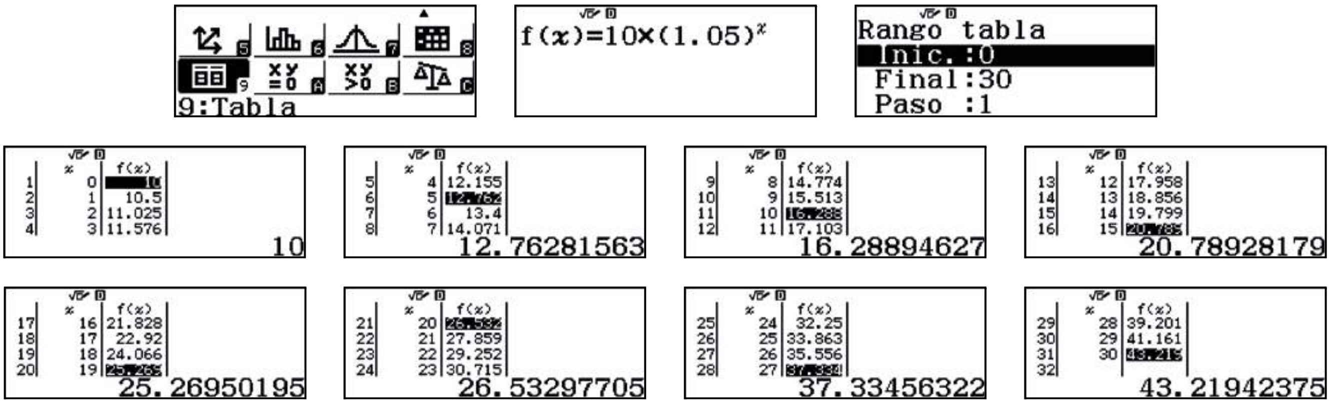
$$P(2) = 10 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10 \cdot 1{,}05^2 = 11{,}025 \text{ kg}$$

$$P(3) = 10 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10 \cdot 1{,}05^3 \approx 11{,}576 \text{ kg}$$

Para t segundos:

$$P(t) = 10 \cdot 1{,}05^t \text{ kg}$$

Se utiliza el menú *Tabla* para completar la tabla de valores de la función:



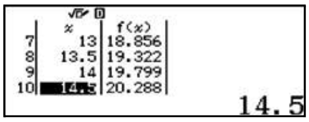
La tabla queda de la siguiente manera:

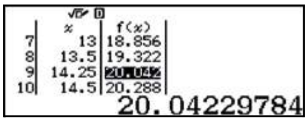
Tiempo (s)	Peso de la bola (kg)
1	10,500 kg
2	11,025 kg
3	11,576 kg
5	12,763 kg
10	16,289 kg
15	20,789 kg
20	26,533 kg
30	43,219 kg
t	$P(t) = 10 \cdot 1{,}05^t$

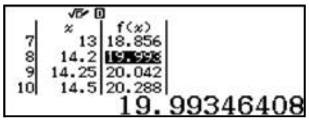
Bola de nieve

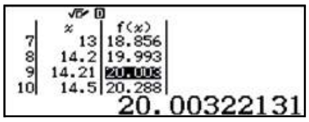
2

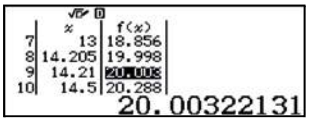
El menú *Tabla* permite introducir manualmente valores de la variable independiente. Se utiliza la iteración para obtener una aproximación, hasta las centésimas, del tiempo que tardará la bola de nieve en duplicar su peso:









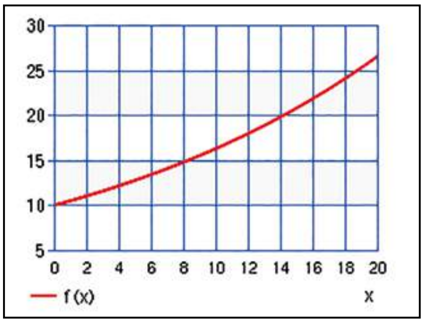


La bola de nieve duplicará su peso aproximadamente al cabo de 14,21 segundos.

3

Para representar gráficamente la función se utiliza el código *QR*:

1/1



$P(t)$ es una función exponencial, sus características son:

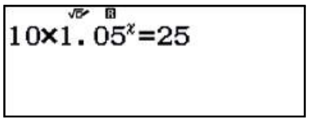
- El dominio de la función es [0, + ∞[.
- El recorrido de la función es [10, + ∞[.
- $P(0) = 10$.
- La función es estrictamente creciente.
- La función se aproxima a + ∞ cuando la variable tiempo tiende a + ∞.

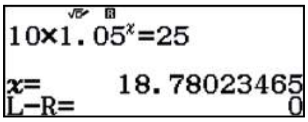
4

Para calcular en qué momento la bola pesará 25 kg, se resuelve la ecuación $P(t) = 25$:

$$10 \cdot 1{,}05^t = 25$$

Se resuelve utilizando la función *SOLVE*:

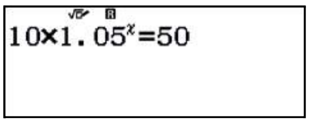


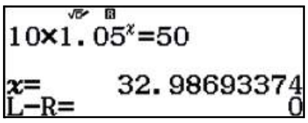


La bola pesará 25 kg al cabo de, aproximadamente, 19 segundos.

Análogamente, para saber el instante en el que la bola pesa 50 kg se resuelve la ecuación $P(t) = 50$:

$$10 \cdot 1{,}05^t = 50$$





Es decir, la bola pesará 25 kg aproximadamente a los 33 segundos.

Problema

Desintegración radiactiva

Un elemento radiactivo se desintegra en función del tiempo t, medido en segundos, según la expresión:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$\boldsymbol{N(t)}$: número de átomos radiactivos existentes en el instante t (s).
$\boldsymbol{N_0}$: número de átomos radiactivos existentes en el instante inicial (t = 0 s).
$\boldsymbol{\lambda}$: Constante de desintegración que depende del elemento (s^{-1}).

1. Calcula el periodo de semidesintegración, T, definido como el intervalo de tiempo que ha de transcurrir para que el número de átomos radiactivos inicial se reduzca a la mitad.

2. Calcula el periodo de semidesintegración del estroncio ${}^{38}_{90}Sr$ (λ = 7,6344 · 10^{-10} s^{-1}).

3. La constante de desintegración λ del bario ${}^{56}_{143}Ba$ es igual a 0,0688 s^{-1}. Calcula el tiempo que ha de transcurrir para que se desintegre el 80% de una cierta cantidad inicial de átomos.

4. En el año 1 898, Marie y Pierre Curie aislaron 200 mg de radio, el periodo de semidesintegración del cual es de 1 620 años. Calcula la cantidad existente en el año 2 019 de aquella muestra inicial.

1 **2**

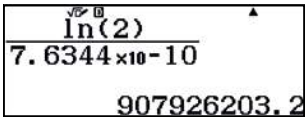
De la propia definición de periodo de semidesintegración, después de T segundos, quedarán sin desintegrarse la mitad de los átomos iniciales, $\frac{N_0}{2}$:

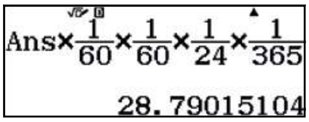
$$N(T) = N_0 \cdot e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2}$$

De donde se deduce:

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{-\lambda T} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Aplicando la expresión obtenida en el apartado anterior, el periodo de semidesintegración del estroncio ${}^{38}_{90}Sr$ es de 9,079 · 10^8 s = 28,8 años.

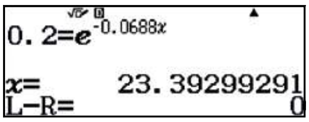




3

Si se han desintegrado el 80% de los átomos de bario ${}^{56}_{143}Ba$ se tiene que resolver la ecuación $0{,}2N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ o lo que es lo mismo:

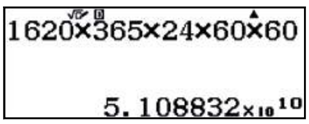
$$0{,}2 = e^{-0{,}0688t}$$

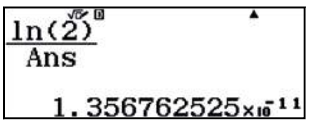


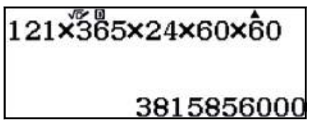
Es decir, a los 23,4 segundos aproximadamente se ha desintegrado el 80% de la muestra.

4

El periodo de semidesintegración del radio es T = 1 620 años = 5,1088 · 10^{10} s, la constante de desintegración λ = 1,3568 · 10^{-11} s^{-1} y el tiempo transcurrido 2 019 – 1 898 = 121 años = 3,8159 · 10^9 s:

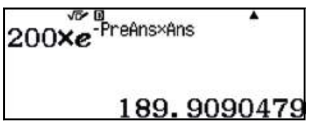






La ley de desintegración radiactiva sigue siendo válida si se expresa N en términos de masa en vez del número de átomos (debido a la proporcionalidad directa existente entre ambas magnitudes):

$$m(3{,}8159 \cdot 10^9) = 200 \cdot e^{-1{,}3568 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}8159 \cdot 10^9} \approx 189{,}91 \text{ mg}$$



22 | Función exponencial y función logarítmica
¿Es apta para el baño el agua de la piscina?

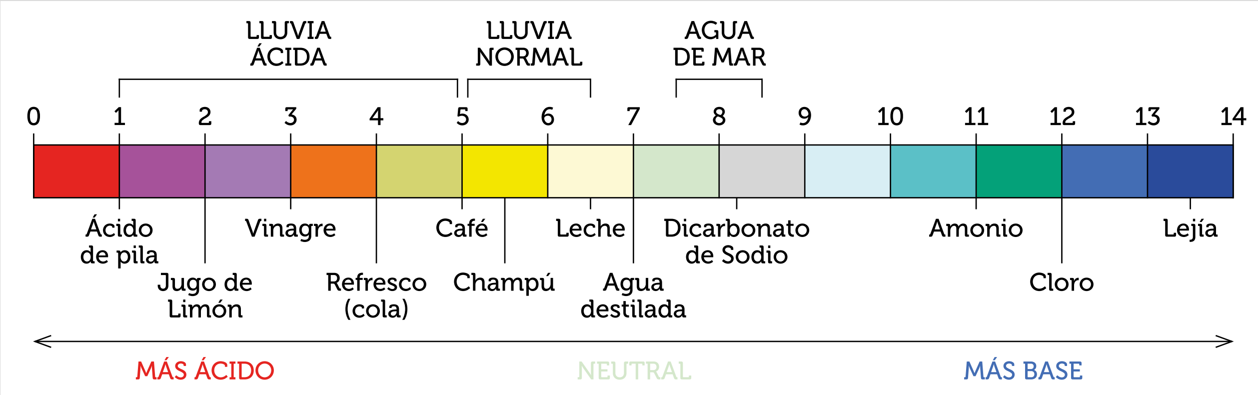
El pH es un parámetro muy usado en química para medir el grado de acidez o alcalinidad de las sustancias, la mayoría líquidos.

Esta medida está basada en la concentración de iones de hidrógeno ($[H^+]$) en un líquido y se mide en mol/L (moles por litro)[1].

La fórmula del pH es:

$$pH = -\log [H^+]$$

La escala de pH va de 0 hasta 14, siendo el 0 el punto máximo de acidez y el 14 la máxima alcalinidad, el 7 representa el punto medio de la tabla y es neutro, lo que quiere decir que las soluciones con un valor por debajo del 7 son ácidas y las que están por encima son básicas o alcalinas.



En una piscina, el valor óptimo de pH del agua oscila entre 7,2 y 7,6.

Si el pH disminuye por debajo de 7,2 el agua se vuelve ácida provocando problemas a las personas (irritación de la piel, ojos y mucosas) y a los materiales de la piscina (corrosión de escaleras, válvulas, bombas o en el propio filtro de la piscina).

Si el pH aumenta por encima de 7,6 el agua se vuelve demasiado alcalina, el desinfectante pierde efectividad, y en consecuencia, aumenta el riesgo de contagio de enfermedades. En este caso, la piel se irrita y reseca, y se fomenta la aparición de algas y calcio en la superficie del agua.

El pH del agua de las piscinas tiende a adquirir propiedades alcalinas, por ello es muy importante controlar diariamente este valor. La acción del desinfectante (cloro) depende directamente de este valor, pues si el pH del agua no se encuentra dentro del rango óptimo, el desinfectante perderá su efectividad.

1 Si una piscina tiene una concentración de iones de hidrógeno de $3{,}16 \cdot 10^{-9}$ mol/L, ¿es aconsejable bañarse en ella?

2 ¿Entre qué valores debe oscilar la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ para que el baño en la piscina no comporte riesgo para la salud?

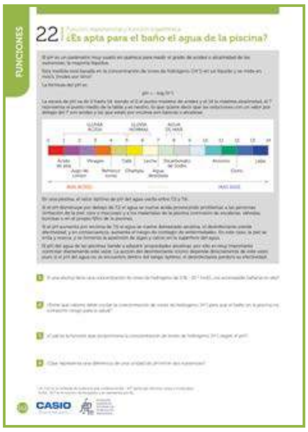
3 ¿Cuál es la función que proporciona la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ según el pH?

4 ¿Qué representa una diferencia de una unidad de pH entre dos sustancias?

[1] Un mol es la cantidad de sustancia que contiene $6{,}022 \cdot 10^{23}$ partículas (átomos, iones o moléculas). $6{,}022 \cdot 10^{23}$ es el número de Avogadro y se representa por N_A.

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

22 | Función exponencial y función logarítmica
¿Es apta para el baño el agua de la piscina?

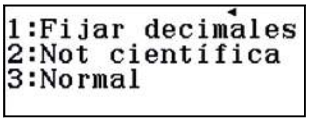


MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

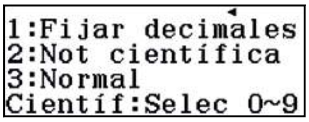
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan para modelizar situaciones del mundo real. Las funciones logarítmicas son muy útiles cuando se quieren modelizar fenómenos que tienen un rango muy amplio de valores.
- Para contestar a la segunda cuestión, se configura la calculadora para que el formato de número sea en notación científica:

ALPHA MENU 3



En este caso, se ha elegido la notación científica con tres cifras significativas:

2



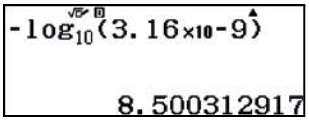
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se calcula el siguiente logaritmo:

$$pH = -\log (3{,}16 \cdot 10^{-9})$$

(−) log▪□ 1 0 ▶ 3 • 1 6 ×10ˣ (−) 9 =



Dado que el valor del pH del agua de la piscina es mayor que 7,6 el desinfectante pierde efectividad y el riesgo de contagio de enfermedades es alto. No es aconsejable el baño en la piscina.

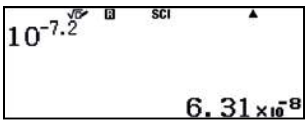
2

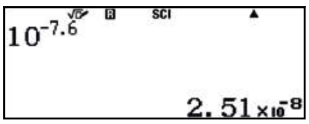
Para que el baño sea aconsejable, el valor óptimo de pH del agua debe oscilar entre 7,2 y 7,6.

Para calcular el rango óptimo de la concentración de iones de hidrógeno, basta con resolver las siguientes expresiones:

$$7{,}2 = -\log x \quad \text{y} \quad 7{,}6 = -\log y$$

Despejando el logaritmo en cada expresión y aplicando la definición de logaritmos se obtiene que $x = 10^{-7{,}2}$ e $y = 10^{-7{,}6}$:



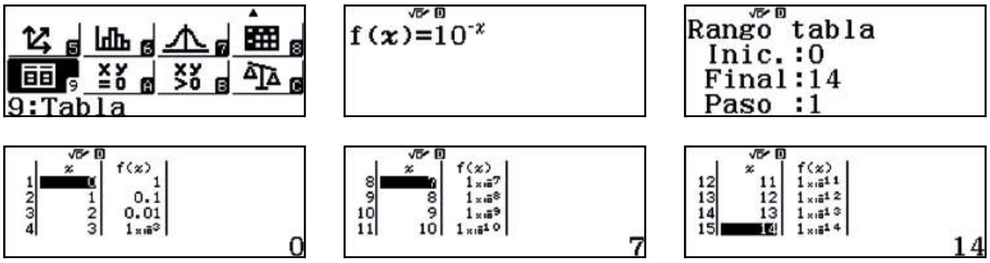


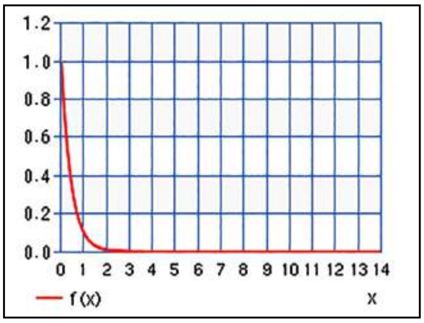
Luego, la concentración de iones de hidrógeno para que el baño en la piscina no comporte riesgo para la salud debe oscilar entre $2{,}51 \cdot 10^{-8}$ y $6{,}31 \cdot 10^{-8}$ mol/L.

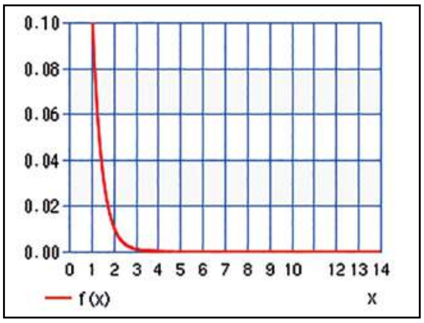
22 | Función exponencial y función logarítmica
¿Es apta para el baño el agua de la piscina?

3

La función que permite conocer la concentración de iones de hidrógeno según su pH es la función exponencial $y = 10^{-x}$, cuya gráfica se obtiene generando un código *QR* desde la tabla de valores (menú *Tabla*) de la mencionada función:







4

La escala del pH es logarítmica, por tanto una diferencia de una unidad entre dos sustancias supone que una de ellas es 10 veces más básica o más ácida que la otra.

$$\text{pH}(A) - \text{pH}(B) = 1$$

$$-\log[\text{H}^+]_A + \log[\text{H}^+]_B = 1$$

$$\log\frac{[\text{H}^+]_B}{[\text{H}^+]_A} = 1$$

$$\frac{[\text{H}^+]_B}{[\text{H}^+]_A} = 10$$

¿Es apta para el baño el agua de la piscina?

Ampliación

La ionización, disolución en iones, del agua pura se representa de forma simplificada como:

$$H_2O \rightleftarrows H^+ + OH^-$$

El producto de la concentración de iones hidronio o de hidrógeno [(H^+)] por la concentración de iones de hidroxilo [(OH^-)] se denomina producto iónico del agua y se representa por K_w.

A una temperatura de 25º C el producto iónico tiene un valor constante de 10^{-14}.

$$K_w = [H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14}$$

De esta expresión se deduce que las concentraciones de iones de hidronio y de hidroxilos son inversamente proporcionales, es decir, para que el valor de la constante se mantenga como tal, el aumento de una de las concentraciones implica la disminución de la otra en la misma proporción.

En el agua pura por cada ion hidronio hay un ion hidroxilo, por tanto $10^{-7} \cdot 10^{-7} = 10^{-14}$.

1 La cantidad de iones de hidroxilo viene dado por la fórmula $pOH = -\log [OH^-]$, siendo $[OH^-]$ la concentración de iones de hidroxilo. ¿Qué relación hay entre el pH y el pOH?

2 Completa la siguiente tabla:

PRODUCTOS COTIDIANOS				
Producto	**pH**	**$[H^+]$**	**$[OH^-]$**	**pOH**
Vinagre	3			
Bebidas carbonatadas			10^{-11}	
Pasta de dientes				4,1
Naranjas	3,5			
Leche de vaca		$3{,}98 \cdot 10^{-7}$		
Agua de mar				6

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Tomando logaritmos decimales en la expresión $[H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14}$, se tiene:

$$\log([H^+] \cdot [OH^-]) = \log 10^{-14}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log([H^+]) + \log([OH^-]) = -14$$

Cambiando el signo en la expresión, se obtiene:

$$-\log([H^+]) - \log([OH^-]) = 14$$

Finalmente, sustituyendo $-\log([H^+])$ por pH y $-\log([OH^-])$ por pOH se obtiene:

$$pH + pOH = 14$$

2

La tabla se rellena con facilidad utilizando la relación del **apartado anterior** y las fórmulas de pH y pOH.

23 | Funciones definidas a trozos
Caudales domésticos de agua

El consumo de agua en un edificio varía en función de la actividad que en él se desarrolla, horas del día, etc. Para determinar el diámetro de las tuberías a instalar, se debe realizar un cálculo hidráulico para estimar el caudal simultáneo máximo en la instalación de cada vivienda.

El cálculo del caudal simultáneo máximo Q_s viene dado por la expresión:

$$Q_s = \left(\sum_i q_i\right) \cdot k \qquad \text{dm}^3/\text{s}$$

donde la suma de todos los caudales q_i, correspondientes a cada tubería, están multiplicados por un coeficiente de simultaneidad k menor que la unidad, ya que normalmente, no todos los grifos están abiertos a la vez. El valor de este coeficiente k (norma francesa) viene dado por la expresión:

$$k = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

donde x es el número de grifos instalados en la unidad de estudio y el valor mínimo del coeficiente es $k = 0{,}2$

Cada uno de los aparatos domésticos de uso común debe recibir, con independencia del estado de funcionamiento de los demás, una demanda unitaria de caudales instantáneos mínimos de agua (q_i), de acuerdo con la siguiente tabla:

Tipo de aparato	Caudal instantáneo mínimo de agua fría (dm^3/s)	Caudal instantáneo mínimo de ACS (dm^3/s)
Lavabo	0,10	0,065
Ducha	0,20	0,10
Bañera de 1,40 m o más	0,30	0,20
Bidé	0,10	0,065
Inodoro con cisterna	0,10	-
Fregadero doméstico	0,20	0,10
Lavavajillas doméstico	0,15	0,10
Lavadero	0,20	0,10
Lavadora doméstica	0,20	0,15
Grifo aislado	0,15	0,10
Grifo garaje	0,20	-

*La demanda es menor en ACS (agua caliente sanitaria) porque al estar ésta a 60 ºC, se mezcla con la fría para consumir a aproximadamente 40 ºC

1 ¿A partir de qué número de grifos instalados, el coeficiente toma el valor constante $k = 0{,}2$?

2 Describe y representa la función que calcula el coeficiente de simultaneidad según el número de grifos.

3 Calcula el caudal máximo para una instalación como la de tu vivienda.

23 | Funciones definidas a trozos
Caudales domésticos de agua

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad el alumnado podrá desarrollar estándares de operaciones, estimación, ecuaciones y funciones definidas a trozos. La resolución de un problema con datos reales facilita la conexión de las matemáticas con el mundo real.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

  Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a http://wes.casio.com/es-es/class.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

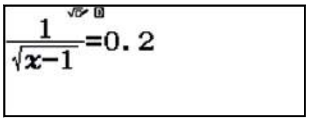
1

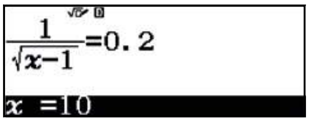
Para encontrar el número de grifos a partir del cual el coeficiente de simultaneidad toma el valor mínimo $k = 0{,}2$ se resuelve la ecuación con radicales:

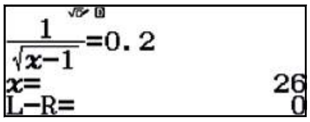
$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{5} \rightarrow \sqrt{x-1} = 5 \rightarrow x = 26$$

Se puede también resolver con la función *SOLVE* SHIFT CALC :







Para introducir el signo = se utiliza ALPHA CALC .

2

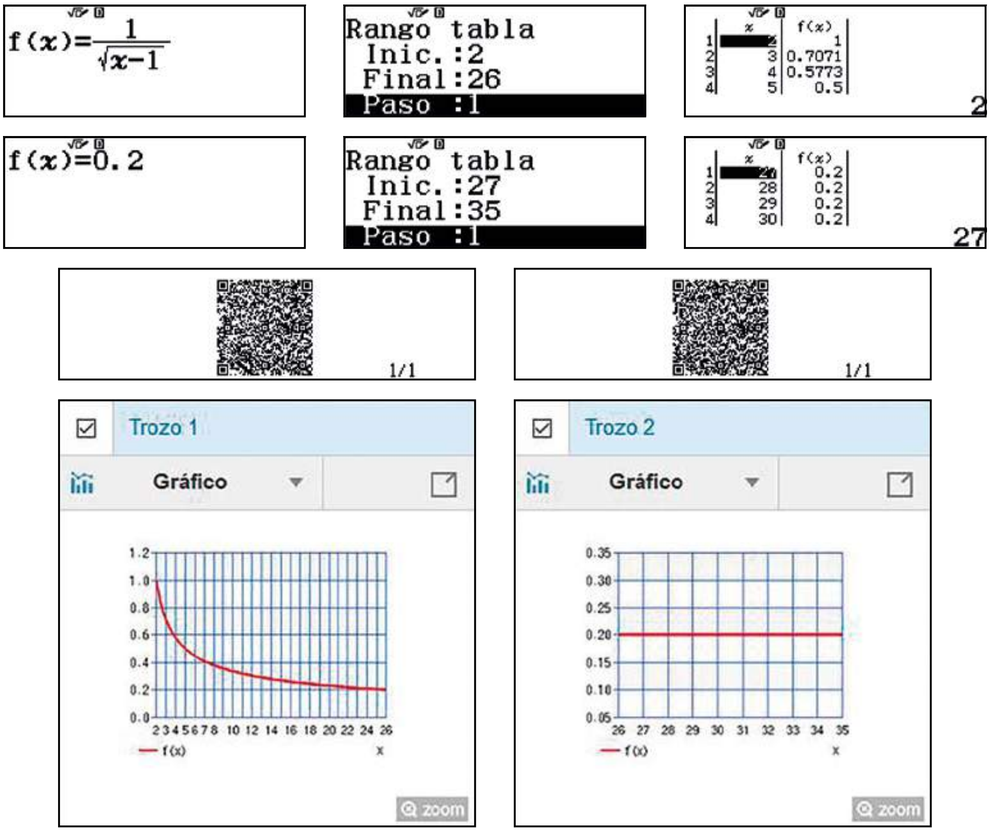
La función $k(x)$ que expresa el valor del coeficiente de simultaneidad, en función del número x de grifos instalados es:

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{si } 2 \leq x < 26 \\ 0{,}2 & \text{si } x \geq 26 \end{cases} \qquad x \text{ toma valores enteros}$$

Se incorporan los dos trozos de la función a la clase que se ha creado en la aplicación CASIO EDU+:

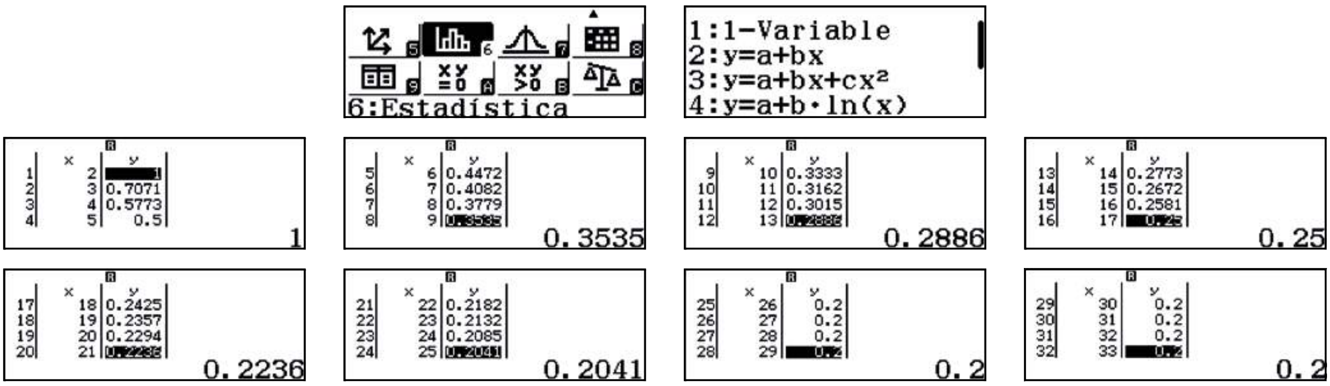
http://wes.casio.com/class/u7j6-9NrI-SsWs-nRju

23 Funciones definidas a trozos
Caudales domésticos de agua

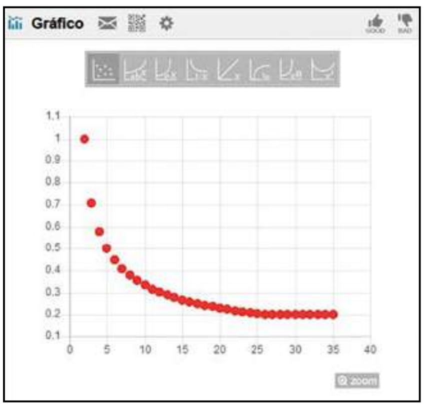


Se pueden visualizar los dos trozos de manera que las representaciones sean punto a punto, y combinarlos, si se introducen los datos desde el menú *Estadística*.

Se elige, por ejemplo, la opción 2 y se introducen los valores que se han obtenido en las tablas anteriores:



Generando un código *QR* se visualiza la nube de puntos:



3

A modo de ejemplo, se considera una vivienda con la siguiente instalación:

UNIDADES	Tipo de aparato	Caudal instantáneo mínimo de agua fría (dm^3/s)
1	Lavadero	0,20
1	Lavadora doméstica	0,20
1	Fregadero doméstico	0,20
1	Lavavajillas doméstico	0,15
2	Inodoro con cisterna	2 · 0,10
2	Lavabo	2 · 0,10
1	Ducha	0,20
1	Bañera de 1,40 m o más	0,30
1	Bidé	0,10
11		$\sum_i q_i$ **= 1,75 dm³/s**

Se analiza el valor del coeficiente de simultaneidad para 11 unidades instaladas:

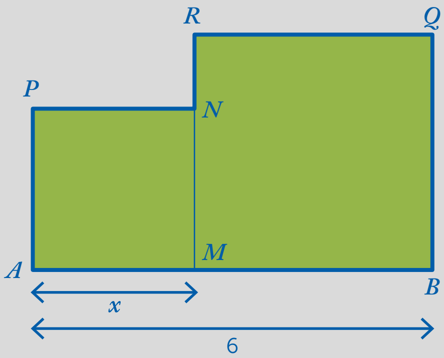
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$k(x) = 0{,}3162$$

Se obtiene que el caudal máximo que pasará es:

$$Q_s = 1{,}75 \cdot 0{,}3162 = 0{,}55335 \text{ dm}^3/\text{s}$$

24 | Función valor absoluto
Perímetro de un hexágono



Sea M un punto sobre el segmento $\overline{AB}$ = 6 cm.

Sobre el mismo segmento se dibujan los cuadrados $AMNP$ y $MBQR$ como se muestra en la figura adjunta siendo $\overline{AM} = x$.

De esta manera se obtiene el hexágono $ABQRNP$.

1 Calcula el perímetro del hexágono $ABQRNP$ para x = 1 cm.

2 Rellena la siguiente tabla:

x (cm)	Perímetro $ABQRNP$ (cm)
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	
4,5	
5	
5,5	
6	
x	$P(x)$ =

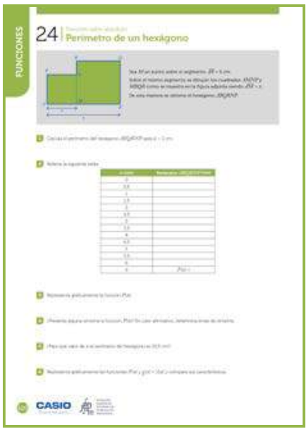
3 Representa gráficamente la función $P(x)$.

4 ¿Presenta alguna simetría la función $P(x)$? En caso afirmativo, determina el eje de simetría.

5 ¿Para qué valor de x el perímetro del hexágono es 20,5 cm?

6 Representa gráficamente las funciones $P(x)$ y $g(x) = |2x|$ y compara sus características.

24 | Función valor absoluto
Perímetro de un hexágono



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Expresar una función utilizando el valor absoluto.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Construir la tabla de valores de dos funciones.
  - Representar gráficas.
  - Comparar dos funciones.
  - Resolver ecuaciones con la función *SOLVE*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 **2**

De la figura se deduce que:

$$\overline{RM} = 6 - x$$

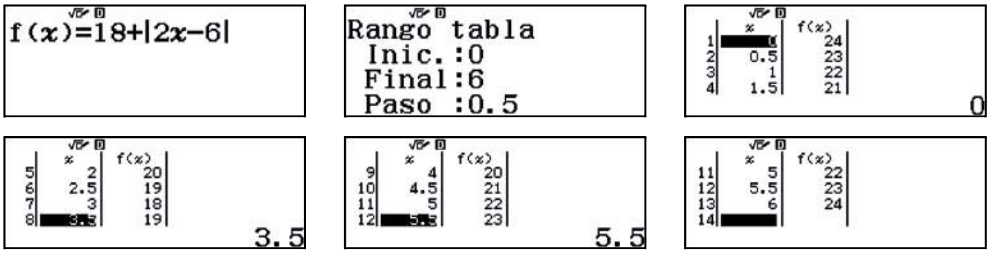
$$\overline{RN} = |\overline{RM} - \overline{MN}| = |(6 - x) - x| = |6 - 2x| = |2x - 6|$$

En consecuencia, el perímetro del hexágono $ABQRNP$ es:

$$P(x) = 6 + (6 - x) + (6 - x) + |2x - 6| + x + x = 18 + |2x - 6|$$

$$P(1) = 18 + |2 \cdot 1 - 6| = 22 \text{ cm}$$

Para construir la tabla se utiliza el menú *Tabla*:

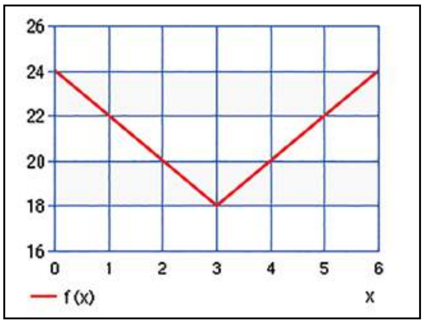


x (cm)	Perímetro $ABQRNP$ (cm)
0	24 cm
0,5	23 cm
1	22 cm
1,5	21 cm
2	20 cm
2,5	19 cm
3	18 cm
3,5	19 cm
4	20 cm
4,5	21 cm
5	22 cm
5,5	23 cm
6	24 cm
x	$P(x) = 18 + \|2x - 6\|$

24 | Función valor absoluto
Perímetro de un hexágono

3

Para representar la función se utiliza el código *QR*:



4

En la gráfica se aprecia que la función es simétrica respecto de la recta $x = 3$.

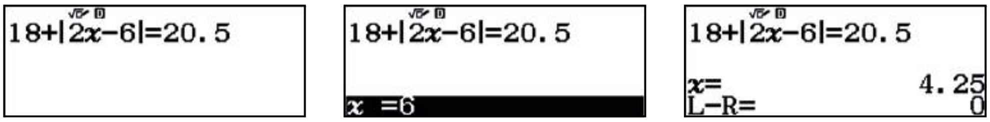
5

Para determinar el valor de x de manera que el perímetro del hexágono sea 20,5 cm, se resuelve la ecuación:

$$P(x) = 20{,}5$$

$$18 + |2x - 6| = 20{,}5$$

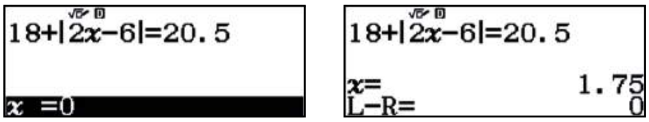
Se utiliza la función *SOLVE* para resolverla:



Una solución es $x = 4{,}25$ cm.

Como la función es simétrica respecto de la recta $x = 3$, se deduce que la otra solución es $x = 1{,}75$ cm.

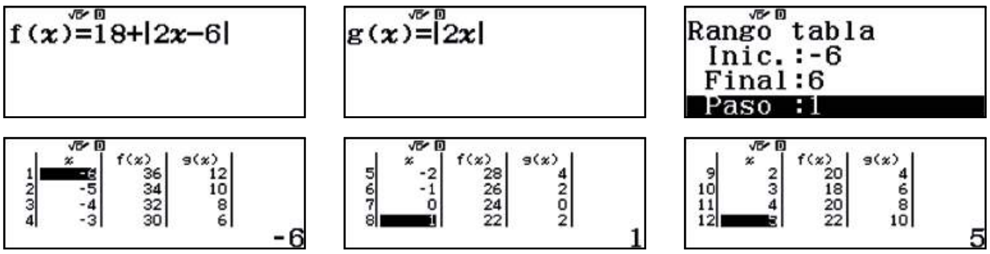
Para obtener esta solución con la calculadora se tiene que dar a la semilla un valor menor que 3. Por ejemplo $x = 0$:



Por consiguiente, el perímetro del hexágono es 20,5 cm cuando x vale 1,75 cm o 4,25 cm.

6

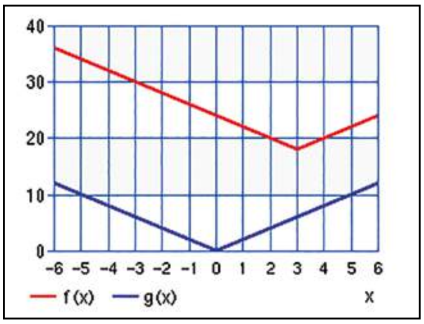
Para representar las funciones $P(x) = 18 + |2x - 6|$ y $g(x) = |2x|$ se construye una tabla con las dos funciones en el menú *Tabla*:



24 | Función valor absoluto
Perímetro de un hexágono

Se utiliza el código *QR* para obtener las gráficas de ambas funciones en los mismos ejes:

1/1



Se aprecia que la función $P(x) = 18 + |2x - 6|$ es una traslación de la función $g(x) = |2x|$, con un desplazamiento horizontal de 3 unidades a la derecha y uno vertical de 18 unidades hacia arriba.

Ampliación

1 Representa en los mismos ejes las funciones $f(x) = |3x|$ y $g(x) = |3x + 12| - 2$.

¿Qué desplazamientos hay que hacer para pasar de la función $f(x)$ a la función $g(x)$?

2 Aplica una traslación vertical de 2 unidades hacia arriba a la función $f(x) = |4x|$, ¿qué función se obtiene? Escribe su expresión analítica.

¿Qué función se obtiene si se aplica una traslación vertical hacia abajo de 8 unidades?

3 Aplica una traslación horizontal de 5 unidades hacia la derecha a la función $f(x) = |4x|$, ¿qué función se obtiene? Escribe su expresión analítica.

¿Qué función se obtiene si se aplica una traslación horizontal hacia la izquierda de 10 unidades?

25 | Función potencial
Tercera Ley de Kepler

En la siguiente tabla se relaciona la distancia media entre el Sol y cada uno de los planetas con el periodo orbital (tiempo que tarda en efectuar una vuelta completa cada planeta alrededor del Sol).

1UA (unidad astronómica) es igual a la distancia media del Sol a la Tierra.

1 año es el periodo orbital de la Tierra.

Planeta	Distancia media Sol-Planeta (UA)	Periodo orbital (años)
Mercurio	0,387	0,24
Venus	0,7239	0,62
Tierra	1	1
Marte	1,524	1,88
Júpiter	5,203	11,86
Saturno	9,537	29,45
Urano	19,191	
Neptuno		164,79

1 Dibuja una gráfica que represente el periodo orbital en función de la distancia media.

2 Sabiendo que la relación entre la distancia media x, y el periodo orbital T es potencial, es decir, $T = a \cdot x^b$, determina la expresión de la función.

Tercera Ley de Kepler del movimiento de los planetas.

Para cualquier planeta, el cuadrado del periodo orbital (T) o tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol, es directamente proporcional al cubo de la distancia media al Sol (R).

$$T^2 = k \cdot R^3,\ k \approx 1 \frac{\text{años}^2}{\text{UA}^3}.$$

3 Rellena los datos que faltan en la tabla.

25 | Función potencial
Tercera Ley de Kepler

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

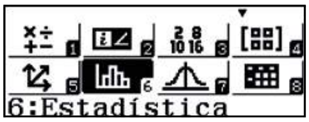
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Calcular la regresión potencial.
  - Representar la gráfica de una nube de puntos.
- Se utiliza la función *SOLVE* para resolver una ecuación irracional.

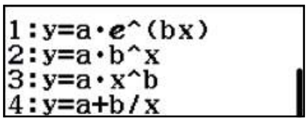
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

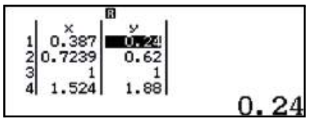
1

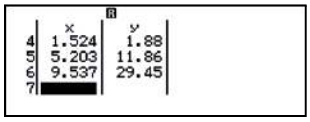
Para dibujar la gráfica, se rellena la tabla desde el menú *Estadística* (regresión potencial):

MENU 6 ▼ 3

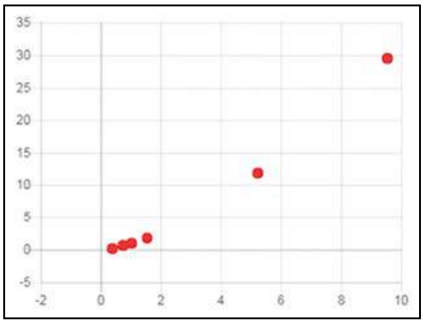






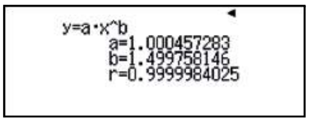


Se dibuja la nube de puntos con el código *QR*:



2

Se calcula la regresión con la calculadora (OPTN 4):

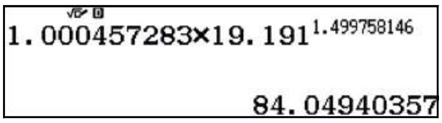


Se observa que, aproximadamente, el coeficiente de correlación es 1, y la regresión potencial es: $y = x^{3/2}$.

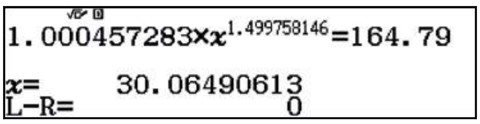
Función que cumple la tercera ley de Kepler.

3

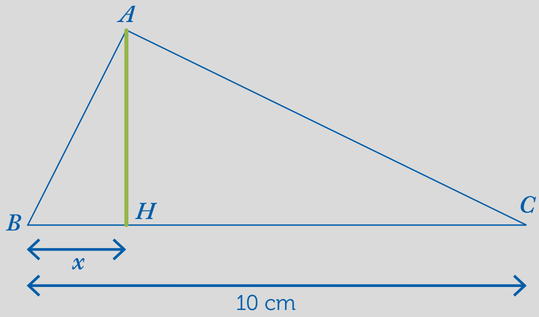
Se calcula el periodo orbital de Urano, aproximadamente 84,05 años:



Con la función *SOLVE* se obtiene que la distancia de Neptuno al Sol es, aproximadamente, 30,06 UA.



26 | Función con radicales
Teorema de la altura



En un triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ siendo $\hat{A} = 90°$ y $\overline{BC} = 10$ cm se traza la altura $\overline{AH}$.

Sea $\overline{BH} = x$.

Teorema de la altura

Dado el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ siendo $\hat{A} = 90°$ y $\overline{AH}$ la altura . Se tiene que $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$.

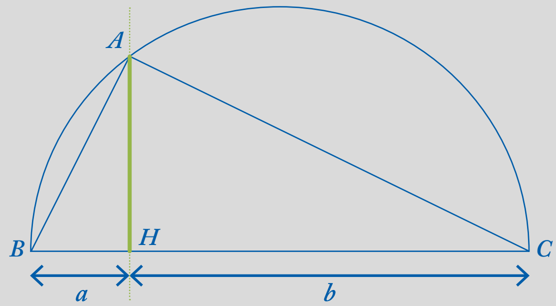
Dados dos números $a > 0$, $b > 0$, definimos la media geométrica de a y b como $M_G = \sqrt{a \cdot b}$.

Para construir, geométricamente, la media geométrica se dibuja un arco capaz de 90° sobre un segmento $\overline{BC} = a + b$, $\overline{BH} = a$, $\overline{CH} = b$.

Se dibuja la recta perpendicular por el punto H al segmento $\overline{BC}$ que corta al arco capaz en el punto A, $\angle BAC = 90°$, entonces: $\overline{AH} = \sqrt{a \cdot b}$.

La media aritmética de dos números $a > 0$, $b > 0$ es $M_A = \frac{a+b}{2}$, radio del arco capaz.

Se observa en el gráfico que $M_A \geq M_G$. La igualdad se alcanza cuando $a = b$.



1 Calcula la longitud $\overline{AH}$ de la altura para $x = 1$ cm.

2 Rellena la siguiente tabla:

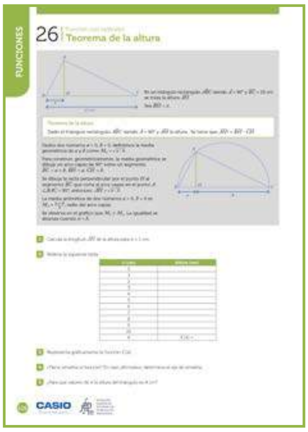
x (cm)	Altura (cm)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
x	$L(x) =$

3 Representa gráficamente la función $L(x)$.

4 ¿Tiene simetría la función? En caso afirmativo, determina el eje de simetría.

5 ¿Para qué valores de x la altura del triángulo es 4 cm?

26 | Función con radicales
Teorema de la altura



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Aplicar el teorema de la altura en un triángulo rectángulo.
  - Expresar una función utilizando radicales.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar gráficas.
  - Resolver ecuaciones con la función *SOLVE*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 **2**

Se aplica el teorema de la altura al triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$:

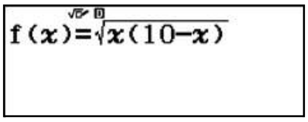
$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$$

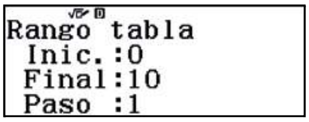
$$\overline{AH}^2 = x \cdot (10 - x)$$

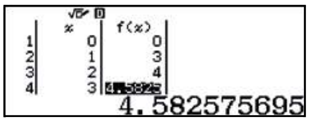
Entonces, $L(x) = \sqrt{x \cdot (10 - x)}$, $x \in [0, 10]$.

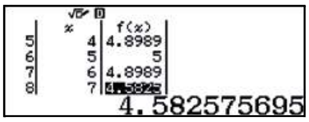
Si $x = 1$ cm, $\overline{AH} = L(1) = \sqrt{1 \cdot 9} = 3$ cm.

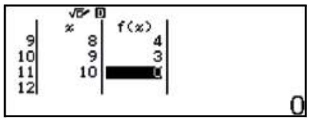
Para construir la tabla se utiliza el menú *Tabla*:











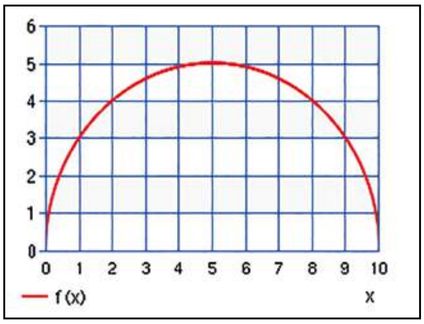
La tabla queda de la siguiente manera:

x (cm)	Altura (cm)
0	0
1	3
2	4
3	4,583
4	4,899
5	5
6	4,899
7	4,583
8	4
9	3
10	0
x	$L(x) = \sqrt{x \cdot (10 - x)}$

26 | Función con radicales
Teorema de la altura

3

Para representar la función se utiliza el código *QR*:



Se observa que el vértice A recorre el arco capaz de 90° sobre $\overline{BC}$, es decir, la semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$.

4

La función es simétrica respecto de la recta x = 5.

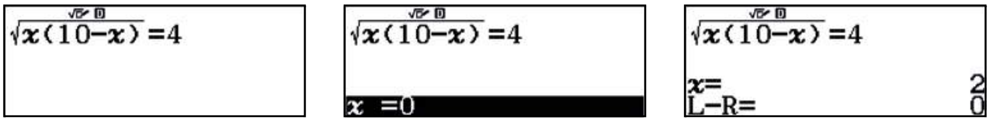
5

Para calcular los valores de x tales que la altura mide 4 cm se resuelve la ecuación:

$$L(x) = 4$$

$$\sqrt{x \cdot (10 - x)} = 4$$

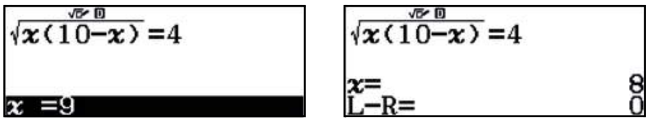
Para resolverla se utiliza la función *SOLVE*:



En consecuencia, la altura $\overline{AH}$ del triángulo $A\hat{B}C$ mide 4 cm cuando $x = \overline{BH}$ = 2 cm.

Ahora bien, como la función es simétrica respecto de la recta x = 4, hay otra solución que es x = 8 cm.

Para obtener esta solución se tiene que dar a la semilla un valor mayor que 4. Por ejemplo, x = 9:



Problema

Armarios semejantes

En una conocida tienda de muebles he visto un armario de dimensiones: 70 cm de ancho, 100 cm de altura y 30 cm de profundidad.

Quiero hacerme uno para mi casa de la misma forma pero un poco más grande y me pregunto:

1. ¿Tendrá la misma forma si aumento en 20 cm la altura y dejo las otras dimensiones iguales?

2. ¿Y si aumento en 20 cm todas las dimensiones?

3. Si quiero que el armario mida 1,30 cm de alto y mantenga la forma, ¿cuánto medirán las otras dos dimensiones?

4. Si se aumenta la altura en x cm, ¿cuánto medirán las otras dimensiones? Representa gráficamente las funciones de las dimensiones del ancho y de profundidad en los mismos ejes de coordenadas.

1

No, pues las dimensiones no son proporcionales: $\frac{30}{30} = \frac{70}{70} \neq \frac{100}{120}$.

2

No, pues $\frac{30}{50} \neq \frac{70}{90} \neq \frac{100}{120}$.

3

El ancho medirá 91 cm y la profundidad 39 cm, pues:

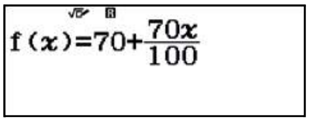
$$\frac{100}{130} = \frac{70}{x} \text{ si } x = \frac{130 \cdot 70}{100} = 91 \text{ cm} \quad \text{y} \quad \frac{100}{130} = \frac{30}{x} \text{ si } x = \frac{130 \cdot 30}{100} = 39 \text{ cm}$$

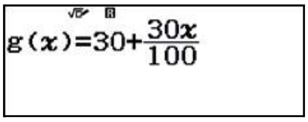
4

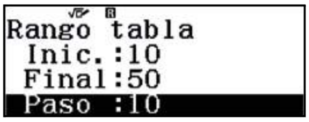
De $\frac{100}{100+x} = \frac{70}{y}$ se obtiene que la dimensión del ancho es $y = 70 + \frac{70 \cdot x}{100}$

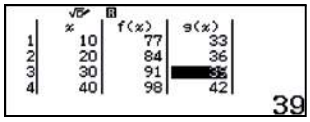
De $\frac{100}{100+x} = \frac{30}{z}$ se obtiene que la dimensión de la profundidad es $z = 30 + \frac{30 \cdot x}{100}$

Para representar gráficamente las funciones en los mismos ejes de coordenadas se utiliza el menú *Tabla* y se genera un código *QR*:

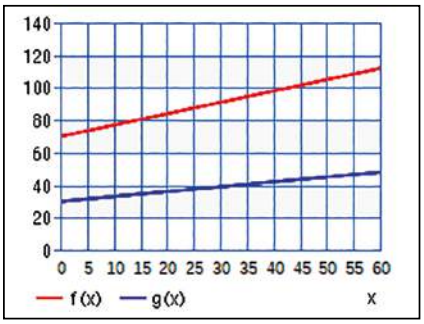








1/1



27 | Función seno
Área de una cometa

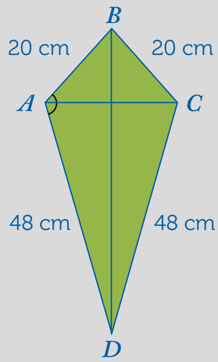
En Valencia es tradición volar cometas en las fiestas de Pascua.

En la playa de la Malvarrosa de Valencia durante dichas fiestas se realiza un concurso de cometas.

Para construir una cometa como la de la figura se dispone de dos cañas

de 20 cm de longitud, dos de 48 cm y dos transversales.

Se considera x el ángulo $\angle BAD$.



1 ¿Cuánto vale el área de la cometa si $x = \frac{5\pi}{6}$ rad?

2 Rellena la siguiente tabla:

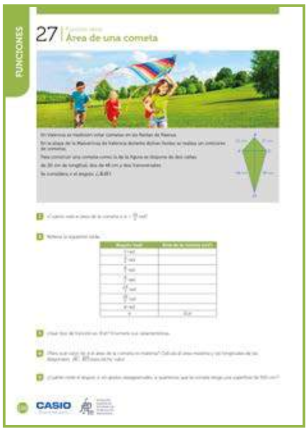
Ángulo (rad)	Área de la cometa (cm²)
0 rad	
$\frac{\pi}{6}$ rad	
$\frac{\pi}{3}$ rad	
$\frac{\pi}{2}$ rad	
$\frac{2\pi}{3}$ rad	
$\frac{5\pi}{6}$ rad	
π rad	
x	$S(x)$

3 ¿Qué tipo de función es $S(x)$? Enumera sus características.

4 ¿Para qué valor de x el área de la cometa es máxima? Calcula el área máxima y las longitudes de las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ para dicho valor.

5 ¿Cuánto mide el ángulo x, en grados sexagesimales, si queremos que la cometa tenga una superficie de 500 cm^2?

27 | Función seno
Área de una cometa



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Aplicar la fórmula trigonométrica del área de un triángulo.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar gráficas.
  - Estudiar la función sinusoide.
  - Resolver ecuaciones trigonométricas.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 **2**

El área del triángulo $A\hat{B}D$ en función del ángulo es:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \text{sen}\, x$$

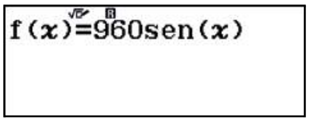
El área de la cometa $ABCD$ es el doble del área del triángulo $A\hat{B}D$:

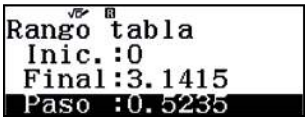
$$S(x) = 960 \cdot \text{sen}\, x,\ x \in [0, \pi]$$

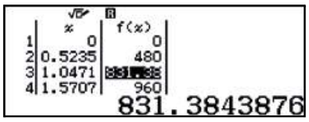
Para construir la tabla de la función se utiliza el menú *Tabla* y las unidades angulares se expresan en radianes:

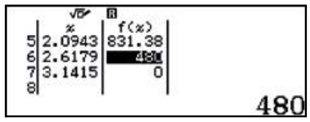
9 6 0 sen x)

= 0 = SHIFT x10ˣ =
SHIFT x10ˣ ÷ 6 =









El área del cometa para $x = \frac{5\pi}{6}$ rad es:

$$S\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 480\ \text{cm}^2$$

La tabla queda de la siguiente manera:

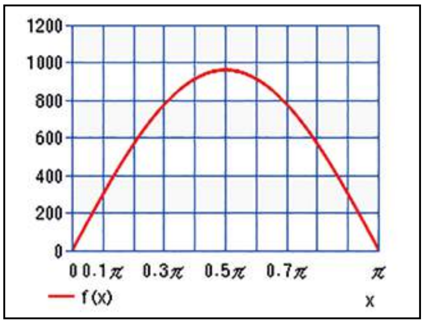
Ángulo (rad)	Área de la cometa (cm²)
0 rad	0 cm²
$\frac{\pi}{6}$ rad	480 cm²
$\frac{\pi}{3}$ rad	831,38 cm²
$\frac{\pi}{2}$ rad	960 cm²
$\frac{2\pi}{3}$ rad	831,38 cm²
$\frac{5\pi}{6}$ rad	480 cm²
π rad	0 cm²
x	$S(x)$

27 | Función seno
Área de una cometa

3 **4**

Para representar gráficamente la función se utiliza la función *QR*:

1/1



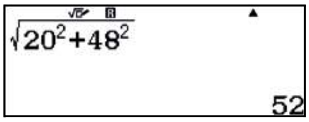
La función es una sinusoide.

El área máxima de la cometa se alcanza en $x = \frac{\pi}{2}$ rad:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 960 \text{ cm}^2$$

Para $x = \frac{\pi}{2}$ rad el triángulo $A\hat{B}D$ es rectángulo. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

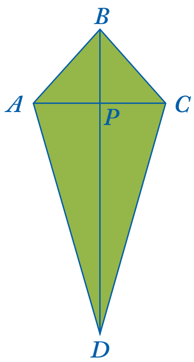
$$\overline{BD} = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52 \text{ cm}$$



Dado que las diagonales de la cometa, $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$, son perpendiculares siendo P su punto de intersección, se deduce que el área del triángulo $A\hat{B}D$ cuando $x = \frac{\pi}{2}$ rad es:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{960}{2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AP}$$

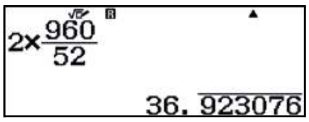
$$\frac{960}{2} = \frac{1}{2} \cdot 52 \cdot \overline{AP}$$



En consecuencia:

$$\overline{AP} = \frac{960}{52}$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AP} = 2 \cdot \frac{960}{52}$$



La diagonal $\overline{AC}$ de la cometa de área máxima es aproximadamente 36,92 cm.

5

Para calcular el valor de x que hace que el área de la cometa sea 500 cm² se resuelve la ecuación:

$$S(x) = 500$$

$$960 \cdot sen\,(x) = 500$$

27 | Función seno
Área de una cometa

La calculadora se configura con medidas angulares sexagesimales mediante la siguiente secuencia:

SHIFT MENU 2

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

1

```
1:Grado sexag (D)
2:Radián
3:Grado cent (G)
```

Para resolver la ecuación se utiliza la función *SOLVE*:

```
960sen(x)=500
```

```
960sen(x)=500

x=       31.38816646
L-R=               0
```

```
960sen(x)=500

x=      148.6118335
L-R=              0
```

La primera solución no forma una cometa. Por tanto, el ángulo x que hace que la cometa tenga una superficie de 500 cm^2 es, aproximadamente, 148° 37′:

Ans = °'"

```
Ans

      148°36'42.6"
```

Ampliación

1 Si las longitudes de las cañas son 24 y 50 cm, respectivamente, ¿para qué valor del ángulo el área de la cometa es máxima?

2 Cambia los valores de las longitudes iniciales y calcula de nuevo el valor del ángulo para que el área de la cometa sea máxima.

¿Qué observas? Redacta tus conclusiones.

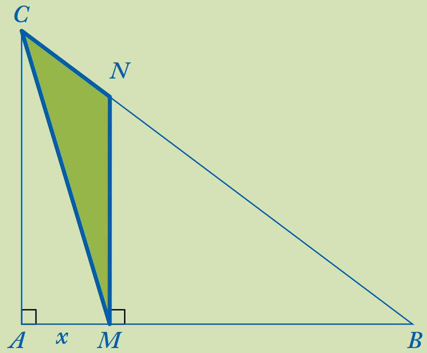
Problema

Área de un triángulo inscrito

Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo rectángulo en A, en el que $\overline{AB}$ = 8 cm y $\overline{AC}$ = 6 cm.

Sea M un punto del cateto $\overline{AB}$ y N un punto de la hipotenusa $\overline{BC}$ de forma que $\overline{MN}$ es perpendicular al lado $\overline{AB}$.

Sea $x = \overline{AM}$.



1. Calcula el área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ para x = 1 cm.

2. Determina los valores que puede tomar x.

3. ¿Qué tipo de función es $S(x)$ = Área $\overset{\triangle}{CMN}$?
Represéntala gráficamente.

4. ¿Para qué valor de x el área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ es máxima?
Calcula el valor del área máxima.

5. Si el área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ es 4 cm^2, calcula el valor de x.

6. ¿Para qué valores de x el área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ es mayor o igual que 3 cm^2?

1 **2**

Como $\overline{AB}$ = 8 cm, se tiene que $\overline{MB} = 8 - x$.

Los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{MBN}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales se obtiene:

$$\frac{\overline{MN}}{8-x} = \frac{6}{8}$$

$$\overline{MN} = \frac{3}{4}(8-x)$$

El área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ es:

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{MN} \cdot \overline{AM}$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot (8-x) \cdot x,\ x \in [0, 8]$$

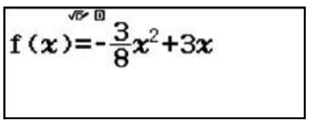
$$S(x) = -\frac{3}{8} \cdot x^2 + 3 \cdot x$$

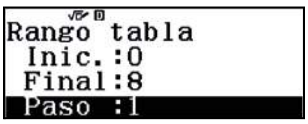
El área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ para $x = 1$ es igual a 2,625 cm^2:

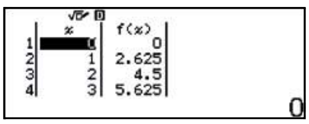
$$S(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot (8-1) \cdot 1 = \frac{21}{8} = 2{,}625$$

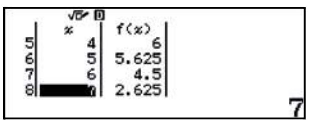
3

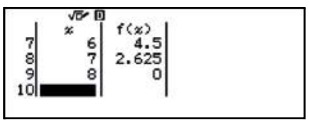
En el menú *Tabla* se realiza la tabla de valores:









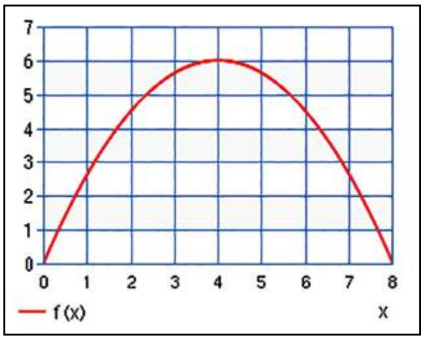


Problema

Área de un triángulo inscrito

La gráfica de la función se obtiene con el código *QR*:

1/1

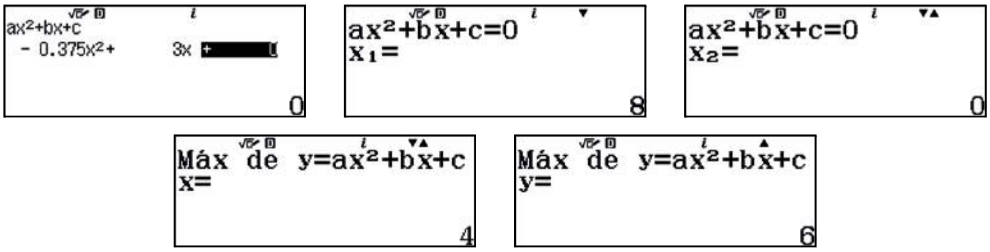


La representación gráfica de la función $S(x)$ es una parábola convexa.

4

El máximo de una función polinómica de segundo grado se alcanza en el vértice de la parábola. Para calcularlo, se resuelve, en el menú *Ecuación/Función*, la ecuación $S(x) = 0$:

$$-\frac{3}{8} \cdot x^2 + 3 \cdot x = 0$$



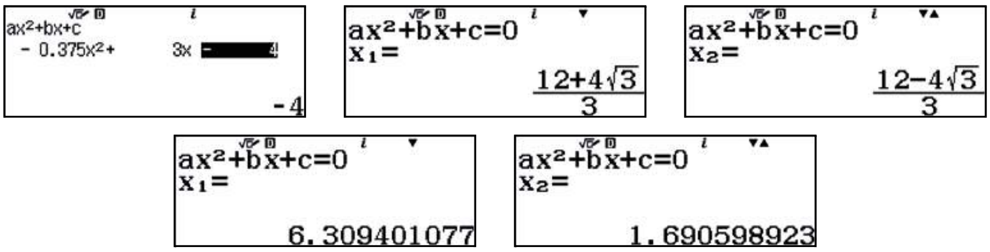
El valor máximo se alcanza en $x = 4$ cm, el punto medio del cateto $\overline{AB}$. El área máxima es $S(4) = 6$ cm², que corresponde a la cuarta parte del área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

5

Los valores de x para los que el área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ es 4 cm², se obtienen de la ecuación $S(x) = 4$:

$$-\frac{3}{8} \cdot x^2 + 3 \cdot x = 4$$

$$-\frac{3}{8} \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4 = 0$$



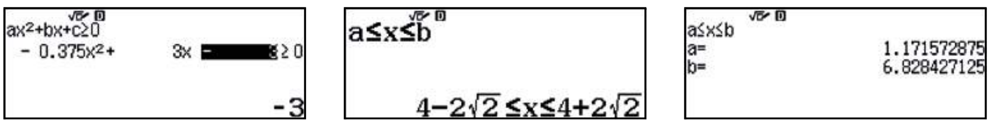
Se comprueba que ambos valores pertenecen al dominio, por lo que el área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ es 4 cm², cuando $x = \frac{12 + 4\sqrt{3}}{3} \approx 6{,}31$ cm y cuando $x = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}69$ cm.

6

Los valores de x para los que el área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ es mayor o igual que 3 cm² se obtienen de la inecuación $S(x) \geq 3$:

$$-\frac{3}{8} \cdot x^2 + 3 \cdot x - 3 \geq 0$$

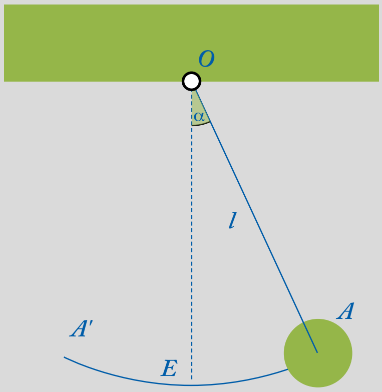
Se resuelve con el menú *Inecuación* disponible:



El área del triángulo $\overset{\triangle}{CMN}$ es mayor o igual que 3 cm² cuando $x \in [4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}]$.

28 | Descubrir y analizar
Péndulo Simple: estimación del valor de g

Se considera un péndulo simple (o péndulo matemático) a una masa de reducidas dimensiones suspendida verticalmente de un hilo (inextensible y de masa despreciable), que puede oscilar en torno a una posición de equilibrio. La distancia desde el punto de suspensión (O) al centro de gravedad de la masa es la longitud del péndulo simple (l).



Si se desplaza la masa desde la posición de equilibrio E hasta la posición A el hilo forma un ángulo α con la vertical. Al soltar la masa, oscilará en un plano vertical ya que se mueve sobre un arco de circunferencia bajo la acción de su peso y la tensión de la cuerda, describiendo un movimiento armónico simple (m.a.s.). El periodo m.a.s. se define como el tiempo que tarda el péndulo en hacer una oscilación completa (desde que sale de la posición A hasta que vuelve a ella).

El periodo del m.a.s. está relacionado con la longitud del péndulo y la aceleración de la gravedad (g) mediante la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

El periodo del péndulo se obtiene experimentalmente dividiendo el tiempo empleado en realizar las oscilaciones entre el número de estas.

1 Para determinar la aceleración de la gravedad construye un péndulo simple con un hilo fino y una bola de goma. Una vez construido hazlo oscilar, con oscilaciones pequeñas y procurando que la oscilación se produzca en un plano vertical. Separa el péndulo de la posición vertical un ángulo pequeño y déjalo oscilar libremente. Con la ayuda de un cronómetro anota el tiempo empleado para 15 oscilaciones completas a partir de la máxima separación de la posición de equilibrio. Repite esta experiencia doce veces y anota los resultados.

Longitud del péndulo (l) =												
Nº Observación	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª
Tiempo t (s)												
Periodo ($T = \frac{t}{15}$)												

Calcula la media de los periodos ($\overline{T}$).

2 Calcula la aceleración de la gravedad (g) teniendo en cuenta el valor de la longitud del péndulo (l) y los datos de la tabla del ejercicio anterior para determinar la media de los periodos ($\overline{T}$) del **apartado anterior**.

3 Si el valor adoptado por el Servicio Internacional de Pesos y Medidas de g es 9,80665 m/s², calcula el error absoluto y el error relativo que has cometido en tu aproximación.

28 | Descubrir y analizar
Péndulo Simple: estimación del valor de *g*

MATERIALES
Calculadora fx 570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad se pretende que el alumnado a partir de mediciones experimentales obtenga el valor de la aceleración de la gravedad usando estadística descriptiva.
- Es importante que las oscilaciones se produzcan en un mismo plano, pues en caso contrario los datos pueden llevar a una solución errónea.
- Al separar el péndulo de la posición vertical debe formar un ángulo con la vertical pequeño, a ser posible menor de 10º.
- Los resultados que se muestran a continuación se han obtenido sin intervención del alumnado, utilizando un péndulo de construcción casera. Para medir el tiempo se ha utilizado el cronómetro del móvil.

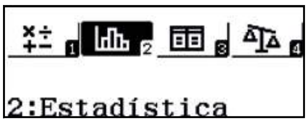
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

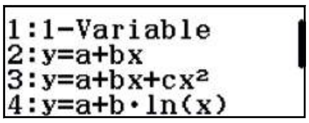
1

Los datos de la tabla adjunta se han obtenido con un péndulo de longitud l = 0'421 m (esta medida corresponde a la medida del hilo más el radio de la esfera):

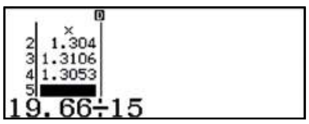
Tiempo t (s)	Periodo ($T = \frac{t}{15}$)	Tiempo t (s)	Periodo ($T = \frac{t}{15}$)
19,63	**1,3086**	19,63	**1,3086**
19,56	**1,304**	19,63	**1,3086**
19,66	**1,3106**	19,77	**1,318**
19,58	**1,3053**	18,40	**1,2266**
19,66	**1,3106**	19,57	**1,3046**
19,61	**1,3073**	19,56	**1,304**

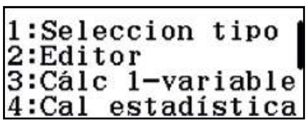
Para calcular el periodo se utiliza el menú *Estadística* y se selecciona la *opción 1-Variable*:

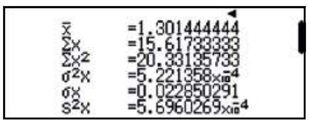


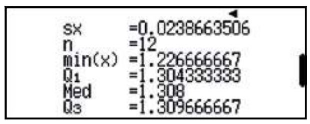


Se introduce el valor de los tiempos dividido entre el número de oscilaciones para obtener el periodo. Cuando ya están introducidos los datos, se pulsa OPTN y a continuación 3 para elegir el cálculo con una variable. Utilizando el cursor, ▼, se ven el resto de parámetros calculados:





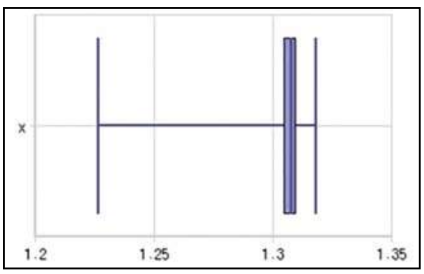




Se calcula el rango intercuartílico y la longitud de los bigotes para dibujar el diagrama de cajas y bigotes:

R.I. = $Q_3 - Q_1$ = 0,0053 s   L1= Q_1 – 1,5 · R.I. = 1.2990 s   L2 = Q_3 + 1,5 · R.I. = 1.3177 s

En el diagrama se observa que hay un dato atípico extremo:



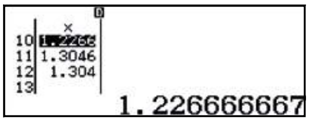
Este dato que corresponde al 1,2266 se elimina para que no distorsione el cálculo de la media del periodo.

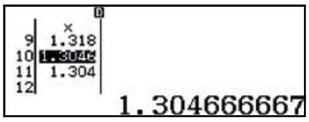
28 | Descubrir y analizar
Péndulo Simple: estimación del valor de *g*

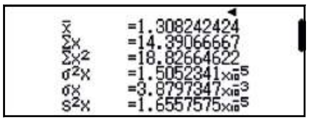
Para volver a los datos introducidos se pulsa AC.

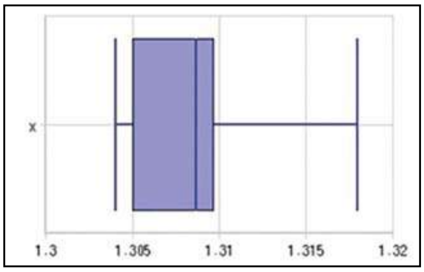
Para suprimir un dato se sitúa el cursor en la posición que se quiere borrar y se pulsa DEL.

A continuación se recalculan los parámetros estadísticos pulsando OPTN 3:





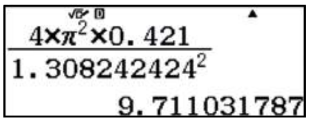




2

Para calcular la gravedad se utiliza la fórmula:

$$g = \frac{4.\pi^2 l}{T^2}$$

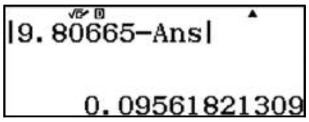


El valor de la gravedad obtenido es g = 9,711031787 m/s².

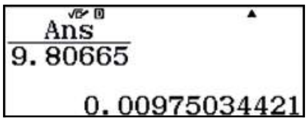
3

Se calcula el error cometido y se obtiene:

Para el error absoluto



Para el error relativo



El cálculo del error absoluto y del relativo puede no tener mucho sentido al tratarse de una medida indirecta. Sería más correcto decir que la estimación sería g = 9.71 ± 0.05 m/s² aunque el cálculo del error de la medición (±0,05) escapa a las posibilidades del alumnado de este nivel.

Ampliación

En el siguiente enlace puedes obtener el valor de g de tu ciudad:

http://www.metas.com.mx/utilerias/calculoacelgravedad.php

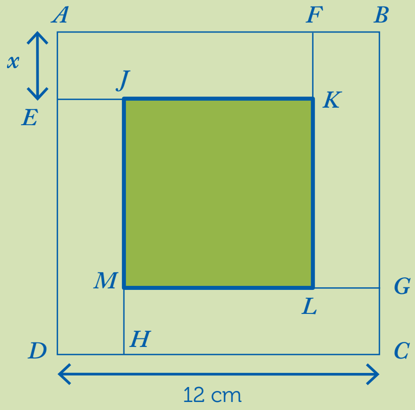
1 Calcula de nuevo el error absoluto y el error relativo que has cometido en tu aproximación con el valor de g en tu ciudad.

Problema
Área de un cuadrado

En un cuadrado $ABCD$ de lado 12 cm se han dispuesto cuatro rectángulos iguales formando un cuadrado $JKLM$ interior, tal y como se muestra en la figura.

Sea $\overline{AE} = \overline{FB} = x$.

1. Determina la expresión del área del cuadrado $JKLM$ en función de x. ¿Para qué valores de x está definida la función?
2. Calcula el área del cuadrado $JKLM$ para $x = 1$ cm.
3. ¿Qué tipo de función es $S(x)$? Represéntala gráficamente.
4. ¿Para qué valores de x el área del cuadrado $JKLM$ vale exactamente 80 cm²?
5. ¿Para qué valor de x el área del cuadrado $JKLM$ es la mitad del área del cuadrado $ABCD$?
6. Determina los valores de x para los que el área del cuadrado $JKLM$ es menor o igual que 50 cm².



1

Si $\overline{AE} = \overline{FB} = x$, de la figura se deduce que:

$$\overline{EK} = 12 - x$$

El lado del cuadrado $JKLM$ mide:

$$\overline{JK} = 12 - x - x = 12 - 2x \rightarrow x \in [0, 6]$$

El área del cuadrado $JKLM$ es

$$S(x) = (12 - 2x)^2 = 4x^2 - 48x + 144, \text{ con } x \in [0, 6]$$

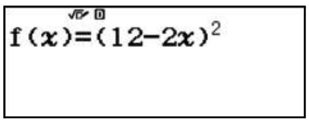
2

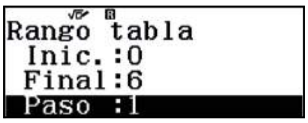
El área del cuadrado $JKLM$ para $x = 1$ se obtiene sustituyendo en la expresión anterior x por 1:

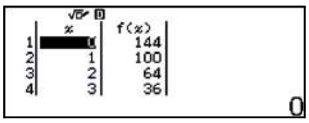
$$S(1) = 4 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 144 = 100 \text{ cm}^2$$

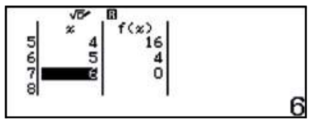
3

Se realiza la tabla de valores en el menú *Tabla*:

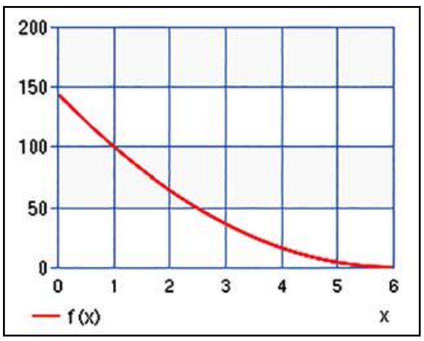








La función es una parábola cóncava cuya representación gráfica se obtiene con el código *QR*:



4

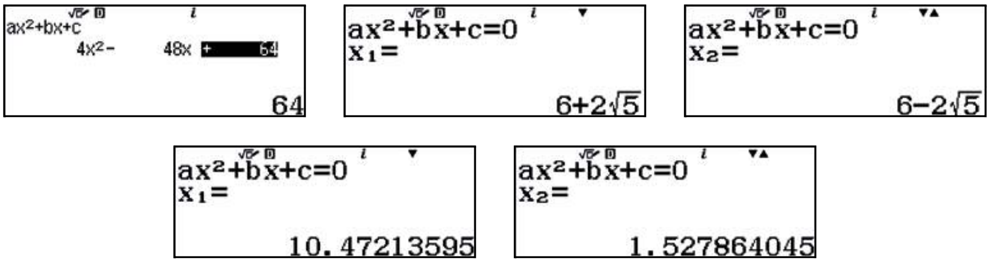
Los valores de x para los cuales el área del cuadrado $JKLM$ es 80 cm² se obtienen resolviendo la ecuación:

$$S(x) = 80 \text{ cm}^2$$

$$4x^2 - 48x + 144 = 80$$

$$4x^2 - 48x + 64 = 0$$

Para resolver la ecuación se utiliza el menú *Ecuación/Función*:



De las dos soluciones obtenidas solamente la segunda pertenece al dominio de la función.

El área del cuadrado $JKLM$ es 80 cm² cuando $x = 6 - 2\sqrt{5} \approx 1{,}53$ cm.

5

El área del cuadrado $ABCD$ es:

$$S_{ABCD} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

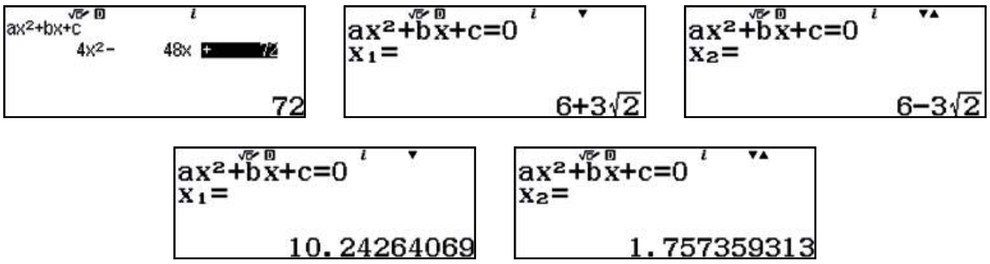
El área del cuadrado $JKLM$ es la mitad del área del cuadrado $ABCD$:

$$S(x) = 72 \text{ cm}^2$$

$$4x^2 - 48x + 144 = 72$$

$$4x^2 - 48x + 72 = 0$$

La ecuación se resuelve en el menú *Ecuación/Función*:



De las dos soluciones obtenidas solamente la segunda pertenece al dominio de la función.

El área del cuadrado $JKLM$ es la mitad del área del cuadrado $ABCD$ cuando:

$$x = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1{,}76 \text{ cm}$$

6

Los valores de x para los cuales el área del cuadrado $JKLM$ es menor o igual que 50 cm² se obtienen resolviendo la inecuación:

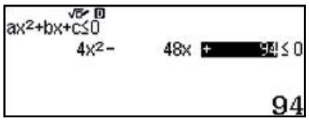
$$S(x) \leq 50$$

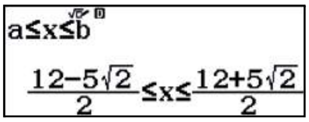
$$4x^2 - 48x + 144 \leq 50$$

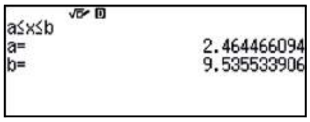
$$4x^2 - 48x + 94 \leq 0$$

Problema
Área de un cuadrado

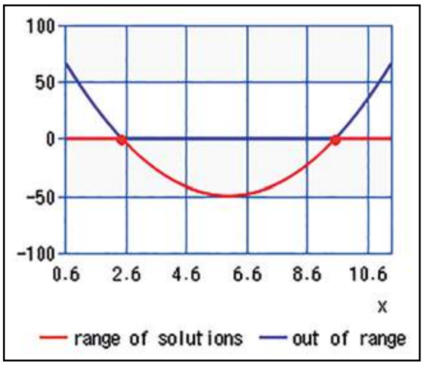
La inecuación se resuelve en el menú *Inecuación*:







Con el código *QR* se visualizan las soluciones de la inecuación:



Del dominio de definición de la función [0,6] y las soluciones de la inecuación se concluye que el área del cuadrado $JKLM$ es menor o igual que 50 cm^2 cuando x toma valores entre, aproximadamente, 2,46 y 6 cm:

$$x \in \left[\frac{12 - 5\sqrt{2}}{2}, 6\right]$$

$P(impar) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$p(3) = \frac{6}{16}$

=Sum(B$1:B1)

RanInt#

$= \left(\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}\right)$

SHIFT

$P(7) \approx 0{,}25 = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

9

3

2

$1 - \left(\frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}\right)$

MENU

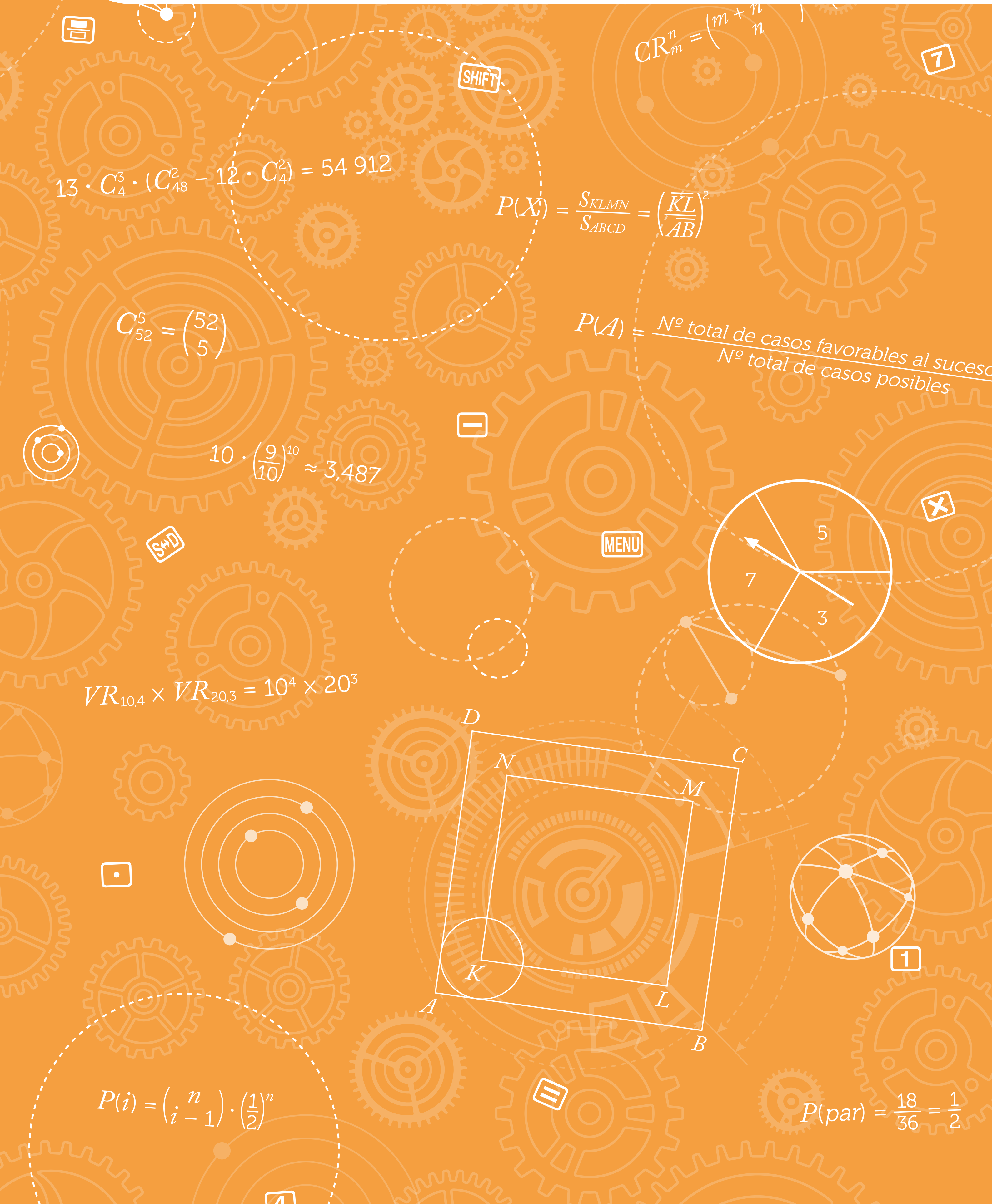
1 2 3 4 5

$P(X) = \frac{9}{16} = 0{,}5625$

$P_n = n!$

$1 \leq i \leq n+1$

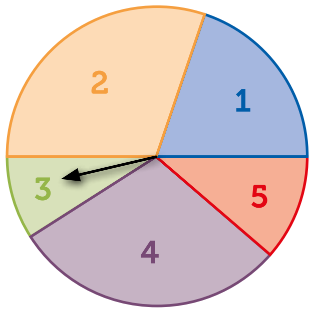
ACTIVIDADES DE **PROBABILIDAD**



01 De la frecuencia relativa a la probabilidad. Regla de Laplace
¿Jugamos a la ruleta?

Cuando el número de observaciones de un suceso aleatorio es muy grande, la frecuencia relativa del suceso asociado se va acercando a cierto número. Este número a su vez se aproxima a la probabilidad del suceso. A este hecho se le conoce como la ley de los grandes números.

1 Con la ruleta que aparece en la imagen:



a) ¿Qué número elegiríais? ¿Por qué?

b) Vamos a realizar una simulación trabajando en grupos de cinco.

Cada miembro del grupo jugará a la ruleta haciendo diez rondas de veinte tiradas cada una, efectuará el recuento y lo pondrá en común con su grupo que elaborará una tabla de frecuencias absolutas.

c) Cada grupo introducirá sus datos en la calculadora utilizando el menú *Estadística*, generará un código *QR* y utilizará la aplicación CASIO EDU+ para compartir sus datos con el resto de grupos de clase.

Visualizad los diferentes diagramas de barras que se han obtenido. ¿Qué observáis?

Con la opción *combinar* agrupad los datos de todos los grupos.

d) Por último, construid una tabla de frecuencias relativas de toda la clase. Observad dicha tabla y asignad probabilidades a cada uno de los sucesos.

¿Creéis que son fiables esas probabilidades? ¿Por qué?

2 Otra manera de asignar probabilidades es utilizando la regla de Laplace: la probabilidad de un suceso A es la razón del número de casos favorables al suceso A entre el número de casos posibles del experimento aleatorio:

$$P(A) = \frac{\text{Nº total de casos favorables al suceso } A}{\text{Nº total de casos posibles}}$$

Utilizad la regla de Laplace para calcular la probabilidad de cada uno de los sectores de la ruleta.

Comparad estas probabilidades con las asignadas en el **apartado 1 d)**.

3 ¿Qué número elegiríais ahora? Justificad la respuesta.

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

01 | De la frecuencia relativa a la probabilidad. Regla de Laplace
¿Jugamos a la ruleta?

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Se pretende con esta actividad que el alumnado, a través de la experimentación, utilice datos reales y asigne probabilidades a partir de frecuencias relativas. También que contraste la probabilidad experimental con la probabilidad teórica aplicando la regla de Laplace.
- Para ello se ha diseñado una ruleta asimétrica de manera que, a primera vista no resulte sencillo asignar probabilidades y, por tanto, dé lugar a la experimentación.
- Debido al gran número de tiradas que se deben realizar para poder sacar conclusiones fiables, la actividad promueve el aprendizaje cooperativo.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

  Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a:
  http://wes.casio.com/es-es/class

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

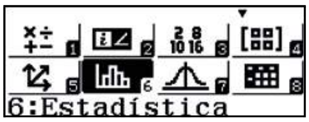
1

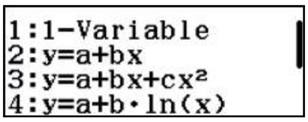
a) Respuesta abierta.

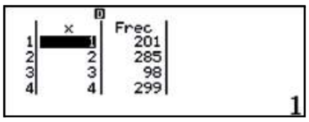
b) Como la tarea que se propone es experimental, a modo de ejemplo, se presentan los datos reales que obtuvo el grupo 1 de 2º de ESO:

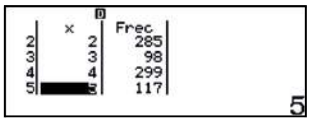
	Alumno 1	Alumno 2	Alumna 3	Alumna 4	Alumna 5	Grupo 1
x_i	F_i	F_i	F_i	F_i	F_i	Total
Sector 1	31	27	43	48	52	201
Sector 2	50	67	55	59	54	285
Sector 3	21	19	17	23	18	98
Sector 4	70	70	62	45	52	299
Sector 5	28	17	23	25	24	117
Tiradas en total	200	200	200	200	200	1000

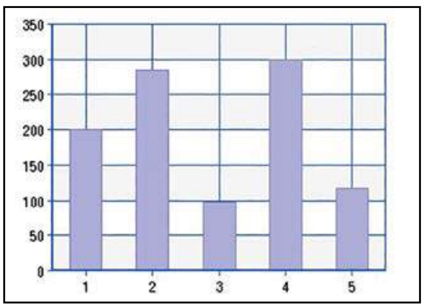
c) Cada grupo introduce sus datos en el menú *Estadística* opción *1-Variable* y genera un código *QR* para visualizar y compartir con toda la clase su diagrama de barras. En las imágenes se muestran la tabla de frecuencias y el diagrama de barras del grupo 1:





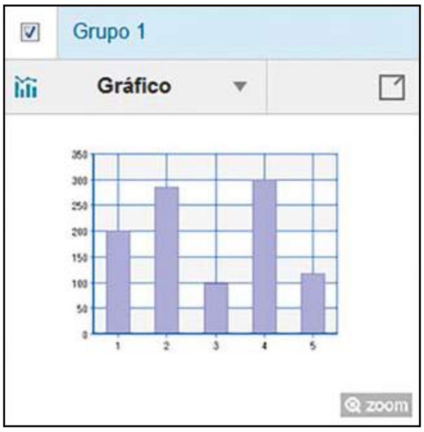


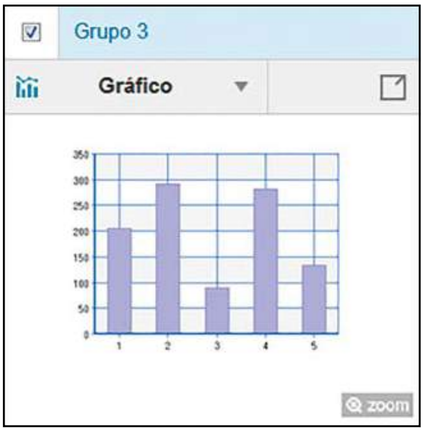


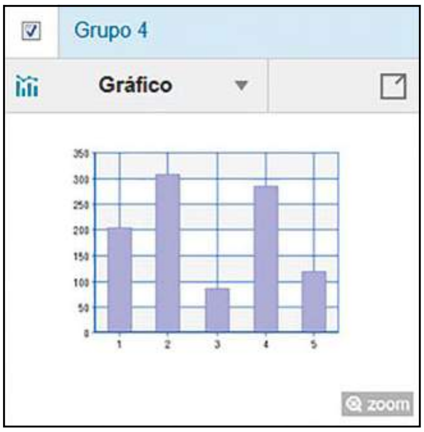


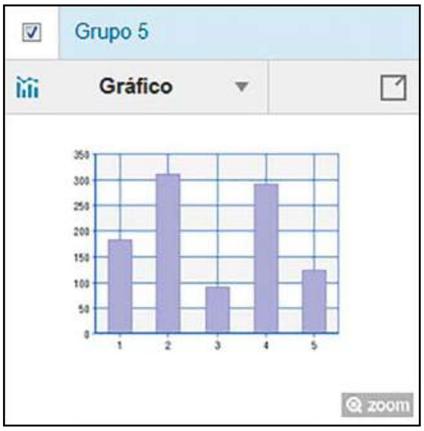
¿Jugamos a la ruleta?

Con la aplicación se visualizan los diagramas de cada grupo:



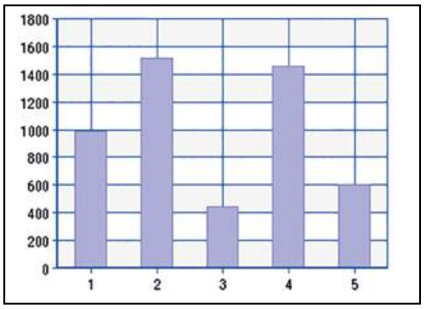






Se observa que los diagramas de barras de cada grupo son similares entres sí.

d) Después de combinar las gráficas se visualiza el diagrama de barras con las frecuencias absolutas de toda la clase:



http://wes.casio.com/class/sWNL-hCC1-WB5F-xfZs

En este ejemplo, la tabla de frecuencias relativas de los datos de todos los grupos es:

	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		Grupo 4		Grupo 5		Grupo clase	
	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i	F_i	f_i
Sector 1	201	0,201	194	0,194	205	0,205	203	0,203	183	0,183	986	0,1972
Sector 2	285	0,285	318	0,318	292	0,292	307	0,307	311	0,311	1513	0,3026
Sector 3	98	0,098	79	0,079	89	0,089	86	0,086	91	0,091	443	0,0886
Sector 4	299	0,299	302	0,302	281	0,281	285	0,285	291	0,291	1458	0,2916
Sector 5	117	0,117	107	0,107	133	0,133	119	0,119	124	0,124	600	0,12
	1000	1	1000	1	1000	1	1000	1	1000	1	5000	1

01 De la frecuencia relativa a la probabilidad. Regla de Laplace
¿Jugamos a la ruleta?

La probabilidad experimental asignada a cada suceso se recoge en la siguiente tabla:

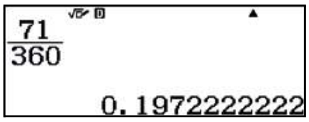
	Probabilidad experimental
Sale sector 1	0,1972
Sale sector 2	0,3026
Sale sector 3	0,0886
Sale sector 4	0,2916
Sale sector 5	0,12
	1

2

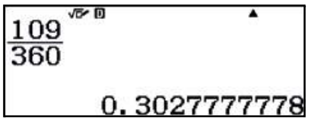
Para aplicar la regla de Laplace es imprescindible conocer cuántos grados abarcaba cada uno de los sectores circulares en los que está dividida la ruleta. El alumnado deberá realizar sus propias mediciones. En este ejemplo las medidas son: Sector 1 → 71°, Sector 2 → 109°, Sector 3 → 32°, Sector 4 → 105° y Sector 5 → 43°.

Los cálculos de la probabilidad se realizan en el menú *Calcular*.

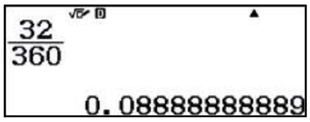
Sale sector 1



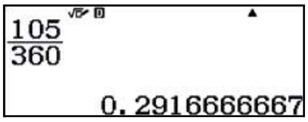
Sale sector 2



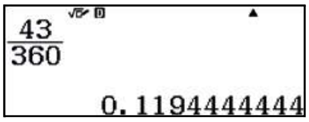
Sale sector 3



Sale sector 4



Sale sector 5



Al comparar las probabilidades experimentales con las probabilidades teóricas se constata la ley de los grandes números:

	Probabilidad experimental	Probabilidad teórica
Sale sector 1	0,1972	0,1972222222
Sale sector 2	0,3026	0,3027777778
Sale sector 3	0,0886	0,0888888889
Sale sector 4	0,2916	0,2916666667
Sale sector 5	0,12	0,1194444444
	1	1

3

Respuesta abierta.

02 | De la frecuencia relativa a la probabilidad. Regla de Laplace
Lanzamiento de dos dados

Un juego relativamente sencillo es escoger un número natural entre 2 y 12, a continuación, lanzar dos dados y realizar la suma de los números obtenidos.

Si la suma obtenida al azar coincide con el número escogido, has ganado.

¿Te interesa escoger algún número en particular?

1 Para averiguar el número más favorable que interesa escoger, se realiza el experimento de lanzar los dados y anotar los resultados en grupos de 3.

Cada miembro del grupo debe realizar un mínimo de 50 lanzamientos y anotar los resultados de sumar los dados.

2 Anotad, en una tabla, como la siguiente la recopilación de los lanzamientos de todos los miembros del grupo.

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Frecuencia absoluta												
Frecuencia relativa												

3 A partir de las frecuencias relativas obtenidas, asignad probabilidades a cada uno de los sucesos. ¿Creéis que son fiables esas probabilidades? ¿Por qué?

4 Calculad las probabilidades de éxito de cada uno de los sucesos mediante la regla de Laplace:

$$P(suceso) = \frac{N^{\underline{o}}\ casos\ favorables}{N^{\underline{o}}\ total\ de\ casos\ posibles}$$

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Casos favorables												
Probabilidad												

5 Utilizando el menú *Estadística*, generando el código *QR* y con la aplicación CASIO EDU⁺, realizad el diagrama de barras de los resultados del grupo.

6 Compartid vuestros resultados con el resto de los grupos y recopilad los lanzamientos de toda la clase. Volved a realizar la asignación de probabilidades y comparad con los resultados teóricos de la regla de Laplace.

7 Realizad el diagrama de barras con los datos compartidos de todos los grupos de la clase.

8 ¿Qué número se debe escoger si se desea tener más opciones de ganar?

02 | De la frecuencia relativa a la probabilidad. Regla de Laplace
Lanzamiento de dos dados

MATERIALES

2 dados por alumno
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

2º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad, aprovechando las diferentes opciones que proporciona la calculadora, se pretende introducir el concepto de probabilidad. Así mismo servirá como trabajo de experimentación para el cálculo de frecuencias relativas y corroboración de la ley de los grandes números.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a http://wes.casio.com/es-es/class.

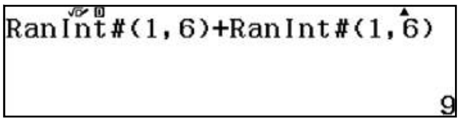
- La función *RanInt#* de la calculadora es una buena alternativa si no se dispone de dados reales para simular los lanzamientos. También es una buena opción, en combinación con otras funcionalidades de la calculadora, si se desea realizar un número elevado de lanzamientos.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

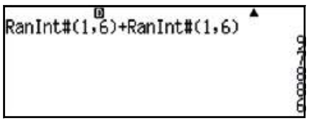
Cada miembro del grupo realiza un mínimo de 50 lanzamientos y anota los resultados. Como alternativa, se puede utilizar la calculadora para simular el lanzamiento de los dados:

ALPHA · 1 SHIFT) 6) + ALPHA · 1 SHIFT) 6) =



Ejecutando repetidas veces = se simula y se obtiene el resultado de la suma.

Para una mejor visualización de los lanzamientos, se configura la calculadora en formato de entrada y salida decimal SHIFT MENU 1 3 y se escoge la fuente multilínea pequeña SHIFT MENU ▼ ▼ ▼ 3 2:



2

La recopilación de los lanzamientos de todos los miembros del grupo puede ser, por ejemplo, la siguiente:

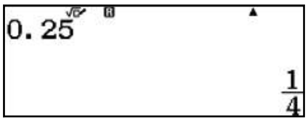
Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Frecuencia absoluta	5	9	19	7	20	40	34	18	6	4	2	164
Frecuencia relativa	0,03	0,05	0,12	0,04	0,12	0,24	0,21	0,11	0,04	0,02	0,01	1

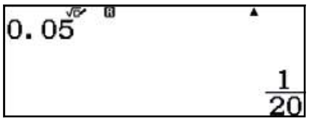
3

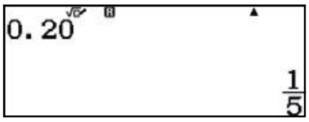
La asignación de probabilidades viene dada por la frecuencia relativa. Se puede expresar en porcentajes o bien de la siguiente manera: la probabilidad de obtener un 7 es aproximadamente una entre cuatro pues representa el 24% de los lanzamientos. Así mismo, por ejemplo, la posibilidad de obtener un 3 sería una entre veinte, y la probabilidad de obtener un 8 sería aproximadamente una entre cinco:

Lanzamiento de dos dados

$P(7) \approx 0{,}25 = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $P(3) \approx 0{,}05 = 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ $P(8) \approx 0{,}20 = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$







El número total de lanzamientos ha sido 164 (no tiene que ser 150, puesto que se requiere un mínimo de 50 lanzamientos por alumno) y se considera que no es suficientemente grande para sacar conclusiones fiables.

4

Con la regla de Laplace se obtienen los siguientes resultados:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Casos favorables	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36
Probabilidad	0,03	0,06	0,08	0,11	0,14	0,17	0,14	0,11	0,08	0,06	0,03	1

Se puede comprobar, que obtener 7 en la suma de los dados, es el resultado que tiene más casos favorables (1 + 6; 2 + 5; 3 + 4; 4 + 3; 5 + 2; 6 + 1) con una probabilidad de una entre seis (aproximadamente 0,17 = 17%)

Los resultados obtenidos experimentalmente confirman que el número de lanzamientos simulados no es suficiente.

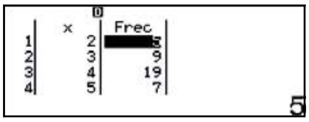
5

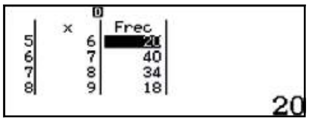
El uso del menú *Estadística* (MENU 6 1) combinado con la aplicación CASIO EDU+ permite realizar el diagrama de barras de la experiencia.

Se activa la columna de frecuencias absolutas desde la configuración de la calculadora:

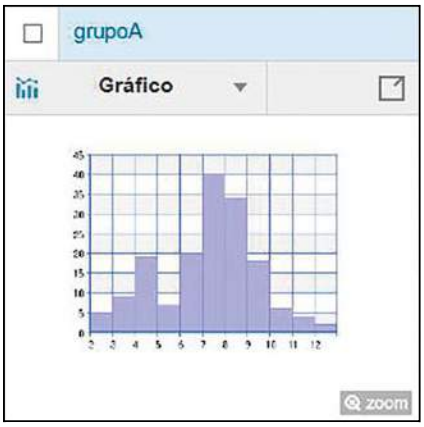
SHIFT MENU ▼ 3 1

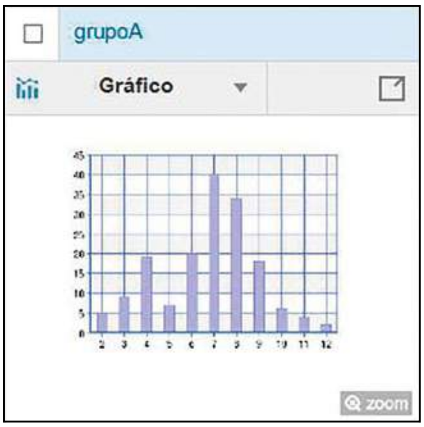
A continuación, se introducen los datos recogidos por el grupo y se genera el código *QR* correspondiente:





Desde la aplicación CASIO EDU+ se comparten los datos con la clase que se ha creado para la experiencia (en nuestro caso *lanzar 2 dados*). La aplicación muestra por defecto un histograma que se puede modificar a un diagrama de barras, mediante la opción de la rueda de ajustes:





CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

02 De la frecuencia relativa a la probabilidad. Regla de Laplace
Lanzamiento de dos dados

6

A modo de ejemplo, se muestra el registro de datos de la experiencia realizada en una clase de 2º de ESO:

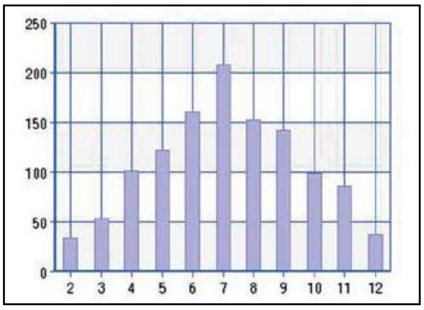
Suma	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica (Laplace)
2	8	4	2	8	4	0	3	5	34	0,03	0,03
3	5	5	15	6	7	2	6	7	53	0,04	0,06
4	14	12	19	6	12	4	12	22	101	0,08	0,08
5	13	15	28	13	14	6	20	13	122	0,10	0,11
6	20	28	24	23	19	8	24	15	161	0,13	0,14
7	26	32	40	32	22	8	25	23	208	0,17	0,17
8	23	21	33	18	17	5	18	17	152	0,13	0,14
9	21	14	28	19	27	6	15	12	142	0,12	0,11
10	12	9	14	16	11	4	13	20	99	0,08	0,08
11	12	5	13	10	16	6	13	11	86	0,07	0,06
12	4	8	6	2	8	1	3	5	37	0,03	0,03
Nº lanzamientos	158	153	222	153	157	50	152	150	1195	1	1

Se observa que, con un mayor número de lanzamientos, los resultados obtenidos experimentalmente tienden a los resultados obtenidos teóricamente.

7

Desde la aplicación CASIO EDU+ se pueden combinar los datos de todos los grupos y obtener el diagrama de barras correspondiente:

http://wes.casio.com/class/XsPA-mK8s-eK8y-Cdgr



8

Se debe escoger el número 7, ya que es el resultado con mayor probabilidad.

Ampliación

Repite el juego en los siguientes casos:

1 Realizando el valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones de los dados.

2 Realizando el producto de las puntuaciones de los dados.

3 Realizando la división entera de las puntuaciones de los dados, escogiendo como dividendo la puntuación más alta.

03 | Regla de Laplace: Resolución de problemas
Mi nueva matrícula

El 18 de septiembre de 2000 entró en vigor el nuevo sistema de matriculación de coches, introduciendo matrículas formadas por cuatro cifras y tres letras consonantes, exceptuando las letras Ñ y Q.

1 ¿Cuántas placas de matrícula diferentes se pueden hacer con este sistema?

2 Me he comprado un coche nuevo y en la asesoría me han dicho que mañana ya lo tendré matriculado. ¿Cuál es la probabilidad de que mi matrícula tenga un cuadrado perfecto de cuatro cifras?

3 ¿Cuál es la probabilidad de que un número de cuatro cifras sea un cuadrado perfecto?

03 | Regla de Laplace: Resolución de problemas
Mi nueva matrícula

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

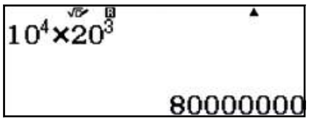
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad se pretende que el alumnado afiance el recuento sistemático en la resolución de problemas en los que interviene el cálculo de probabilidades.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Las placas de matrícula que se pueden hacer son:

$$VR_{10,4} \times VR_{20,3} = 10^4 \times 20^3 = 8 \times 10^7$$

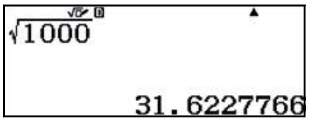


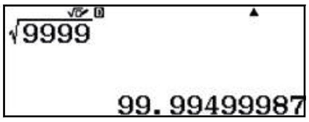
2

Se establece como M el suceso: *la matrícula de mi coche nuevo tiene un cuadrado perfecto de cuatro cifras*. La probabilidad se calcula utilizando la regla de Laplace:

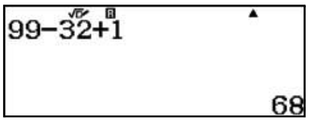
$$P(M) = \frac{\text{Nº total de casos favorables al suceso } M}{\text{Nº total de casos posibles}}$$

Como 1 000 y 9 999 son, respectivamente, el primer y el último número de cuatro cifras, sus raíces cuadradas permiten obtener el menor y el mayor número cuyos cuadrados perfectos son números de cuatro cifras:



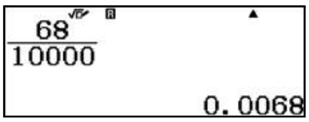


El primer cuadrado perfecto de cuatro cifras es $32^2 = 1\,024$. Y el último, $99^2 = 9\,801$. La diferencia entre 32 y 99 más 1 es el número total de casos favorables al suceso M:



El número total de casos posibles viene dado por: $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$. Aunque los números que empiezan por 0 no se consideran números de cuatro cifras, a efectos de matrícula hay que considerarlos. Entonces, la probabilidad es:

$$P(M) = \frac{68}{10\,000} = 0{,}0068$$

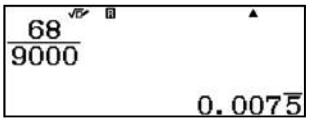


03 Regla de Laplace: Resolución de problemas
Mi nueva matrícula

3

Los casos posibles, en esta ocasión, son: 10 000 – 1 000 = 9 000. La probabilidad de que un número de cuatro cifras sea un cuadrado perfecto es, aproximadamente, 0,0076:

$$P(M) = \frac{68}{9\,000} \approx 0{,}0076$$



Ampliación

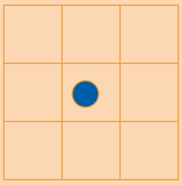
1 ¿Cuál es la probabilidad que la matrícula de mi coche nuevo tenga las cuatro cifras iguales?

2 ¿Y la probabilidad de que las tres letras sean iguales?

3 ¿Y la probabilidad de que las tres letras estén en orden alfabético?

Problema

Lanzamiento de un disco

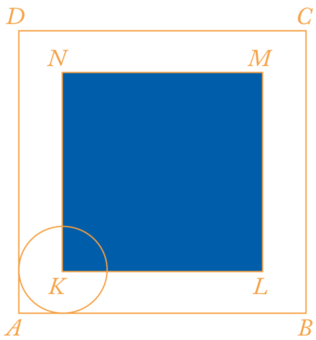


Sobre un suelo de baldosas cuadradas de 40 cm de lado se lanza un disco de 10 cm de diámetro.

Calcula la probabilidad que el disco no corte ninguna raya de las que delimitan las baldosas.

Sea X el suceso: *el disco lanzado no corta ninguna raya.*

En una baldosa $ABCD$ de lado 40 cm, para que el disco no corte el perímetro, el centro del disco tiene que estar a una distancia mayor de 5 cm de los lados:



Los centros de estos discos pertenecen al cuadrado $KLMN$ de lado:

$$\overline{KL} = 40 - 10 = 30 \text{ cm}$$

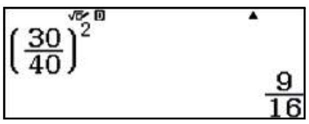
Los casos posibles se corresponden con el área del cuadrado $ABCD$ y los casos favorables son iguales al área del cuadrado $KLMN$.

Por tanto, la probabilidad es igual a la razón entre las áreas de los dos cuadrados.

Dado que todos los cuadrados son semejantes, la razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza:

$$P(X) = \frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}\right)^2$$

Se utiliza la calculadora para obtener este valor:

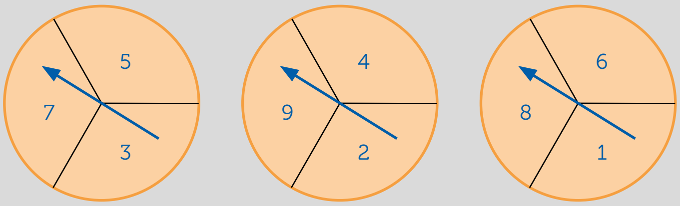


Por tanto, la probabilidad de que *el disco lanzado no corte ninguna raya* es:

$$P(X) = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

04 | Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace
La paradoja de Condorcet

Se dispone de tres ruletas como las de la figura. La probabilidad de que la aguja caiga en cualquier sector de una de ellas es la misma, los sectores son equiprobables.



A B C

Jugad por parejas escogiendo cada uno una ruleta y girad las agujas. Gana el que obtenga el número más alto.

1 Busca información sobre Condorcet y escribe una reseña sobre él y sobre en qué destacó.

2 Halla las siguientes probabilidades:

$$P(A \text{ gane a } B),\ P(B \text{ gane a } C),\ P(C \text{ gane a } A)$$
$$P(B \text{ gane a } A),\ P(C \text{ gane a } B),\ P(A \text{ gane a } C)$$

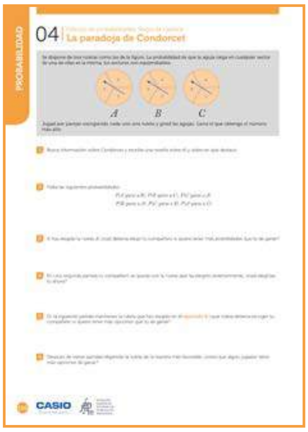
3 Si has elegido la ruleta A, ¿cuál debería elegir tu compañero si quiere tener más posibilidades que tú de ganar?

4 En una segunda partida tu compañero se queda con la ruleta que ha elegido anteriormente, ¿cuál elegirías tú ahora?

5 En la siguiente partida mantienes la ruleta que has elegido en el **apartado 4**, ¿qué ruleta debería escoger tu compañero si quiere tener más opciones que tú de ganar?

6 Después de varias partidas eligiendo la ruleta de la manera más favorable, ¿crees que algún jugador tiene más opciones de ganar?

La paradoja de Condorcet



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se presenta una situación en la que, con ayuda de la probabilidad, se verá que se crea un problema circular y que no se cumple la transitividad en un juego entre dos participantes.
- Se puede aprovechar esta actividad para explicar al alumnado qué es una paradoja.
- Las probabilidades halladas en los primeros apartados son inmediatas, pero se trata de que el alumnado haga configuraciones con elementos (sin necesidad de mencionar la combinatoria) y a partir del número total de ellas pueda aplicar la regla de Laplace.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2

Mediante los siguientes diagramas de árbol se simulan las distintas posibilidades:

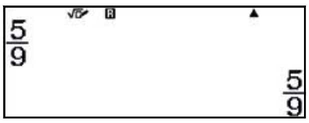
Ruleta A	Ruleta B	
3	2	Gana A
	4	Gana B
	9	Gana B
5	2	Gana A
	4	Gana A
	9	Gana B
7	2	Gana A
	4	Gana A
	9	Gana B

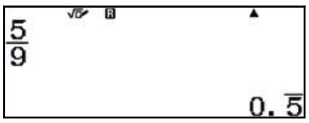
Ruleta B	Ruleta C	
2	1	Gana B
	6	Gana C
	8	Gana C
4	1	Gana B
	6	Gana C
	8	Gana C
9	1	Gana B
	6	Gana B
	8	Gana B

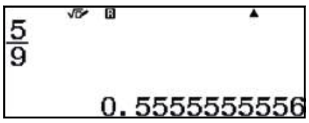
Ruleta C	Ruleta A	
1	3	Gana A
	5	Gana A
	7	Gana A
6	3	Gana C
	5	Gana C
	7	Gana A
8	3	Gana C
	5	Gana C
	7	Gana C

Aplicando la regla de Laplace se tiene:

$$P(A \text{ gane a } B) = P(B \text{ gane a } C) = P(C \text{ gane a } A) = \frac{5}{9}$$

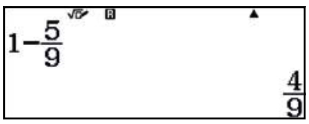


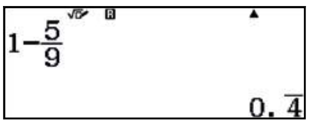


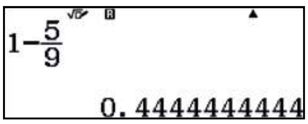


Y por tanto:

$$P(B \text{ gane a } A) = P(C \text{ gane a } B) = P(A \text{ gane a } C) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$







3

Si has elegido la ruleta A, tu compañero debería elegir la ruleta C ya que:

$$P(C \text{ gane a } A) > P(A \text{ gane a } C)$$

4

Si tu compañero se queda con la ruleta C, tú ahora deberías elegir la ruleta B:

$$P(B \text{ gane a } C) > P(C \text{ gane a } B)$$

5

Ahora tú juegas con la ruleta B y tu compañero debería elegir la ruleta A:

$$P(A \text{ gane a } B) > P(B \text{ gane a } A)$$

6

Si se sigue jugando con el ciclo anterior no se puede predecir el ganador. Se observa que no se cumple que si A gana a B y B gana a C, entonces A gana a C ya que $P(A \text{ gane a } C) < P(C \text{ gane a } A)$. Se concluye que no se cumple la transitividad.

Ampliación

1 Diseña un método con la calculadora para simular los resultados de las ruletas y comprueba si se aproximan a los obtenidos en el **apartado 2**.

La función *RanInt#* de la calculadora proporciona un número entero aleatorio entre dos números enteros cualesquiera. La dificultad en simular el juego con la calculadora radica en que en cada ruleta hay tres números no consecutivos.

Sin embargo, es posible solucionar esta dificultad de la siguiente forma:

Los números de la primera ruleta $A = \{3, 5, 7\}$ se asignan a $\{0, 1, 2\}$.

Los números de la segunda ruleta $B = \{2, 4, 9\}$ se asignan a $\{10, 11, 12\}$.

Los números de la tercera ruleta $C = \{1, 6, 8\}$ se asignan a $\{20, 21, 22\}$.

A continuación, se va a simular con la calculadora un juego con las ruletas A y B.

Se usa, por tanto, *RanInt*(0,2) y *RanInt*(10,12).

Para facilitar la recogida de los números aleatorios generados se utiliza el menú *Hoja de cálculo* (MENU 8):

En las columnas A y C se simula la tirada de la ruleta A con la instrucción:

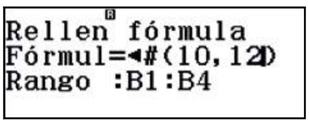
RanInt(0,2)

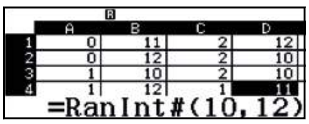
En las columnas B y D se simula la tirada de la ruleta B con la instrucción:

RanInt(10,12)

Para ocho tiradas:

OPTN 1 ALPHA · (0 SHIFT) 2) = ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 4 = =





La paradoja de Condorcet

Ahora se reasignan los valores originales:

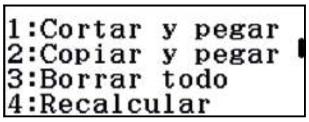
0	11		3	4
0	12		3	9
1	10		5	2
1	12		5	9

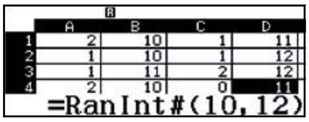
2	12		7	9
2	10		7	2
2	10		7	2
1	11		5	4

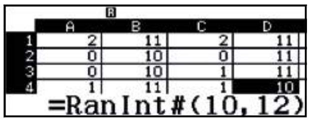
En rojo se han resaltado las veces que gana A.

Se vuelve a tirar otras dieciséis (8 + 8) veces:

OPTN ▼ 4 (*Recalcular*):







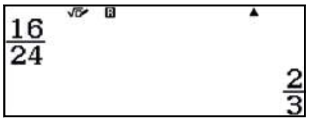
2	10		7	2
1	10		5	2
1	11		5	4
2	10		7	2

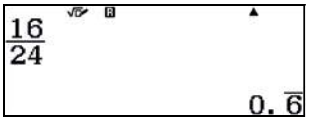
1	11		5	4
1	12		5	9
2	12		7	9
0	11		3	4

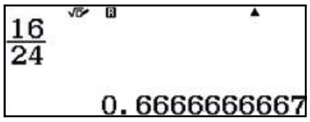
2	11		7	4
0	10		3	2
0	10		3	2
1	11		5	4

2	11		7	4
0	11		3	4
1	11		5	4
1	10		5	2

Una vez contadas las casillas rojas totales se obtiene A gana a B en 16 de 24 tiradas:







Se observa que en este caso la probabilidad experimental es mayor que la hallada en el **apartado 2**. En consecuencia, el número de tiradas no es suficientemente grande para corroborar la regla de Laplace.

OBSERVACIÓN

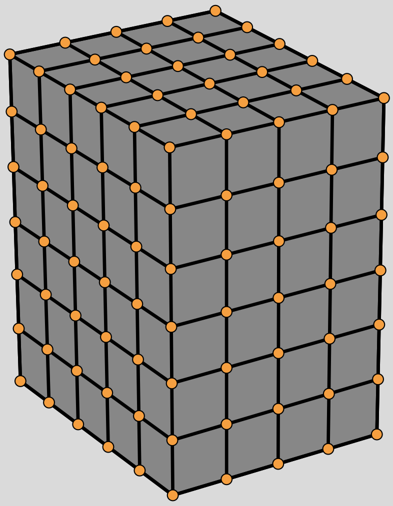
La *Hoja de cálculo* permite una simulación mayor que tandas de 8 tiradas, sin embargo, se ha creído conveniente mostrar las 8 tiradas en pantalla para una mayor facilidad de asignación y recogida de resultados.

2 Repítase la simulación para un juego entre las ruletas B y C, y para las ruletas A y C.

05 | Regla de Laplace. Resolución de problemas
Bloque de madera

Un bloque de madera tiene forma de prisma recto rectangular de dimensiones 4 x 5 x 6 cm.

Pintamos todo el sólido con pintura gris y después lo cortamos en cubos de arista 1 cm.



Se escoge un cubo de arista 1 cm al azar.

Calcula:

1. La probabilidad de que no tenga ninguna cara pintada.

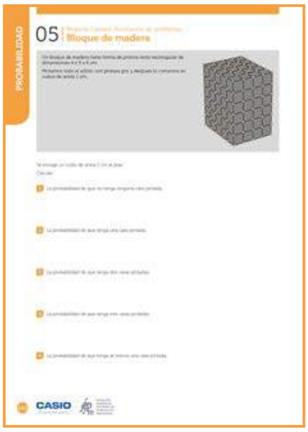
2. La probabilidad de que tenga una cara pintada.

3. La probabilidad de que tenga dos caras pintadas.

4. La probabilidad de que tenga tres caras pintadas.

5. La probabilidad de que tenga al menos una cara pintada.

05 | Regla de Laplace. Resolución de problemas
Bloque de madera



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Calcular probabilidades.
  - Aplicar la regla de Laplace.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN
Los cubos que tienen exactamente tres caras pintadas de gris son los que se sitúan en los vértices del prisma:

$$C_3 = 8$$

Los cubos que tienen exactamente dos caras pintadas de gris son los que forman las aristas del prisma excluyendo los que se sitúan en los vértices:

$$C_2 = 4\ (2 + 3 + 4) = 36$$

Los cubos que tienen exactamente una cara pintada son los que forman las caras y no forman parte de las aristas del prisma:

$$C_1 = 2\ (2 \text{ x } 3 + 2 \text{ x } 4 + 3 \text{ x } 4) = 52$$

Los cubos que no están pintados forman un prisma recto rectangular de dimensiones 2 x 3 x 4 cm que se obtienen al quitar los cubos que tienen alguna cara pintada:

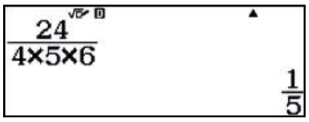
$$C_0 = 2 \text{ x } 3 \text{ x } 4 = 24$$

Los casos posibles del experimento son los cubos que forman el prisma recto rectangular de dimensiones 4 x 5 x 6 cm. Es decir, 120 cubos.

1

Sea A el suceso *escoger un cubo que no tenga ninguna cara pintada*. Su probabilidad es:

$$P(A) = \frac{C_0}{4 \text{ x } 5 \text{ x } 6} = \frac{24}{4 \text{ x } 5 \text{ x } 6} = \frac{1}{5}$$



2

Sea B el suceso *escoger un cubo con una cara pintada*. Su probabilidad es:

$$P(B) = \frac{C_1}{4 \text{ x } 5 \text{ x } 6} = \frac{52}{4 \text{ x } 5 \text{ x } 6} = \frac{13}{30}$$

3

Sea C el suceso *escoger un cubo con dos caras pintadas*. Su probabilidad es:

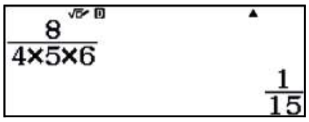
$$P(C) = \frac{C_2}{4 \text{ x } 5 \text{ x } 6} = \frac{36}{4 \text{ x } 5 \text{ x } 6} = \frac{3}{10}$$

Bloque de madera

4

Sea D el suceso *escoger un cubo con tres caras pintadas*. Su probabilidad es:

$$P(D) = \frac{C_3}{4 \times 5 \times 6} = \frac{8}{4 \times 5 \times 6} = \frac{1}{15}$$



5

Sea E el suceso *escoger un cubo con al menos una cara pintada*.

Este suceso es el contrario del suceso A:

$$P(E) = 1 - P(A)$$

En consecuencia:

$$P(E) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

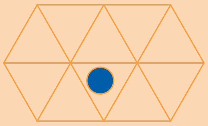
Ampliación

1 Repite la actividad para un cubo de dimensiones 8 x 9 x 10 cm.

2 Compara los resultados de las dos actividades y redacta tus conclusiones.

Problema

Lanzamiento de un disco 2

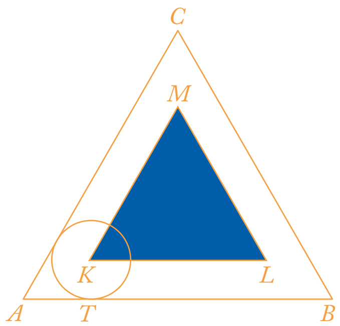


Sobre un suelo de baldosas formadas por triángulos equiláteros de 40 cm de lado se lanza un disco de 10 cm de diámetro.

Calcula la probabilidad que el disco no corte ninguna raya.

Sea X el suceso: *el disco lanzado no corta ninguna raya.*

Se considera la baldosa ABC de lado 40 cm. Para que el disco no corte el perímetro, el centro del disco tiene que estar a una distancia mayor de 5 cm de los lados del triángulo equilátero $\overset{\triangle}{ABC}$:



Los centros de estos discos se sitúan en el triángulo equilátero $\overset{\triangle}{KLM}$, del que se calcula el lado.

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia de centro K y radio $\overline{KT}$ = 5 cm. Entonces:

$$\overline{AK} = 10 \text{ cm}$$

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ATK}$:

$$\overline{AT} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\overline{KL} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AT} = 40 - 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

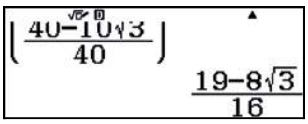
Los casos posibles son el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ y los casos favorables son el área del triángulo $\overset{\triangle}{KLM}$.

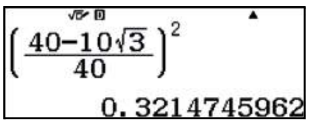
La probabilidad es igual a la razón entre las áreas de los triángulos.

Como que todos los triángulos equiláteros son semejantes y la razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, se obtiene:

$$P(X) = \frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}\right)^2$$

Se utiliza la calculadora para obtener este valor:





Por tanto, la probabilidad de que al lanzar un disco *no toque ninguna raya* es:

$$P(X) = \frac{19 - 8\sqrt{3}}{16} \approx 0{,}32$$

06 | Paradojas
Coincidencias. La paradoja del cumpleaños

mmaca
Museu de Matemàtiques de Catalunya

El Museo de las Matemáticas de Cataluña (MMACA) está concebido de manera que cualquier visitante pueda tocar y experimentar con las matemáticas. El siguiente módulo del museo: "Coincidencias", con 15 agujeros y 8 huevos (imagen adjunta) se ha diseñado para realizar la siguiente experiencia:

Se invita a ocho visitantes, de manera que cada uno de ellos coja un huevo (piedra) y, sin haber visto dónde han colocado el suyo los anteriores participantes, debe introducirlo en uno de los 15 agujeros del módulo. Una vez los ochos participantes han introducido el huevo, se alzan las puertas de los 15 agujeros y se comprueba si ha habido coincidencias.

https://www.mmaca.cat

1 Halla la probabilidad de que los 8 huevos se encuentren en distintos agujeros.

2 ¿Qué probabilidad habrá de que haya alguna coincidencia?

3 Simula con la calculadora la experiencia 10 veces, comparte con tus compañeros los resultados, aglutínalos y contrasta los resultados totales obtenidos con el cálculo probabilístico.

4 Simula varias veces la experiencia y comprueba si obtienes coincidencias.

La paradoja del cumpleaños.
Una vez realizada la experiencia anterior y constatar que la probabilidad de que al poner al azar 8 huevos, algunos huevos hayan coincidido en un mismo agujero, es muy alta, podemos afrontar el problema del cumpleaños: *¿Cuál será la probabilidad de que en una clase de 30 alumnos, haya como mínimo dos personas con la misma fecha de cumpleaños?*
Para simplificar el problema, supón que no existen los años bisiestos.

5 Calcula la probabilidad de que en una clase de 30 alumnos haya como mínimo dos con la misma fecha de cumpleaños.

6 Como sabes, no todas las clases tienen 30 alumnos. Realiza una tabla donde se muestre qué probabilidad habrá de encontrar una coincidencia en clases desde 15 hasta 35 alumnos.

7 En el Mundial de futbol de 2014 participaron 32 equipos nacionales, cada uno con 23 jugadores. Usando las fechas de nacimiento de la lista oficial de equipos de la FIFA, resultó que 16 equipos tenían al menos un cumpleaños compartido, algunos de ellos con dos pares de coincidencias: Argentina (x2), Australia, Bosnia Herzegovina, Brasil, Camerún, Colombia, Corea del Sur (x2), España, Estados Unidos, Francia (x2), Holanda, Honduras, Irán (x2), Nigeria, Rusia y Suiza (x2).

En vista del estudio probabilístico realizado en las actividades anteriores, ¿qué opinas al respecto? ¿Puedes afirmar que en el próximo mundial se dará está misma situación?

8 En cualquier reunión de más de 50 personas, la probabilidad que haya dos que celebren el cumpleaños el mismo día es prácticamente 1.

¿Puedes corroborar está afirmación?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Coincidencias. La paradoja del cumpleaños

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se puede analizar cómo, en términos de probabilidad, la intuición no siempre nos lleva al resultado correcto.
- El uso de la regla de Laplace y la combinación de probabilidades nos llevará a un resultado a primera vista no compatible con la intuición, pero cierto matemática y casuísticamente.
- El uso de la calculadora favorece la simulación de la experiencia y que la atención se centre en la toma de decisiones, en la formulación de conjeturas y en su validación.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

La probabilidad de que, aleatoriamente, los 8 huevos se encuentren en distintos agujeros es aproximadamente del 10%:

$$\frac{15}{15}\times\frac{14}{15}\times\frac{13}{15}\times\frac{12}{15}\times\frac{11}{15}\times\frac{10}{15}\times\frac{9}{15}\times\frac{8}{15}$$

0.1012369383

o bien:

$$\frac{15!}{(15-8)!\times 15^8}$$

0.1012369383

2

El resultado anterior conduce a que la probabilidad de que haya alguna coincidencia es:

1 – 0,101 = 0,899, es decir, prácticamente del 90%.

Este resultado puede sorprender, puesto que prácticamente 9 de cada diez veces que se realice la experiencia, se obtendrán coincidencias.

3

La función aleatoria *RanInt#* permite simular la experiencia tantas veces como se quiera:

RanInt#(1,15) genera aleatoriamente un número entero entre 1 y 15, que corresponde al número del agujero donde se coloca la piedra (huevo). Pulsando la tecla = sucesivamente hasta 8 veces emulando la experiencia:

ALPHA · 1 SHIFT) 1 5) = = = = = = = =

```
RanInt#(1,15)
            7   11   3   11   9   2   3   8
```

Para una mejor visualización de la experiencia, se cambia la configuración de la calculadora:

SHIFT MENU 1

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Result fracción
```

3

```
1:E Mat/S Mat
2:E Mat/S Decimal
3:E Línea/S Línea
4:E Línea/S Decim
```

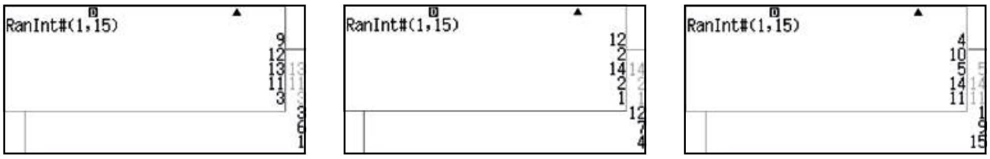
SHIFT MENU ▼ ▼ ▼ 3

```
1:Símbolo decimal
2:Separar dígitos
3:Fuente multilín
4:Idioma
```

2

```
1:Fuente normal
2:Fuente pequeña
```

Se muestran como ejemplo tres simulaciones:



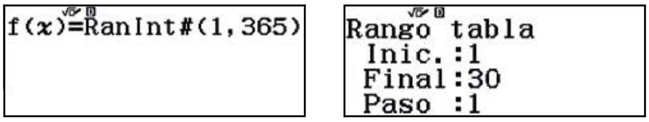
Se comprueba que en la primera experiencia existe una coincidencia, en la segunda hay dos y, en la tercera no hay coincidencia. El alumnado puede repetir tantas veces como quiera la experiencia y comprobar el cálculo de probabilidades.

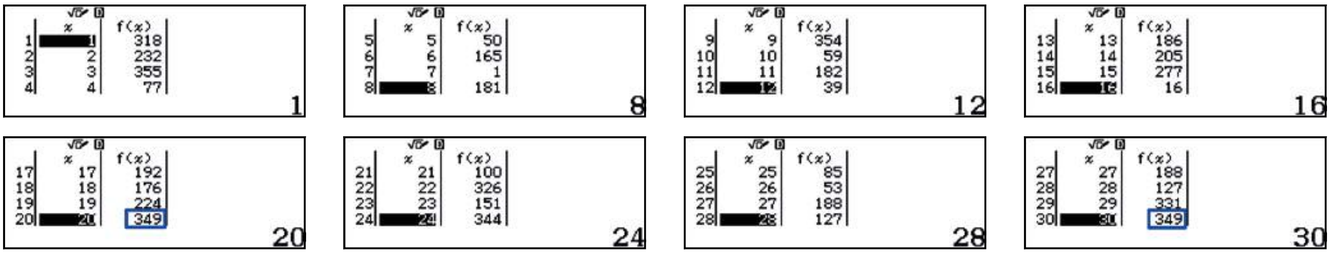
La razón de la suma de todas las simulaciones con al menos una coincidencia y el total de las simulaciones realizadas por el grupo clase debería acercarse al valor teórico (0,899) del **apartado 2**.

4

La solución a esta cuestión es análoga a la anterior, basta con cambiar los agujeros por los días del año y las piedras (huevos) por personas. Para simplificar el problema, se supondrá que no existen los años bisiestos.

En esta ocasión se debe generar un número entero aleatorio entre 1 y 365, pulsando 30 veces consecutivas la tecla ⊟. Esta operativa no resulta demasiado cómoda, motivo por el que se aprovecha el menú *Tabla* para simular la experiencia:





Se observa que más de la mitad de las veces se encuentra al menos una coincidencia. En concreto esa probabilidad es aproximadamente del 71%.

5

¿Qué ocurrirá con los cumpleaños de n personas distribuidos entre los 365 días del año?

El número de n cumpleaños sin que haya coincidencias viene dado por:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$$

Esto es debido a que para el primer cumpleaños existen 365 posibles fechas, para el segundo 364 y así sucesivamente hasta n cumpleaños.

El número total de n cumpleaños sin tener ningún tipo de restricción es 365^n, debido a que hay 365 posibles fechas para cada uno de los n cumpleaños.

Por consiguiente, la probabilidad de que no haya dos personas con la misma fecha de cumpleaños viene dada por la expresión:

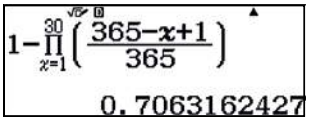
$$Q(n) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

La probabilidad $P(n)$ de que al menos dos personas tengan la misma fecha de cumpleaños (día y mes) viene dada por:

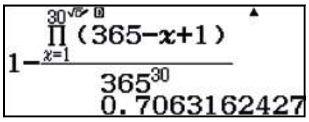
$$P(n) = 1 - Q(n) = 1 - \left(\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}\right) = 1 - \left(\frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}\right)$$

Para $n = 30$ alumnos, realizar el cálculo a partir de la primera expresión presenta la dificultad de introducir 30 factores, que puede llevar a cometer algún error. Tampoco es útil la segunda expresión debido a que el cálculo del factorial de 365 se encuentra fuera del rango de operatividad de la calculadora.

Con el operador productorio (ALPHA x (∏)) se calcula la probabilidad $P(30)$ a partir de la primera expresión:



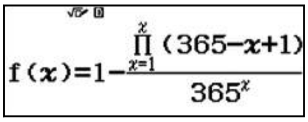
o bien:

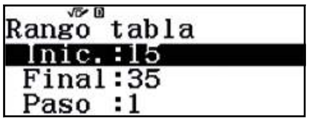


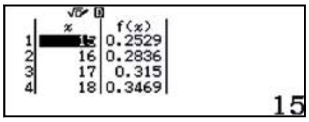
$P(30) \cong 71\%$

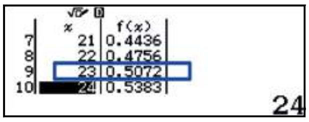
6

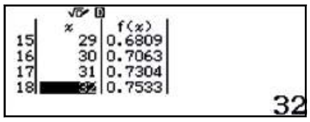
En una tabla de valores se pueden hallar las distintas probabilidades de obtener una coincidencia en función del número de alumnos:











7

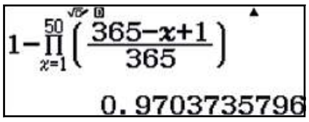
En un grupo de 23 personas la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en la misma fecha (día y mes) es del 50% tal y como se muestra en el **apartado anterior**.

En este caso, en el mundial de fútbol del 2014, los datos reales concuerdan con los resultados teóricos.

En el próximo mundial de fútbol no se puede asegurar que se repetirá la situación, puesto que la teoría de la probabilidad se basa en la ley de los grandes números. No se puede considerar que 32 equipos es un número 'grande' de sucesos en términos probabilísticos.

8

La probabilidad de coincidencia en un grupo de 50 personas es:



Es decir, la afirmación es correcta.

OBSERVACIÓN

Si desea consultar información sobre el Museu Matemàtiques de Catalunya, lo puede hacer a través de los siguientes enlaces:

https://mmaca.cat

https://mmaca.cat/moduls/

07 | Probabilidad y estadística
Juego de dados

Simularemos un juego de dos dados, el objetivo del cual será obtener que la suma de las puntuaciones sea par. Ganará el jugador que consiga antes 5 tiradas con esta condición.

1 Escribe el espacio muestral de la situación del juego de dados descrita anteriormente.

2 Teniendo en cuenta los resultados anteriores, ¿qué es más probable al lanzar los dados, que salga una tirada par (que la suma de las caras de los dos dados sea par) o impar (que la suma de las caras de los dos dados sea impar)?

3 Con la ayuda de tu calculadora, simula un juego de dados intentando alcanzar el objetivo del juego. Para recopilar los datos de la simulación de tus lanzamientos puedes ayudarte de la siguiente tabla:

Tiradas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Resultados											
Suma											

¿En cuántos lanzamientos has conseguido tu objetivo?

4 Comparte los resultados con tus compañeros, y realizad un histograma de frecuencias representando el número de tiradas que obtuvo cada uno para alcanzar el objetivo del juego. ¿Cuál ha sido el número mínimo de tiradas? ¿Y el máximo? ¿Cuál es la media de lanzamientos de la clase?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Juego de dados

MATERIALES

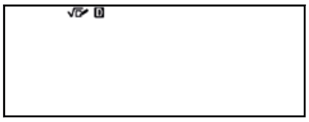
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

1º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se pretende trabajar el carácter aleatorio de algunas experiencias como el lanzamiento de un dado para simular un juego, intuir el cálculo probabilístico de sucesos y calcular conceptos estadísticos como, por ejemplo, medidas de centralización, el rango, frecuencias absolutas, etc.
- Para realizar esta actividad se utiliza el menú *Calcular* MENU 1.



- Si la pantalla muestra símbolos diferentes a los que se muestran en la pantalla superior conviene resetear la calculadora. Para ello se teclea SHIFT 9 (*RESET*) y se siguen las instrucciones para inicializar todo.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

El espacio muestral es:

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Ahora bien, los resultados no son equiprobables. Al lanzar dos dados se obtienen 36 casos posibles y 11 resultados diferentes para las sumas. En la siguiente tabla se recogen todos los resultados que se pueden obtener:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Aplicando la regla de Laplace se deduce que:

$$P(2) = P(12) = \frac{1}{36}; \quad P(3) = P(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}; \quad P(4) = P(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12};$$

$$P(5) = P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}; \quad P(6) = P(8) = \frac{5}{36} \quad \text{y} \quad P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2

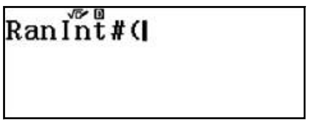
Utilizando los resultados de la tabla anterior, se obtiene:

$$P(par) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(impar) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Es decir, obtener *suma par* y *suma impar* tiene la misma probabilidad.

3

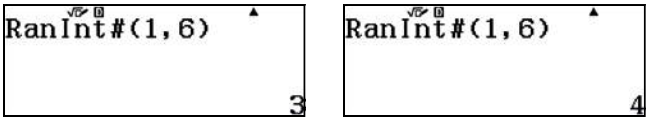
Simular el lanzamiento de un dado se realiza con la función *RanInt#* ALPHA • apareciendo por pantalla:



Juego de dados

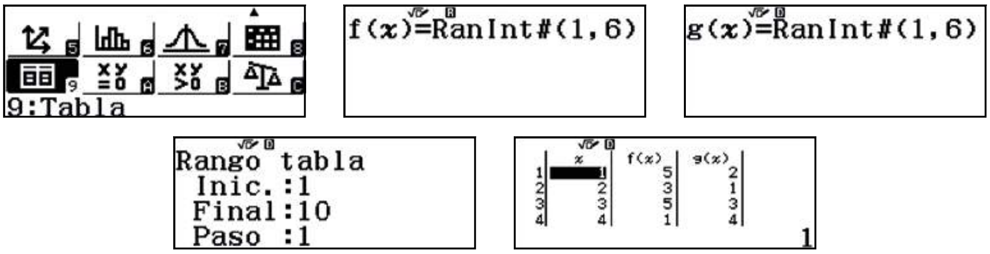
Esta expresión calcula un número aleatorio entero en el rango que se especifique, por ejemplo, en este caso para simular el lanzamiento de un dado cúbico:

[ALPHA] [·] [1] [SHIFT] [)] [6] [)] [=] [=]



También se puede realizar utilizando el menú *Tabla* [MENU] [9], con dos funciones para simular en cada una de ellas el lanzamiento de un dado:

[MENU] [9] [ALPHA] [·] [1] [SHIFT] [)] [6] [)] [=] [ALPHA] [·] [1] [SHIFT] [)] [6] [)] [=] [▼] [1] [0] [=]



Dado que los resultados son aleatorios, un ejemplo de solución es el que se ha obtenido en este caso, alcanzado el objetivo en 11 lanzamientos:

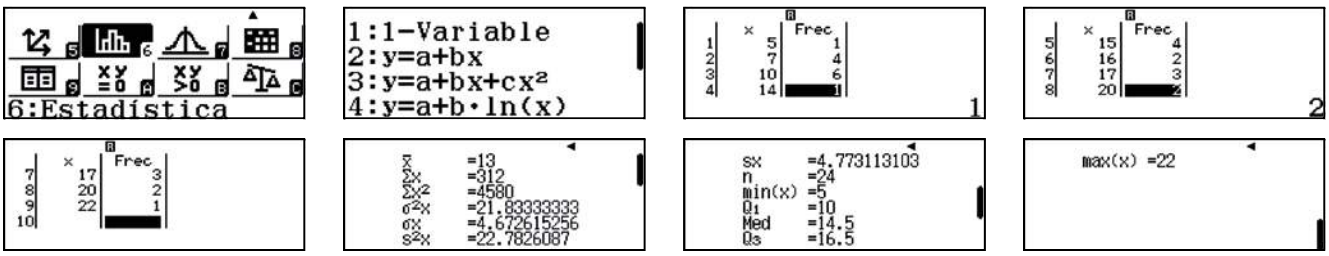
Tiradas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Resultados	4	3	3	6	3	6	1	1	2	2	5
	3	3	5	3	2	1	6	4	2	2	1
Suma	7	6	8	9	5	7	7	5	4	4	6

4

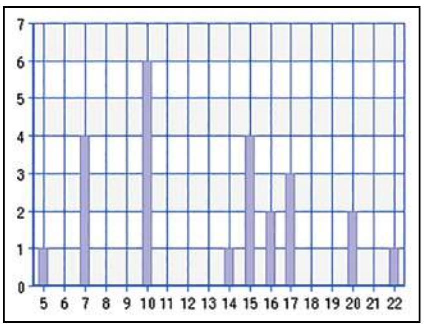
Es una actividad para fomentar el trabajo en equipo y el aprendizaje cooperativo, y depende de los resultados obtenidos. Por ejemplo, los resultados obtenidos en un aula de 24 estudiantes son:

Nº de tiradas	5	7	10	14	15	16	17	20	22
Frecuencia	1	4	6	1	4	2	3	2	1

Utilizando la opción *1-variable* del menú *Estadística* se pueden obtener los diferentes parámetros:



El diagrama de barras se obtiene generando un código *QR*:



Se observa que el número mínimo de tiradas ha sido 5, y el máximo 22. La media de lanzamientos que tuvo que realizar cada estudiante con estos datos ha sido de 13.

Juego

Juego de 3 dados

Este es un juego para dos personas o dos equipos.

MATERIALES

2 tableros, dos dados cúbicos de dos colores diferentes, un dado de operaciones (+, –, x), 24 fichas trasparentes de color rojo y 24 fichas trasparentes de color azul.

REGLAS DEL JUEGO

1. Cada equipo lanza un dado y comienza la partida el equipo que obtenga la mayor puntuación.
2. Cada equipo coloca las 24 fichas en su tablero teniendo en cuenta que en una casilla puede poner tantas fichas como quiera.
3. El primer equipo lanza los tres dados. Si en su tablero hay una ficha o varias con el resultado de la operación, retira una ficha. En caso contrario, pasa turno y juega el segundo equipo. Y así sucesivamente.
4. El primer equipo que consigue vaciar su tablero gana el juego.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Tras jugar una o varias partidas, contestad las siguientes preguntas:

1. ¿Todos los resultados posibles están en el tablero?

2. ¿Hay puntuaciones que son imposibles de obtener? ¿Cuáles?

3. Calculad la probabilidad de los resultados posibles. ¿Qué puntuaciones tienen más posibilidades de salir?

4. Buscad una estrategia para distribuir las fichas en vuestro tablero que favorezca ganar y volved a jugar. ¿Es seguro que ganaréis con esa estrategia? ¿Por qué?

5. Retirad el dado de las operaciones. Lanzad los dos dados cúbicos y elegid si queréis sumar, restar o multiplicar las puntaciones de los dados. ¿Os sirve con esta variante del juego la estrategia anterior? ¿Por qué?

08 | Ley de los grandes números
Lanzamiento de una moneda

La ley de los grandes números se considera el primer teorema fundamental de la teoría de la probabilidad. Establece que la frecuencia relativa de los resultados de un determinado experimento aleatorio, tiende a estabilizarse en un número que es justamente la probabilidad, cuando dicho experimento aleatorio se realiza muchas veces.

1 Simula con la calculadora el lanzamiento de una moneda normal 20 veces. Observa si las frecuencias relativas de los resultados *salir cara* o *salir cruz* tienden al valor teórico $\frac{1}{2}$.

2 ¿Cómo procederías para simular los 20 lanzamientos de una moneda trucada?

Lanzamiento de una moneda

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad el alumnado podrá realizar una simulación trabajando con tablas y fórmulas en la hoja de cálculo. Podrá realizar diversos gráficos transfiriendo sus datos desde una tabla CSV.
- Para realizar esta actividad se utiliza el menú *Hoja de cálculo* (MENU 1) y el código *QR* (SHIFT OPTN).

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

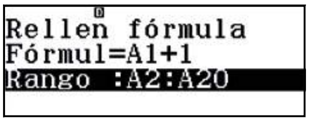
1

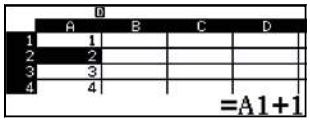
En el menú *Hoja de cálculo*, se introduce en la columna A el número de lanzamiento de la moneda:

En la celda A1 se introduce un 1 de primer lanzamiento.

En la celda A2 se pulsa OPTN 1, se escribe la fórmula =A1+1 y se ajusta el rango para no realizar la introducción de datos celda a celda:

ALPHA (–) 1 + 1 = ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 2 0 = =

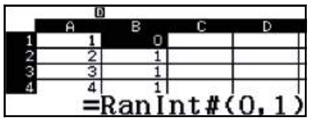




- En la columna B se simula el lanzamiento con la instrucción *RanInt#*(0,1) que devuelve de manera aleatoria 0 (cara) o 1 (cruz). Para escribir la instrucción directamente en las veinte celdas se procede de manera análoga:

  En la celda B1 se teclea la fórmula anterior:

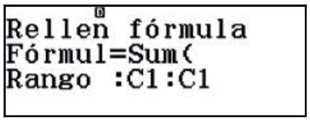
OPTN 1 ALPHA · 0 SHIFT) 1) ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 2 0 = =



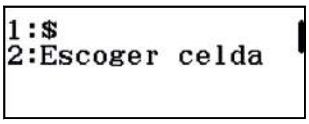
- En la columna C se cuentan el número de 1 (cruces) que se obtienen tras cada lanzamiento con la instrucción (B$1 fija la fila, se utiliza para copiar una fórmula y no modificar las referencias):

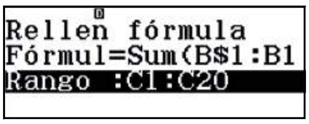
=Sum(B$1:B1) en la celda C1

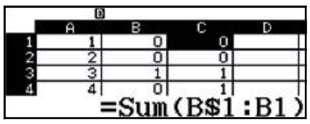
OPTN 1 OPTN ▼ 4



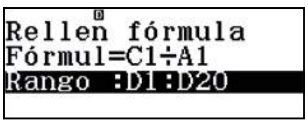
ALPHA ∘,,, OPTN 1 1 ALPHA □/□ ALPHA ∘,,, 1) = ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 2 0 = =

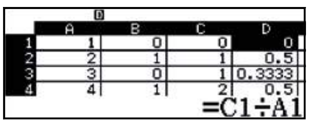




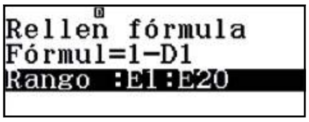


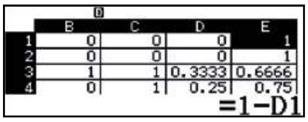
- En la columna D se calcula cómo va evolucionando la frecuencia relativa, según se efectúan los lanzamientos, empezando con $\frac{C1}{A1}$ y así hasta el vigésimo lanzamiento:





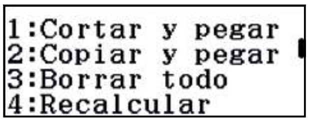
- En la columna E se calcula la frecuencia relativa del suceso *salir cruz* con =1–D1:





Se observa como en ambas columnas las frecuencias relativas tienden a su valor teórico.

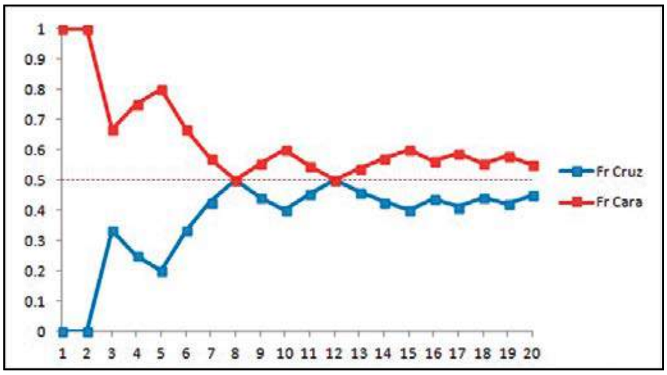
La opción *4:Recalcular* (OPTN ⏷ 4) permite la simulación tantas veces como se considere oportuno para corroborar la probabilidad teórica:



Con el código *QR* (SHIFT OPTN) se obtiene la tabla que se puede exportar como archivo CSV de Excel para realizar los gráficos adecuados. Para ello se pulsa el icono :

Tabla

	A	B	C	D	E
1	1	0	0	0	1
2	2	0	0	0	1
3	3	1	1	0.333333	0.666666
4	4	0	1	0.25	0.75
5	5	0	1	0.2	0.8
6	6	1	2	0.333333	0.666666
7	7	1	3	0.428571	0.571428
8	8	1	4	0.5	0.5



2

El siguiente procedimiento permite simular el lanzamiento de una moneda trucada.

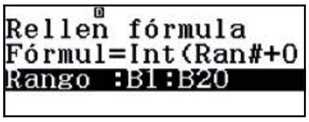
- En la columna B se simula el lanzamiento con la instrucción *Int*(*Ran#* + 0,4):

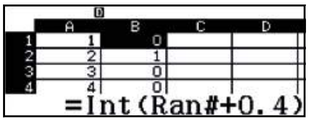
Ran# devuelve un número aleatorio entre 0 y 1.

- Si 0 < *Ran#* < 0,6 → 0 < *Ran#* + 0,4 < 1 → *Int*(*Ran#* + 0,4) = 0 → Cara
- Si 0,6 < *Ran#* < 1 → 1 < *Ran#* + 0.4 < 2 → *Int*(*Ran#* + 0,4) = 1 → Cruz

De esta manera se truca la moneda al asignar al suceso *salir cara* un valor del 60% y al suceso *salir cruz* un valor del 40%.

En la celda B1 se teclea la fórmula anterior:



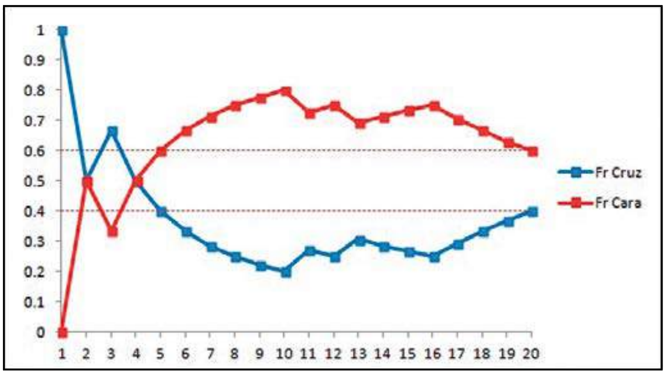


Para el resto de columnas se procede como en el **apartado 1**.

Con el código *QR* se obtiene la tabla que se puede exportar como archivo CSV:

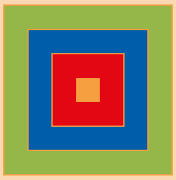
Tabla

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	0
2	2	0	1	0.5	0.5
3	3	1	2	0.666666	0.333333
4	4	0	2	0.5	0.5
5	5	0	2	0.4	0.6
6	6	0	2	0.333333	0.666666
7	7	0	2	0.285714	0.714285
8	8	0	2	0.25	0.75



Problema

Lanzar un dardo a una diana



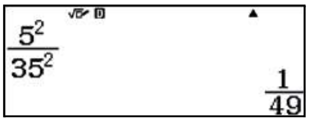
En una diana formada por cuadrados concéntricos de lados 5, 15, 25 y 35 cm, un jugador lanza un dardo que siempre cae dentro de la diana.

Calcula la probabilidad de que el dardo caiga en cada uno de los colores.

Como el dardo cae siempre dentro de la diana, los casos posibles del experimento serán iguales al área del cuadrado de lado mayor, es decir de lado 35 cm. Por tanto, los casos posibles son 35^2.

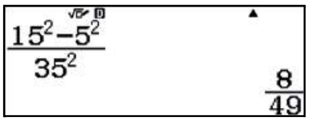
Sea el suceso A: *el dardo cae en la zona amarilla*. Los casos favorables al suceso A se corresponden con el área del cuadrado de lado 5 cm. La probabilidad de este suceso es:

$$P(A) = \frac{5^2}{35^2} = \frac{1}{49}$$



De manera similar, sea el suceso B: *el dardo cae en la zona roja*. Los casos favorables al suceso B se corresponden con el área de cuadrado de lado 15 cm menos el área del cuadrado de lado 5 cm. Por tanto:

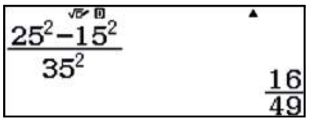
$$P(B) = \frac{15^2 - 5^2}{35^2} = \frac{8}{49}$$



Sea el suceso C: *el dardo cae en la zona azul.*

Los casos favorables al suceso C son el área del cuadrado de lado 25 cm menos el área del cuadrado de lado 15 cm:

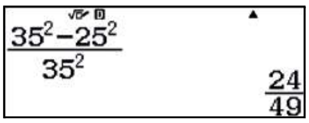
$$P(C) = \frac{25^2 - 15^2}{35^2} = \frac{16}{49}$$



Y por último, sea el suceso D: *el dardo cae en la zona verde.*

Los casos favorables , en este caso, son iguales al área de cuadrado de lado 35 cm menos el área del cuadrado de lado 25 cm:

$$P(D) = \frac{35^2 - 25^2}{35^2} = \frac{24}{49}$$



09 | Combinatoria. Regla de Laplace
Full de ases y reyes

La teoría de la Probabilidad es la herramienta matemática para trabajar con los fenómenos aleatorios, y nació gracias al interés que demostró un jugador empedernido, el Caballero De Meré, que le propuso a Blaise Pascal (1623-1662) la siguiente cuestión: ¿Cómo debe repartirse el dinero de las apuestas depositado en la mesa si los jugadores se ven obligados (seguramente por la policía ya que el juego estaba prohibido) a finalizar la partida sin que exista un ganador?

A♣	K♣	Q♣	J♣	10♣	**Escalera Real**
7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	**Escalera Color**
9♥	9♠	9♣	9♦	3♦	**Póker**
6♦	6♠	6♥	3♠	3♣	**Full**
2♥	7♥	J♥	A♥	4♥	**Color**
3♦	4♣	5♦	6♠	7♥	**Escalera**
8♥	8♠	8♣	2♣	10♦	**Trío**
Q♦	Q♠	5♥	2♣	5♦	**Doble Pareja**
K♣	K♦	7♣	2♠	J♥	**Pareja**

En la actualidad uno de los juegos de cartas más extendido en sus diferentes variantes es el póker, un juego en el que se mezclan las matemáticas, la psicología y la intuición. En abril de 2010 el póker fue aceptado como deporte mental por la Asociación Internacional de Deportes Mentales.

Si conoces las reglas del póker sabrás que hay una serie de combinaciones de cartas, llamadas manos, con una determinada jerarquía. El objetivo del juego consiste en conseguir una mano de cartas con una jerarquía mayor que la que tengan el resto de los jugadores.

En la tabla de la izquierda tienes en orden decreciente de importancia las distintas manos del póker.

Averigua cuál es la probabilidad de obtener cada una de ellas, así como la de no obtener ninguna.

Full de ases y reyes

MATERIALES

Calculadora CASIO fx 570/991SP X II Iberia

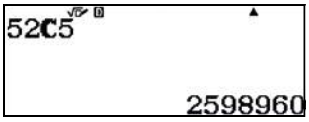
NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se utiliza una baraja de 52 cartas (13 cartas por color y sin comodines). Se considerará solamente el caso de que salgan las diferentes manos la primera vez que se reparten las cartas.
- Para calcular con la calculadora las distintas combinaciones que aparecen, como por ejemplo $C_{52}^{5} = \binom{52}{5}$, se utiliza la siguiente secuencia de teclas:

5 2 SHIFT ÷ 5 =



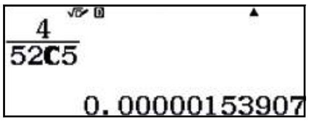
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

Para calcular las probabilidades de las manos de póker se observa que hay $C_{52}^{5} = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$ formas distintas de elegir 5 cartas de una baraja de 52. El cálculo de probabilidades se reduce a obtener las distintas formas en que puede ocurrir cada una de las manos.

Escalera real

La *escalera real* es una mano formada por cartas consecutivas todas del mismo palo, en la que la de más valor es el as. Solo hay cuatro posibles escaleras reales, una por cada palo, por lo que su probabilidad es:

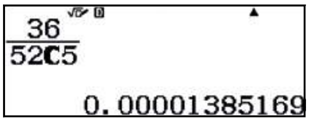
$$P(\textit{Escalera real}) = \frac{4}{2\,598\,960}$$



Escalera de color

La *escalera de color* es una mano formada por cartas consecutivas todas del mismo palo. Para averiguar el número de escaleras de color que se pueden formar es suficiente con pensar que en un conjunto ordenado de trece elementos solo hay 9 que tengan 5 elementos menores o iguales que ellos, en nuestro caso a esto se tiene que unir que hay cuatro palos distintos, por lo que el número de escaleras de color sería $9 \cdot 4 = 36$. La probabilidad de tener escalera de color al sacar cinco cartas de una baraja de póker es:

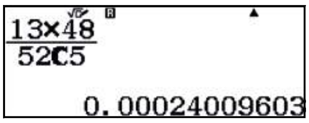
$$P(\textit{Escalera de color}) = \frac{36}{2\,598\,960}$$



Póker

Esta mano está formada por cuatro cartas de igual valor (aunque lógicamente serán de distinto palo) y una quinta carta distinta a las anteriores. El número de formas distintas de sacar un *póker* es igual a $13 \cdot 48 = 624$ (13 grupos de cuatro cartas del mismo valor y 48 cartas que se pueden utilizar para completar el quinteto):

$$P(\textit{Póker}) = \frac{13 \cdot 48}{2\,598\,960}$$

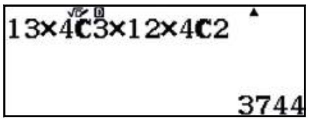


09 | Combinatoria. Regla de Laplace
Full de ases y reyes

Full

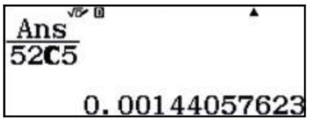
Un *full* se forma con dos grupos de cartas de igual valor, uno de tres cartas y otro de dos. Las distintas formas de sacar esta mano son:

$$13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2 = 3\,744$$



Que corresponde a 13 grupos de cuatro cartas de igual valor que se tienen para elegir el trío, por las formas de sacar tres cartas de cuatro, por 12 grupos de cartas de igual valor (ya se habría utilizado uno) que se tienen para elegir las parejas, por las formas de sacar dos cartas de cuatro posibles. La probabilidad es:

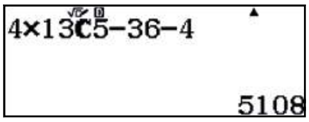
$$P(Full) = \frac{3\,744}{2\,598\,960}$$



Color

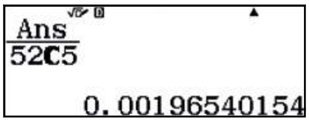
Todas las cartas deben ser del mismo palo, pero sin ser escalera real o de color. Por lo que el número de casos posibles es:

$$4 \cdot C_{13}^5 - 36 - 4 = 5\,108$$



La probabilidad de obtenerla es:

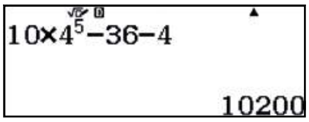
$$P(Color) = \frac{5\,108}{2\,598\,960}$$



Escalera

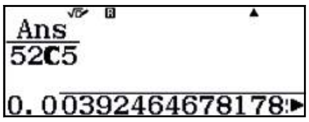
Cinco cartas de valor consecutivo de distinto palo. El número de casos favorables es:

$$10 \cdot VR_4^5 - 36 - 4 = 10\,200$$



La probabilidad de obtenerla:

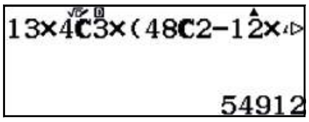
$$P(Escalera) = \frac{10\,200}{2\,598\,960}$$



Trío

Las distintas formas de sacar tres cartas del mismo valor junto con otras dos que no lo sean es:

$$13 \cdot C_4^3 \cdot (C_{48}^2 - 12 \cdot C_4^2) = 54\,912$$



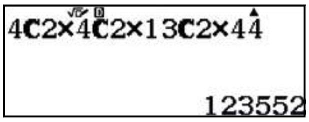
La probabilidad de obtenerla:

$$P(\textit{Trío}) = \frac{54\,912}{2\,598\,960} \approx 0{,}021$$

Doble Pareja

El número de formas distintas de obtener esta mano es:

$$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{13}^2 \cdot 44 = 123\,552$$



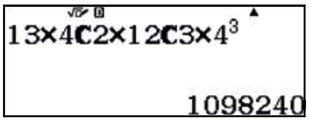
La probabilidad de obtenerla:

$$P(\textit{Doble Pareja}) = \frac{123\,552}{2\,598\,960} \approx 0{,}048$$

Pareja

Para calcular todas las formas posibles de obtener esta mano se procede como sigue:

$$13 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^3 \cdot VR_4^3 = 1\,098\,240$$



La probabilidad de obtenerla:

$$P(\textit{Pareja}) = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} \approx 0{,}423$$

Ninguna mano

El número de casos favorables se obtiene restando al número de casos posibles los casos de obtener alguna mano:

$$2\,598\,960 - (4 + 36 + 624 + 3\,744 + 5\,108 + 10\,200 + 54\,912 + 123\,552 + 1\,098\,240) = 2\,598\,960 - 1\,296\,420 = 1\,302\,540$$

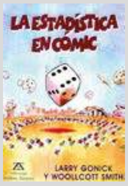
La probabilidad de no obtener mano alguna es:

$$P(\textit{ninguna mano}) = \frac{1\,302\,540}{2\,598\,960} \approx 0{,}501$$

OBSERVACIÓN

Una opción para diversificar esta actividad puede ser comparar la probabilidad de ocurrencia de alguna de las manos con la probabilidad de obtener el máximo premio en otros juegos de azar como puede ser el caso de la Bonoloto o la lotería de Navidad. Resulta de especial interés utilizar ese tipo de actividades en clase para tratar el consumo responsable y la ludopatía, aunque sólo sea de manera tangencial. Existen datos, en el IX Informe Percepción Social sobre el juego de azar en España 2018 (realizado por la Fundación Codere y la Universidad Carlos III de Madrid), que afirman que solo en el ámbito del juego online, hubo un incremento de 120 000 personas en 2017, estimándose en 1,5 millones – el equivalente a 4,8% de la población entre 18 y 75 años– el número total de jugadores activos a este tipo de juegos, a finales de 2017. Este dato hace más importante que el alumnado aprenda, a través del concepto de probabilidad, a analizar los riesgos que tienen los juegos de azar.

10 | Cálculo de probabilidades. Probabilidad condicionada
Juego justo. El origen de la probabilidad



"En la vida, nada es seguro. En todas nuestras acciones, calculamos siempre las posibilidades de un buen resultado. Tanto en el mundo de los negocios como en la medicina o el clima. Sin embargo, en la historia de la humanidad, la probabilidad, el estudio formal de las leyes del azar, se ha utilizado para una sola cosa: el juego"

Larry Gonick y Woollcott Smith, 1993

1 El juego se remonta a tiempos ancestrales, durante la Edad Media los juegos de dados se hicieron muy populares. En el Renacimiento, el Caballero De Mére propuso el siguiente enigma matemático:

¿Qué es más probable, sacar un seis en cuatro tiradas con un solo dado o sacar al menos un doble seis en 24 tiradas con dos dados?

Y tú, ¿qué crees que es más probable?

2 Repite 20 veces cada juego, lanzando los dados o simulando los lanzamientos con tu calculadora, y recoge tus datos en una tabla.

	Sale 6	No sale 6
4 tiradas Dado cúbico		

	Sale doble 6	No sale doble 6
24 tiradas Dos dados cúbicos		

Pon en común tus resultados con el resto de la clase. ¿Qué crees ahora que es más probable? Justifica tu respuesta.

3 De Mére estaba hecho un lío, por una parte, justificó que la probabilidad de obtener una tirada ganadora era la misma en ambos juegos:

$P(\textit{Sale 6}) = \frac{1}{6}$ $\quad P(\textit{Sale un 6 en 4 tiradas}) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$P(\textit{Sale doble 6}) = \frac{1}{36}$ $\quad P(\textit{Sale doble 6 en 24 tiradas}) = 24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$

Por otra parte, había observado que perdía más a menudo con la segunda apuesta.

Para salir de su embrollo, De Mére acudió a Blaise Pascal y este a su vez escribió a su amigo Pierre de Fermat y en el transcurso de la correspondencia que mantuvieron, ambos desarrollaron la teoría de la probabilidad. Con esta teoría pudieron resolver el conflicto de De Mére calculando la probabilidad de cada juego y demostrando que no tenían la misma probabilidad.

¿Cuál es la probabilidad de cada juego? Justifica tu respuesta.

Juego justo. El origen de la probabilidad

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP XII Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se puede iniciar la probabilidad condicionada y revisar conceptos como sucesos equiprobables y sucesos independientes. El uso de árboles puede facilitar la comprensión de dichos conceptos.
- El uso de la calculadora favorece que la atención se centre en la toma de decisiones, en la formulación de conjeturas y en su validación.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

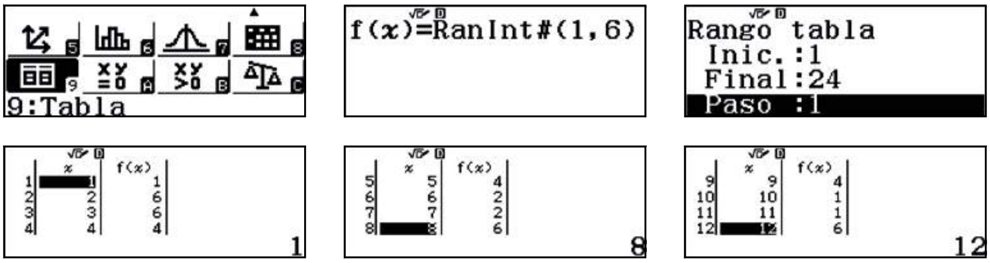
2

Respuesta abierta.

La simulación con la calculadora se puede hacer de varias maneras. En esta ocasión, se ha elegido el uso de las tablas.

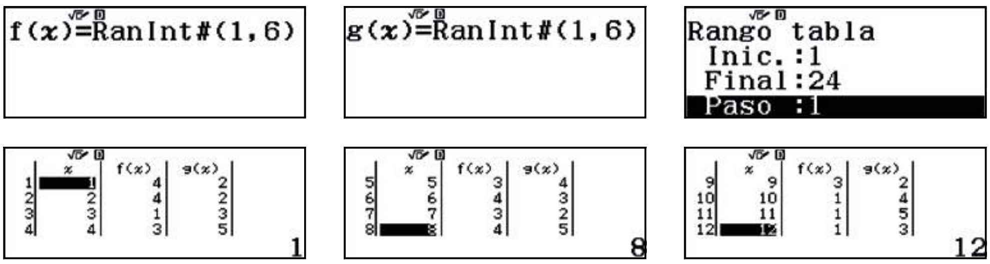
Lanzamiento de un dado cúbico:

MENU ▼ ▼ = ALPHA • 1 SHIFT) 6) = = ▼ 2 4 = = ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼



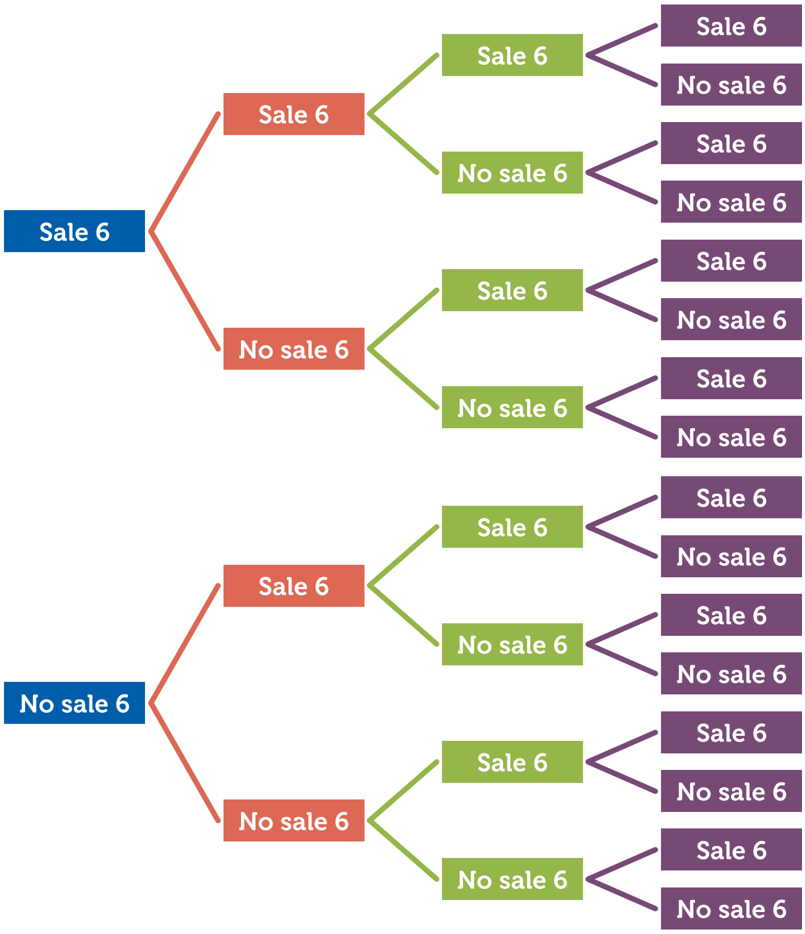
Lanzamiento de dos dados cúbicos:

MENU ▼ ▼ = ALPHA • 1 SHIFT) 6) = ALPHA • 1 SHIFT) 6) = ▼ 2 4 = =
▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼



3

Se puede calcular la probabilidad de ganar en el primer juego utilizando un diagrama de árbol:



En cada tirada se tiene:

$$P(\textit{Sale 6}) = \frac{1}{6}$$

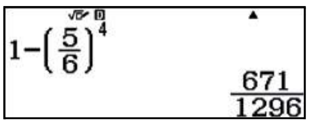
$$P(\textit{No sale 6}) = \frac{5}{6}$$

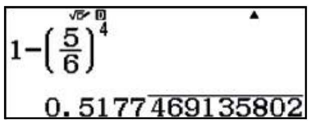
Lo más fácil es calcular la probabilidad de que no salga ningún 6 en cuatro tiradas:

$$P(\textit{No sale 6 en 4 tiradas}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Por tanto,

$$P(\textit{Sale al menos un 6 en 4 tiradas}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$$





Razonando de la misma forma en el segundo juego, se obtiene en cada tirada:

$$P(\textit{Sale 6}) = \frac{1}{36}$$

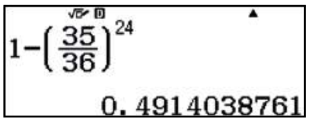
$$P(\textit{No sale doble 6}) = \frac{35}{36}$$

La probabilidad de que no salga ningún doble 6 en 24 tiradas:

$$P(\textit{No sale doble 6 en 24 tiradas}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

Por tanto,

$$P(\textit{Sale al menos un doble 6 en 24 tiradas}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491$$



Aunque la diferencia de las probabilidades sea pequeña, es más probable que salga al menos un 6 en cuatro tiradas que un doble seis en 24. Ahora bien, para darse cuenta de la diferencia a través de la experimentación, se tienen que jugar muchas partidas y registrar los resultados. Por ello, no es descabellado pensar que De Mére era un gran jugador y, además, registraba los resultados de sus partidas.

Ampliación

Juego interrumpido.

Luisa y Antonio apuestan, respectivamente, a cara o cruz lanzando una moneda.

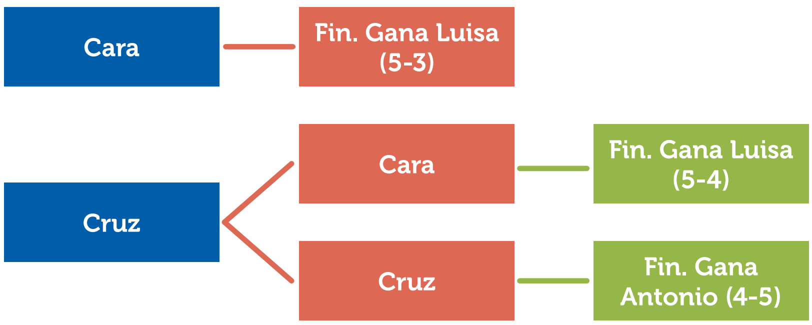
El primero que consigue cinco caras o cinco cruces gana la partida.

El juego se interrumpe cuando Luisa tiene 4 caras y Antonio 3 cruces.

Si cada uno ha apostado 5 €, ¿cómo deben repartir la cantidad apostada para que el juego sea justo?

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

En un diagrama de árbol se analizan las diferentes opciones de ganar si no se hubiera interrumpido el juego:



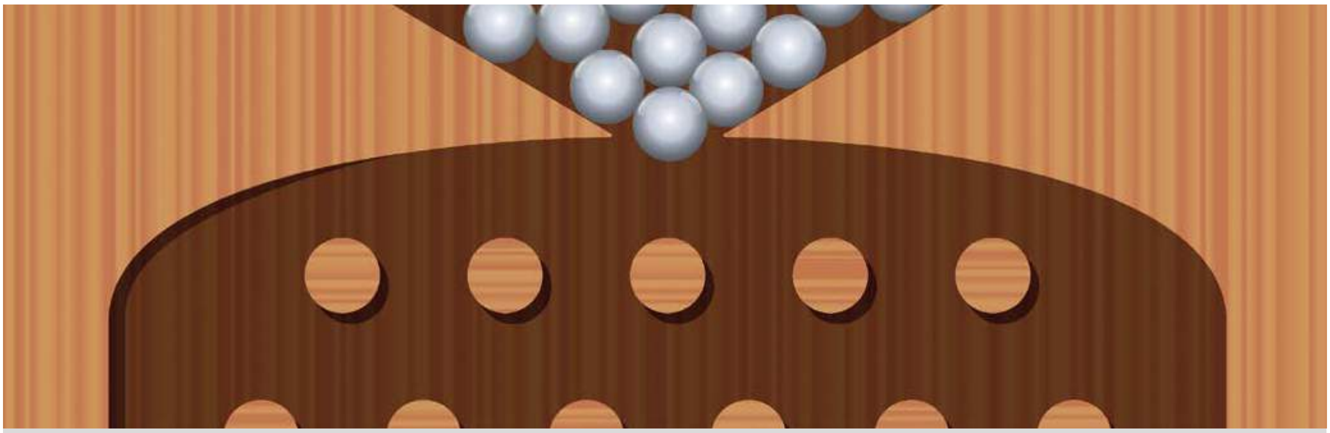
$$P(\textit{Gana Luisa}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(\textit{Gana Antonio}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

En consecuencia, Luisa ganaría 3 de cada 4 partidas y Antonio, 1 de cada 4. El reparto más justo es 3 a 1 a favor de Luisa.

Como la cantidad total apostada es de 10 euros, a Luisa le corresponden $\frac{3}{4}$ de 10 = 7,50 € y a Antonio $\frac{1}{4}$ de 10 = 2,50 €.

11 | Cálculo de probabilidades. Números combinatorios
La máquina de Galton o el Quincunx



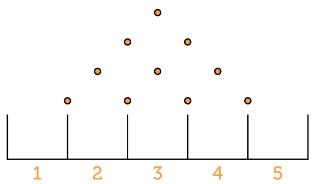
El aparato o màquina de Galton simula el siguiente experimento:

Soltamos por la máquina un gran número de bolas (cuanto mayor sea, más preciso es el experimento) de manera que cada una de ellas choca con un tope, se desplaza a izquierda o derecha de manera aleatoria, choca nuevamente y se desplaza de nuevo a izquierda o derecha. Así sucesivamente hasta que cae en un casillero situado al final del recorrido.

En cada choque, cada bola tiene la misma probabilidad de ir a izquierda o derecha.

1 Busca información sobre Galton y haz una pequeña reseña de su biografía y de su contribución a las matemáticas.

2 Si soltamos 2000 bolas en una máquina de Galton de 4 filas de topes, ¿cuántas bolas crees que se depositarán en cada casillero?



3 ¿Cuál es la probabilidad de que una bola se deposite en cada uno de los casilleros? Representa en un diagrama de barras las probabilidades que has obtenido.

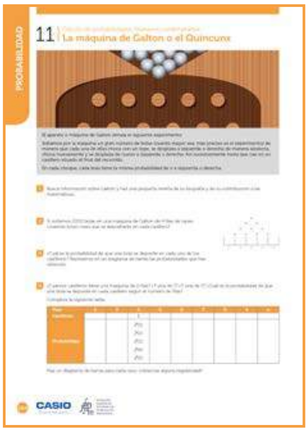
4 ¿Cuántos casilleros tiene una máquina de 2 filas? ¿Y una de 3? ¿Y una de 5? ¿Cuál es la probabilidad de que una bola se deposite en cada casillero según el número de filas?

Completa la siguiente tabla:

Filas	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Casilleros			5						
Probabilidad			$P(1)$ $P(2)$ $P(3)$ $P(4)$ $P(5)$						

Haz un diagrama de barras para cada caso, ¿observas alguna regularidad?

11 Cálculo de probabilidades. Números combinatorios
La máquina de Galton o el Quincunx



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP XII Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se analiza cómo se distribuyen teóricamente las bolas en una máquina de Galton. Con el proceso de resolución se pretende revisar o introducir diversos conceptos como sucesos equiprobables, sucesos independientes, probabilidad condicionada, números combinatorios y combinaciones.

- El uso de diagramas de árbol y del triángulo de Pascal facilita la comprensión de dichos conceptos. Por otra parte, el uso de la calculadora favorece que la atención se centre en la toma de decisiones, en la formulación de conjeturas y en su validación.

- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

  Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a:
  http://wes.casio.com/es-es/class

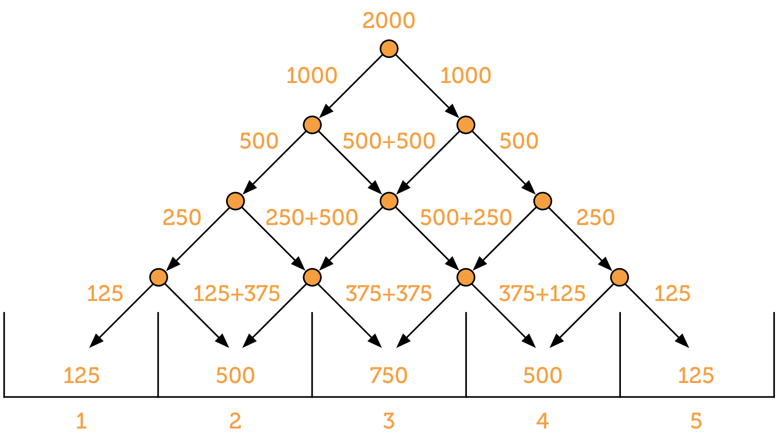
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2 **3**

Con el siguiente gráfico se calcula el número de bolas que se depositan en cada casillero y la probabilidad de que una bola se deposite en cada uno de ellos:



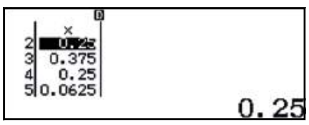
$\frac{125}{2000} = \frac{1}{16}$ $\frac{500}{2000} = \frac{4}{16}$ $\frac{750}{2000} = \frac{6}{16}$ $\frac{500}{2000} = \frac{4}{16}$ $\frac{125}{2000} = \frac{1}{16}$

$$p(1) = p(5) = \frac{1}{16}$$

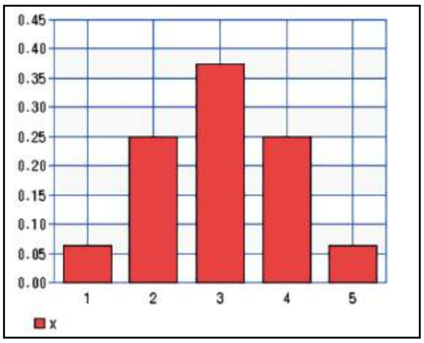
$$p(2) = p(4) = \frac{4}{16}$$

$$p(3) = \frac{6}{16}$$

Para representar el diagrama de barras se utiliza el menú *Estadística* y el código *QR*:



La máquina de Galton o el Quincunx

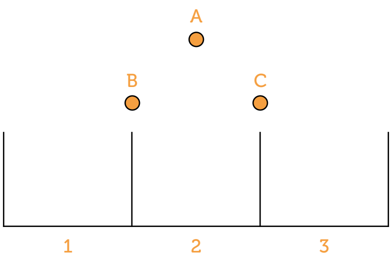


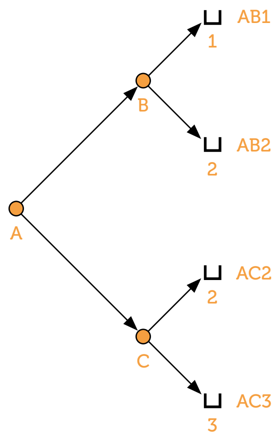
4

El número de casilleros según el número de filas y el cálculo de las diferentes probabilidades se recogen en la siguiente tabla:

Filas	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	***n***
Casilleros	3	4	5	6	7	8	9	10	$n+1$
Probabilidad	1/4 2/4 1/4	1/8 3/8 3/8 1/8	1/16 4/16 6/16 4/16 1/16	1/32 5/32 10/32 10/32 5/32 1/32	1/64 6/64 15/64 20/64 15/64 6/64 1/64	1/128 7/128 21/128 35/128 35/128 21/128 7/128 1/128	1/256 8/256 28/256 56/256 72/256 56/256 28/256 8/256 1/256	1/512 9/512 36/512 84/512 126/512 126/512 84/512 36/512 9/512 1/512	$P(i)=\binom{n}{i-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $1 \le i \le n+1$

Para calcular las probabilidades se pueden utilizar diagramas de árbol, por ejemplo:





$P(1)=\frac{1}{4}$

$P(2)=\frac{2}{4}$

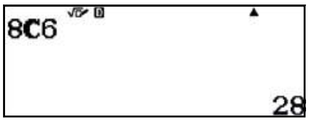
$P(3)=\frac{1}{4}$

La máquina de Galton o el Quincunx

Se agilizarán los cálculos con la calculadora, por ejemplo:

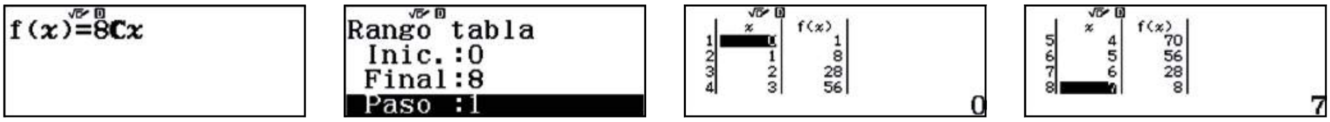
$$C_8^6 = \binom{8}{6}$$

8 SHIFT ÷ 6 =

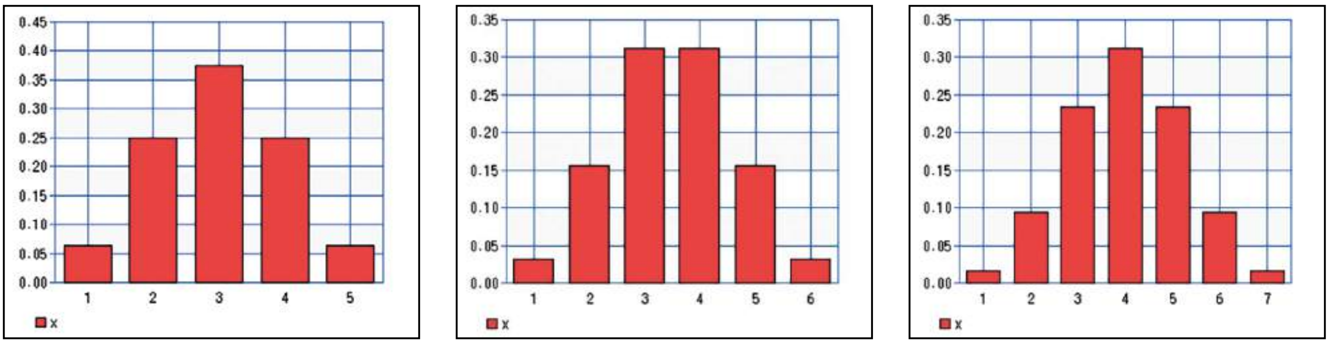


Para evitar la introducción de las combinaciones una a una se utiliza el menú *Tabla*:

MENU 9 8 SHIFT ÷ x = 0 = 8 = =



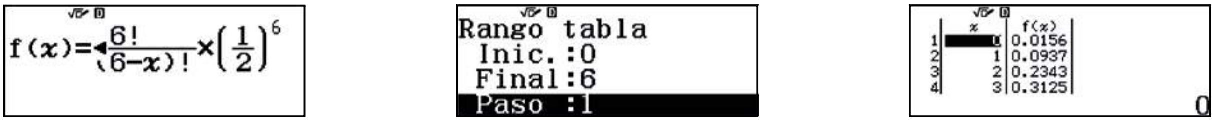
Para visualizar conjuntamente los diferentes diagramas se utiliza el menú *Estadística*, se genera el código *QR* y se comparte en la clase de la aplicación CASIO EDU⁺ creada con antelación. Los siguientes diagramas de barras corresponden a distribuciones de 5, 6 y 7 casilleros respectivamente:

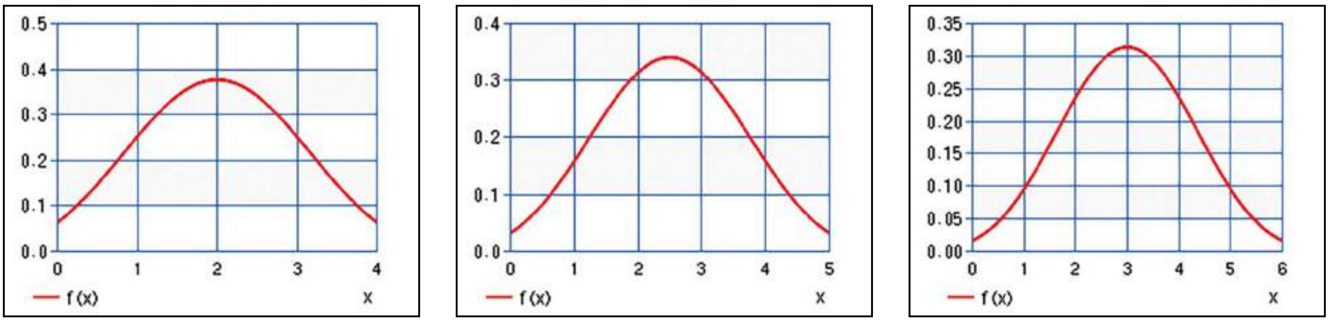


http://wes.casio.com/class/rQr6-4y8t-OzUO-VpR2

La comparación de los diagramas de barras permite introducir la distribución binomial.

Se pueden comparar los resultados utilizando el menú *Tabla*:





En las gráficas se observa que la distribución binomial es una aproximación a la distribución normal.

12 | Combinatoria
Selección de personal

Wihem Leibniz en su *Dissertartio de Arte Combinatoria* introdujo el término "combinatoria" (como lo conocemos ahora) y J. Bernouilli con su trabajo *Ars Conjectandi* (el arte de conjeturar) estableció las nociones básicas de probabilidad.

Con ambos trabajos se estableció la combinatoria como una rama de las matemáticas. Esta rama se encarga de contar sin enumerar directamente todos los casos. Para ello, es preciso conocer técnicas de ordenación, colocación, selección, etc., de objetos.

Las permutaciones, variaciones y combinaciones constituyen instrumentos eficaces de recuento.

Una empresa desea abrir una nueva sucursal. Necesita personas para ocupar algunos de los puestos de mayor responsabilidad. En el proceso de selección los candidatos tienen que resolver cuatro tareas entre quince propuestas diferentes.

1 ¿De cuántas formas un candidato puede elegir las cuatro tareas?

2 Si de las tareas hay tres de las que el candidato desconoce su resolución, ¿se reducen mucho las posibilidades de elección?

3 La empresa ha decidido que las personas más innovadoras en la resolución de las tareas ocuparán los 3 puestos de mayor responsabilidad (encargado, subencargado y supervisor).

¿De cuantas formas se pueden cubrir estos 3 puestos si hay 7 personas seleccionadas?

4 Si el puesto de encargado ya está asignado a uno de ellos, ¿de cuántas formas se pueden cubrir los otros dos puestos?

12 | Combinatoria
Selección de personal

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

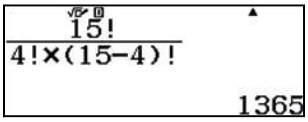
- Con esta actividad se pretende utilizar diferentes técnicas de recuento.
- Con las funciones nPr y nCr se pueden resolver combinaciones, variaciones o permutaciones sin repetición.

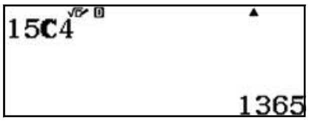
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se eligen la tareas teniendo en cuenta que no influye el orden, $C_{15,4} = \binom{15}{4} = \frac{15!}{4!\,(15-4)!} = 1\,365$.

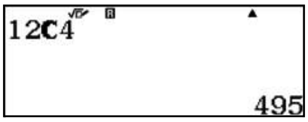
Se introducen los datos o se utiliza la función nCr:

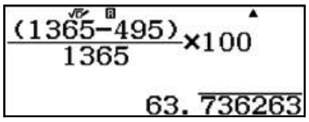




2

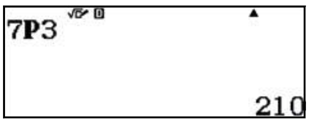
Hay $C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = 495$ formas de elegir las tareas. Por tanto, las posibilidades de elección se reducen casi al 64%:





3

Para cubrir los 3 puestos con 7 candidatos hay que tener en cuenta el orden, $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$:



Hay 210 formas de cubrir los 3 puestos de mayor responsabilidad.

4

Quedan 6 candidatos para cubrir los dos puestos restantes, $V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$:

Los dos puestos restantes se pueden cubrir de 30 formas.

13 Regla de Laplace. Combinatoria

¿Qué probabilidad tengo de que me toque la lotería?

Loterías y Apuestas del Estado

Son muchos los juegos de azar en los que se puede ganar un premio en metálico. Comprar un billete de lotería o tachar unos cuantos números en un boleto, son algunas de las opciones de participar en este tipo de juegos. La Sociedad Estatal de Loterías y Apuestas del Estado ofrece diferentes modalidades de juegos.

Se estudiarán los siguientes juegos de azar: La Primitiva, el Gordo de la Primitiva, la Lotería Nacional y la Quiniela de fútbol.

Se formarán grupos de dos o tres personas. Al final realizaremos una comparativa entre todos ellos.

1 ¿En qué consisten estos juegos? ¿Cuál es el precio de las apuestas?

2 ¿Cuál es la probabilidad de ganar el mayor premio en cada uno de estos juegos?

La actividad finalizará con una puesta en común con todos los grupos y posterior debate sobre las probabilidades que tienen los diferentes juegos de azar.

Juego	La Primitiva	El Gordo De la Primitiva	Lotería Nacional	La Quiniela
Probabilidad del mayor premio				
Precio de una apuesta				

13 | Regla de Laplace. Combinatoria
¿Qué probabilidad tengo de que me toque la lotería?

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad se pretende hacer un estudio de los diferentes juegos de azar que disponemos en nuestra sociedad y calcular su probabilidad. La actividad está planteada para que los alumnos realicen grupos de trabajo, cada uno dedicado al estudio completo de un juego de azar determinado. Aquí sólo se dan las orientaciones para la el cálculo de probabilidad del premio máximo. Sería muy interesante generar un debate sobre estos juegos de azar desde el punto de vista matemático y social.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

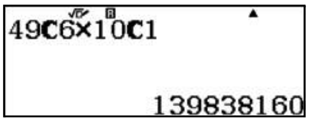
1 **2**

La Primitiva

La categoría especial del juego consiste en acertar 6 números más el reintegro. Los 6 números se marcan en una matriz que contiene 49 números (del 1 al 49) y el reintegro, en una segunda matriz formada por 10 números (del 0 al 9). El precio de una apuesta es de 1 €.

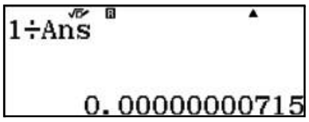
Dado que el orden en el que aparecen los 6 números no importa, los casos posibles se calculan multiplicando las combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6 por las 10 posibilidades de elegir el reintegro:

$$C_{49,6} \cdot C_{10,1} = \binom{49}{6} \cdot \binom{10}{1} = 139\ 838\ 160$$



La probabilidad de ganar el premio máximo es:

$$P = \frac{1}{139\ 838\ 160} \approx 0{,}000\ 000\ 007$$



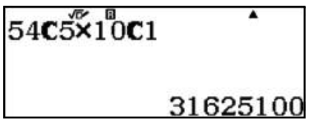
El Gordo de la Primitiva

La primera categoría del juego consiste en acertar 5 números de 54 además de un número del 0 al 9, llamado número clave. El precio de una apuesta es de 1,50 €.

Los casos posibles son combinaciones de 54 números tomados de 5 en 5, ya que en este caso tampoco importa el orden. Para cada uno de estos casos se tienen 10 posibilidades, una por cada valor del número clave.

Por tanto, el número de combinaciones posibles es:

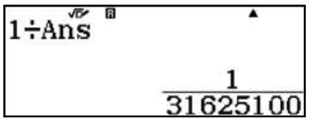
$$C_{54,5} \cdot C_{10,1} = \binom{54}{5} \cdot \binom{10}{1} = 31\ 625\ 100$$

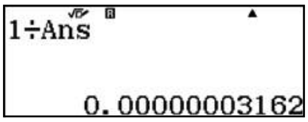


13 Regla de Laplace. Combinatoria
¿Qué probabilidad tengo de que me toque la lotería?

La probabilidad del premio máximo es:

$$P = \frac{1}{31\,625\,100} \approx 0{,}000\,000\,032$$

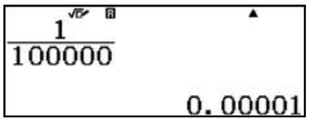




Lotería Nacional

Se juega comprando un décimo de Lotería Nacional. El premio de mayor cuantía consiste en acertar un número de cinco cifras que van de 00 000 a 99 999. Se realizan sorteos todos los jueves y sábados, el 22 de diciembre (Sorteo de Navidad) y el 5 de enero (Sorteo del Niño).

$$P = \frac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$$



La Quiniela

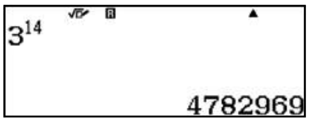
Una apuesta consiste en seleccionar el ganador de 14 partidos de la jornada de fútbol asociada, y el resultado exacto del partido 15: "Pleno al 15". En los primeros 14 partidos se marca el signo "1" si se pronostica que gana el equipo local, se marca con el signo "2" si se pronostica que gana el equipo visitante, y se marca el signo "X" si se pronostica un empate. En el "Pleno al 15" se marca para cada equipo el número de goles que se pronostica: "0" si el equipo no marca goles; "1" si el equipo marca 1 gol; "2" si marca 2 goles o "M" si se marca tres o más goles.

El precio, en 2019, de una apuesta es de 0,75 €; pero se debe hacer un mínimo de dos apuestas, 1,50 €.

Para calcular los casos posibles hay que considerar todas las formas de marcar los 14 partidos y el "Pleno al 15".

Para calcular todas las opciones de marcar los 14 partidos hay que tener en cuenta que son variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969$$

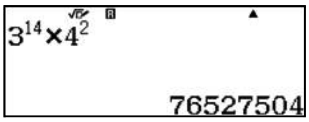


El "Pleno al 15" se puede rellenar de 16 formas diferentes:

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

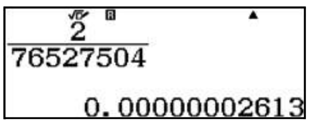
La cantidad de apuestas diferentes con las que se puede rellenar la quiniela se obtiene multiplicando los dos resultados anteriores:

$$VR_{3,14} \cdot VR_{4,2} = 3^{14} \cdot 4^2 = 76\,527\,504$$



Teniendo en cuenta que hay que hacer como mínimo 2 apuestas en la Quiniela, la probabilidad de obtener el premio de mayor cuantía es:

$$P = \frac{2}{76\,527\,504} \approx 0{,}000\,000\,026$$



13 Regla de Laplace. Combinatoria

¿Qué probabilidad tengo de que me toque la lotería?

En resumen,

Juego	La Primitiva	El Gordo De la Primitiva	Lotería Nacional	La Quiniela
Probabilidad del mayor premio	$P = \frac{1}{139\,838\,160}$ ≈ 0,000 000 007	$P = \frac{1}{31\,625\,100}$ ≈ 0,000 000 032	$P = \frac{1}{100\,000}$ ≈ 0,000 01	$P = \frac{2}{76\,527\,504}$ ≈ 0,000 000 026
Precio de una apuesta	1 €	1,50 €	Jueves: 3 € Sábado: 6, 12 o 15 € Navidad y Niño: 20 €	1,50 € (0,75 € x 2)

Ampliación

1 Tras la realización de esta actividad, ¿qué opinas sobre la lotería?

2 Si tuvieras que jugar, ¿qué lotería elegirías? ¿Por qué?

3 ¿Mejora mucho la probabilidad de obtener el premio mayor en El Gordo de la Primitiva si en lugar de realizar una apuesta se realizan dos? ¿Y en La Primitiva? ¿Y si se hacen 10 apuestas?

4 ¿Cuánto dinero hay que apostar en la quiniela para tener una probabilidad del 25% de conseguir el "Pleno al 15"?

14 | Estadística Unidimensional. Probabilidad
La caza de patos

En 1973 Maurice Glaymann y Tamas Varga publicaron *Les probabilités à l'ècole (Collection Formation des maîtres en mathematique, 9)*. En 1975 la editorial Teide publicó una traducción de Ricardo Pons de dicho libro: *Las probabilidades en la escuela*.

Uno de los ejemplos más conocido del libro sobre simulación con números aleatorios es:

La caza de patos

"Diez cazadores, todos ellos de élite, están dispuestos a cazar patos delante de unas rocas sobre las que se posan diez patos. Cada cazador sólo puede hacer un disparo y no puede saber a qué patos disparan los otros. Disparan todos al mismo tiempo, eligiendo cada uno a su víctima al azar. Si se repite a menudo esta experiencia, ¿cuántos patos sobrevivirán por término medio?"

1 Seis cazadores, que no fallan nunca, disparan sobre seis patos.

¿Cuántos patos se espera por término medio que sobrevivan a los disparos de los cazadores?

Haz una simulación para calcular el número de patos que sobrevivirán a los disparos de los cazadores.

2 Calcula, a partir de los datos de la simulación del **apartado 1**, la probabilidad de que:

- **a.** No se salve ningún pato.
- **b.** Se salve un pato.
- **c.** Se salven dos, tres, cuatro o cinco patos.

La caza de patos

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se simula con la calculadora un experimento aleatorio. Se realiza un recuento de los resultados obtenidos y con el menú *Estadística* se calculan las medidas de centralización de la simulación.
- En la ampliación de la actividad, se contrasta la probabilidad experimental con la teórica utilizando la regla de Laplace.

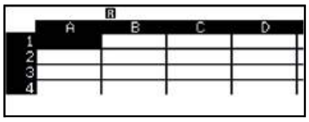
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

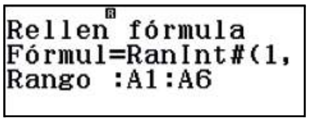
1

Se simula el experimento con la *Hoja de cálculo*. Cada fila representa a un cazador y cada columna cada vez que dispara. Por ejemplo, la celda 5B es el segundo disparo del quinto cazador. Se simularán 20 tandas de disparos y se hace el recuento del número de patos que sobreviven en cada tanda.

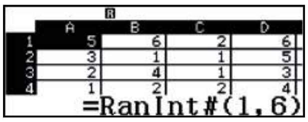
Se empieza completando 4 columnas (ya que son las que se pueden ver en pantalla) con seis números aleatorios entre 1 y 6, que representan los patos a los que se ha disparado. Después se hace el recuento de los patos que sobreviven y se repite 4 veces todo este proceso.

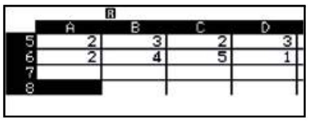
La celda A1 de la *Hoja de cálculo* se rellena con la fórmula *RanInt#*(1, 6), que genera un número aleatorio entre 1 y 6:



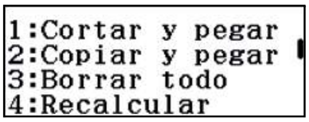


Para completar las columnas B, C y D se repite la forma descrita anteriormente o se escribe en el rango "A1:D6":

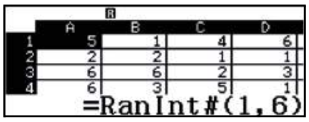


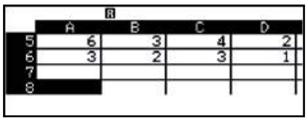


Se utiliza la opción *Recalcular* para repetir el proceso 4 veces y obtener las 16 simulaciones restantes de los tiros de cada cazador:

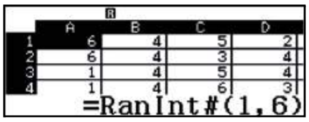


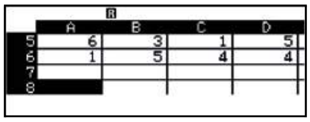
"Simulaciones de 5 a 8"



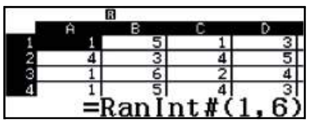


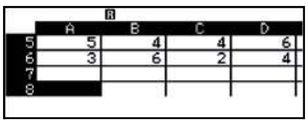
"Simulaciones de 9 a 12"



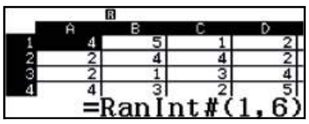


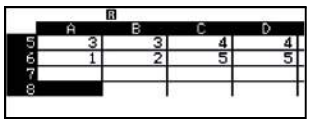
"Simulaciones de 13 a 16"





"Simulaciones de 17 a 20"



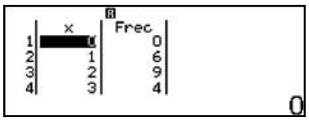


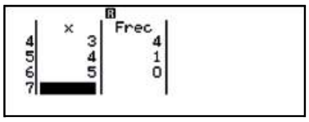
La caza de patos

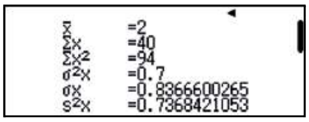
En la tabla se recoge el número de patos que sobreviven en cada tanda de disparos:

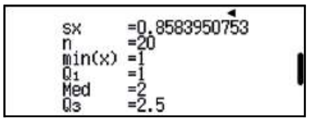
	Nº de pato disparado																			
nº tanda/ nº cazador	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	5	6	2	6	5	1	4	6	6	4	5	2	1	5	1	3	4	5	1	2
2	3	1	1	5	2	2	1	1	6	4	3	4	4	3	4	5	2	4	4	2
3	2	4	1	3	6	6	2	3	1	4	5	4	1	6	2	4	2	1	3	4
4	1	2	2	4	6	3	5	1	1	4	6	3	1	5	4	3	4	3	2	5
5	2	3	2	3	6	3	4	2	6	3	1	5	5	4	4	6	3	3	4	4
6	2	4	5	1	3	2	3	1	1	5	4	4	3	6	2	4	1	2	5	5
nº de patos vivos	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**2**	**1**	**2**	**4**	**3**	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**	**2**	**2**	**1**	**1**	**3**

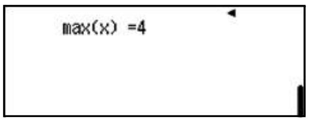
En el menú *Estadística* se introduce la frecuencia del número de patos que sobreviven en cada tanda de disparos:





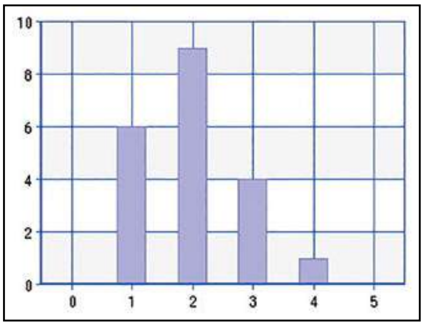






Se observa que la media, la mediana y la moda de patos que sobreviven es 2.

Con el código *QR* se representa el diagrama de barras de las frecuencias:



2

Se asignan probabilidades a partir de los datos obtenidos en la simulación, siendo x el número de patos vivos:

a) P(*no se salve ningún pato*) $= P(x = 0) = 0$

b) P(*se salve un pato*) $= P(x = 1) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

c) P(*se salven dos patos*) $= P(x = 2) = \frac{9}{20} = 0{,}45$

P(*se salven tres patos*) $= P(x = 3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}20$

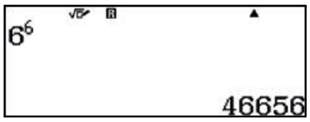
P(*se salven cuatro patos*) $= P(x = 4) = \frac{1}{20} = 0{,}05$

P(*se salven cinco patos*) $= P(x = 5) = 0$

Ampliación

1 Calcula, teóricamente, las probabilidades del **apartado 2**.

Los casos posibles del experimento son:

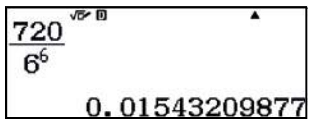


Los casos favorables al número de patos que sobreviven en cada tanda de disparos se recogen en la siguiente tabla, en la que cada letra representa un pato distinto:

x patos vivos	Tipo	Casos favorables
0	abcdef	$P_6 = 6!$
1	aabcde	$6 \cdot C_{5,4} \cdot P_6^2$
2	aaabcd	$6 \cdot C_{5,3} \cdot P_6^3$
	aabbcd	$C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot P_6^{2,2}$
3	aaaabc	$6 \cdot C_{5,2} \cdot P_6^4$
	aaabbc	$6 \cdot 5 \cdot C_{4,1} \cdot P_6^{3,2}$
	aabbcc	$C_{6,3} \cdot P_6^{2,2,2}$
4	aaaaab	$6 \cdot C_{5,1} \cdot P_6^5$
	aaaabb	$6 \cdot 5 \cdot P_6^{4,2}$
	aaabbb	$C_{6,2} \cdot P_6^{3,3}$
5	aaaaaa	6

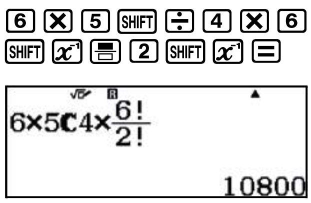
a) Los casos favorables para $x = 0$ son 720. La probabilidad de que *no se salve ningún pato* es:

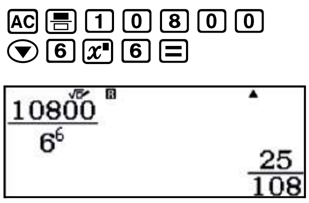
$$P(x = 0) = \frac{720}{6^6} = \frac{5}{324} \approx 0{,}015$$

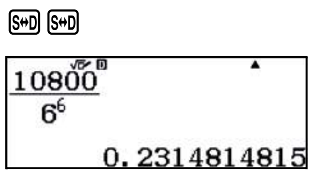


b) Los casos favorables para $x = 1$ son 10 800. La probabilidad de que *se salve un pato* es:

$$P(x = 1) = \frac{10\,800}{6^6} = \frac{25}{108} \approx 0{,}231$$







La caza de patos

c) Los casos favorables para x = 2 son 23 400. La probabilidad de que *se salven dos patos* es:

$$P(x = 2) = \frac{23\,400}{6^6} = \frac{325}{648} \approx 0{,}502$$

$6\times 5C3\times\frac{6!}{3!}$ → 7200

$6C2\times 4C2\times\frac{6!}{2!\times 2!}$ → 16200

$\frac{7200+16200}{6^6}$ → $\frac{325}{648}$

$\frac{7200+16200}{6^6}$ → 0.5015432099

d) Los casos favorables para x = 3 son 10 800. La probabilidad de que *se salven tres patos* es:

$$P(x = 3) = \frac{10\,800}{6^6} = \frac{25}{108} \approx 0{,}231$$

$6\times 5C2\times\frac{6!}{4!}$ → 1800

$6\times 5\times 4C1\times\frac{6!}{3!\times 2!}$ → 7200

$6C3\times\frac{6!}{2!\times 2!\times 2!}$ → 1800

$\frac{1800+7200+1800}{6^6}$ → $\frac{25}{108}$

$\frac{1800+7200+1800}{6^6}$ → 0.2314814815

e) Los casos favorables para x = 4 son 930. La probabilidad de que *se salven cuatro patos* es:

$$P(x = 4) = \frac{930}{6^6} = \frac{155}{7\,776} \approx 0{,}020$$

$6\times 5C1\times\frac{6!}{5!}$ → 180

$6\times 5\times\frac{6!}{4!\times 2!}$ → 450

$6C2\times\frac{6!}{3!\times 3!}$ → 300

$180+450+300$ → 930

$\frac{930}{6^6}$ → $\frac{155}{7776}$

$\frac{930}{6^6}$ → 0.01993312757

f) Los casos favorables para x = 5 son 6. La probabilidad de que *se salven cinco patos* es:

$$P(x = 5) = \frac{6}{6^6} = \frac{1}{7\,776} \approx 0{,}0001$$

$\frac{6}{6^6}$ → $\frac{1}{7776}$

$\frac{6}{6^6}$ → 0.00012860082

2 Calcula el número de patos que se espera que sobrevivan a los disparos de los cazadores en cada tanda.

La media se calcula en el menú *Estadística*:

	x	Frec
1	0	720
2	1	10800
3	2	23400
4	3	10800

	x	Frec
4	3	10800
5	4	930
6	5	6
7		

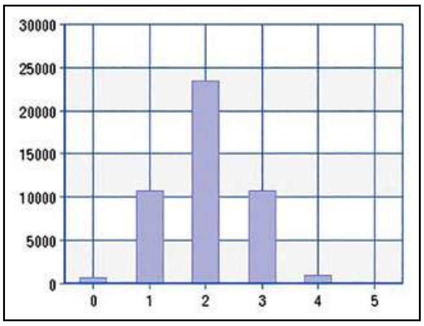
$\bar{x}$ =2.00938786
Σx =93750
Σx^2 =216630
$\sigma^2 x$ =0.6054931438
σx =0.7781343996
$s^2 x$ =0.6055061219

Por tanto, la media es $\bar{x}$ = 2,00938786.

La caza de patos

Con el código *QR* se representa el diagrama de barras del experimento:

1/1

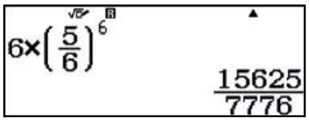


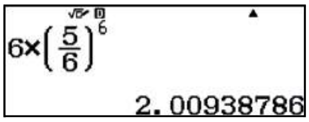
En general, se cumple que para n cazadores y p patos, la media de los patos que sobreviven es:

$$p \cdot \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

La media de patos que sobreviven para 6 cazadores y 6 patos es:

$$\overline{x} = 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6:$$





La media de patos que sobreviven para 10 cazadores y 10 patos es:

$$10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 3{,}487$$

Nota

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, factorial de un número.

$P_n = n!$, número de permutaciones.

$P_n^{r,s,t} = \left(\frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t!}\right)$, permutaciones con repetición de n elementos en los que tres elementos se repiten r, s, t, veces respectivamente.

$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{n!}{m!(m-n)!}$, combinaciones de m elementos tomados de n en n.

$CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \left(\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}\right)$, combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.

B$1

f_i

$F_i = f_i + F_{i-1}$

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 13;\ R(x) = 22$

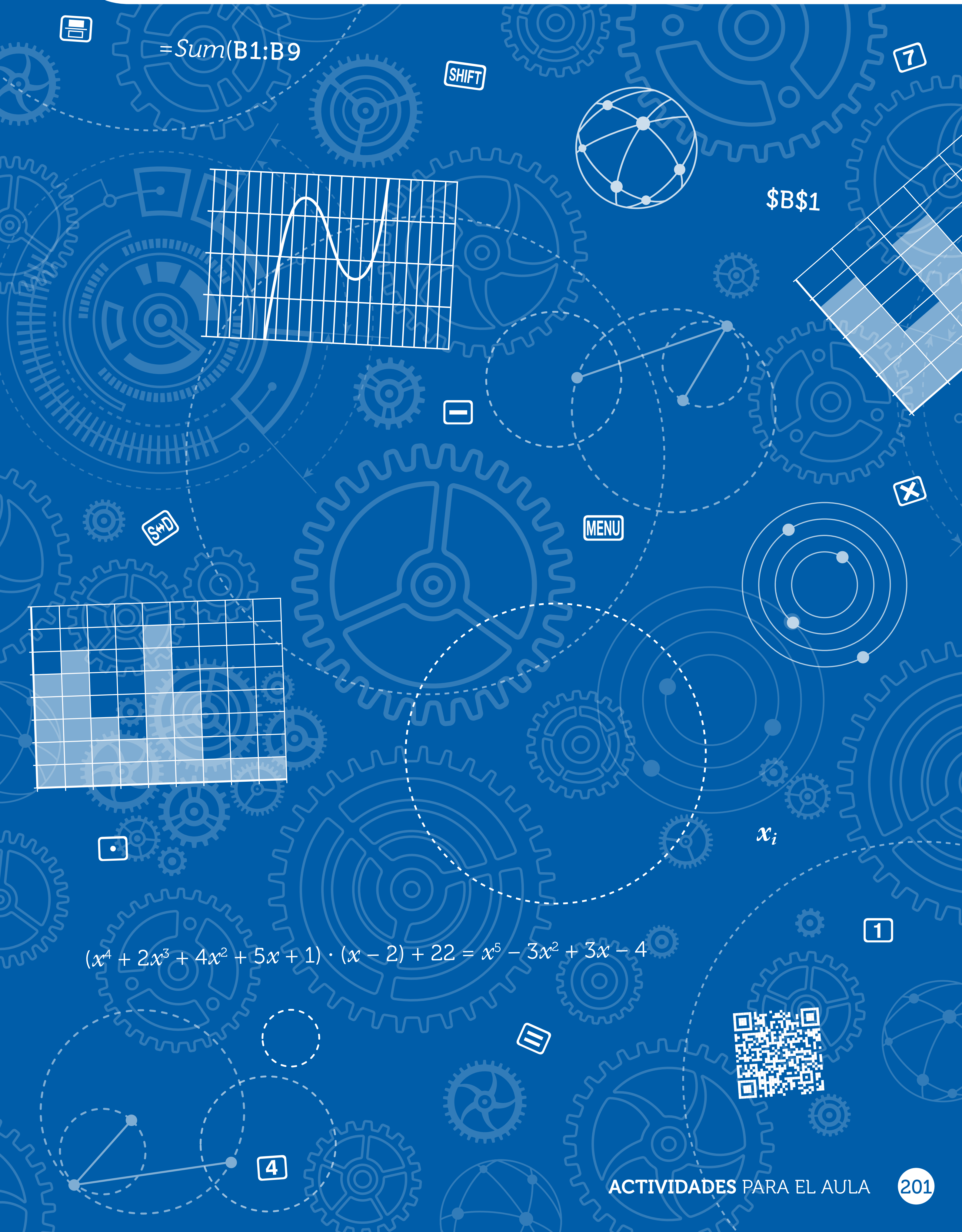
h_i

CASIO EDU+

$B1

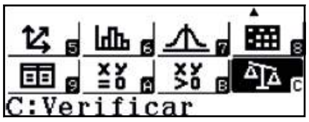
$y = 2x^3 - x^2 - 29x + 28$

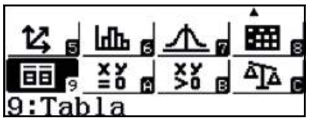
ANEXO

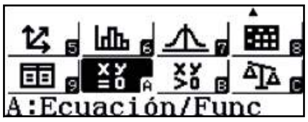

=Sum(B1:B9
SHIFT
7
B1
MENU
x_i
1
4
$(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1) \cdot (x - 2) + 22 = x^5 - 3x^2 + 3x - 4$

Las aplicaciones *Tabla, Verificar* y *Ecuación/Función*

Las nuevas calculadoras ClassWiz disponen de varios menús que facilitan el estudio de los polinomios. Se trata de los menús *Verificar*, *Tabla* y *Ecuación/Función*.







El menú *Verificar*, por ejemplo, permite comprobar de manera sencilla el resultado de una división polinómica, relacionando dividendo, divisor, cociente y resto, lo que será de gran utilidad en cursos posteriores.

Los menús *Ecuación/Función* y *Tabla* propician que el tiempo que tradicionalmente se destina a encontrar las raíces enteras de un polinomio entre el conjunto de raíces enteras posibles, se pueda dedicar a ampliar el cálculo a las raíces reales, así como a obtener la relación que existe entre estas raíces y los puntos de corte con el eje de abscisas de la función polinómica asociada. La posibilidad de analizar gráficamente a través del código *QR* de la ClassWiz y de la aplicación CASIO EDU+ dicha relación favorece el aprendizaje significativo y permite poner en contexto teoremas como el de Bolzano o el del valor medio, que se estudiarán en cursos posteriores.

A continuación se plantean algunas actividades pensadas para que los estudiantes descubran la relación entre las raíces de un polinomio, las soluciones de las ecuaciones asociadas a dicho polinomio y los puntos de corte con el eje de abscisas de la función asociada a partir de su gráfica.

Se recomienda que los estudiantes realicen las actividades propuestas utilizando los menús: *Verificar*, *Ecuación/Función* y *Tabla*; así como el análisis de las funciones polinómicas en la aplicación CASIO EDU+.

Divide $(x^5 - 3x^2 + 3x - 4) : (x - 2)$ por el método de Ruffini. Comprueba tus resultados con la calculadora.

Paolo Ruffini (1765–1822) fue un matemático italiano que estableció un método breve para dividir polinomios cuando el divisor es un binomio de la forma $x - a$.

Al realizar la división por el método de Ruffini se obtiene:

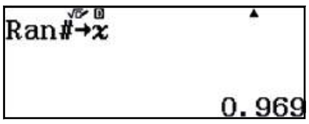
$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 13$; $R(x) = 22$

Para comprobar la veracidad del resultado, se puede utilizar el menú *Verificar*. Hay que tener en cuenta que la comparación que realiza dicho menú no es algebraica, sinó numérica. Es decir, se compara el valor numérico de los dos miembros de la igualdad en función de cuál sea el valor almacenado en la calculadora, en ese momento, para la variable x.

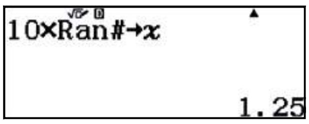
Para comprobar que $(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 1) \cdot (x - 2) + 22 = x^5 - 3x^2 + 3x - 4$ para cualquier valor que tome x, se puede asignar un valor aleatorio a dicha variable. Para ello, se pueden usar las funciones *Ran#* y *RanInt#*.

A continuación se muestran algunos ejemplos de como asignar un valor arbitrario a x:

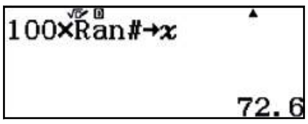
Un número decimal menor que 1



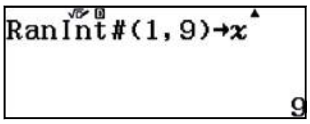
Un número decimal entre 1 y 10



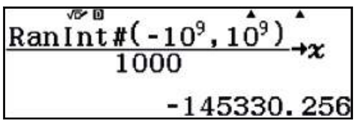
Un número decimal entre 1 y 100



Un número natural entre 1 y 9

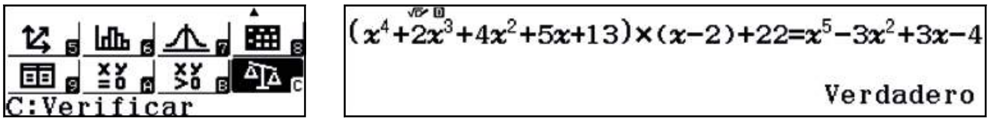


Se puede asignar un valor más arbitrario, ampliando el rango de los valores obtenidos mediante *RanInt#* y con tres cifras decimales:



Las aplicaciones *Tabla, Verificar* y *Ecuación/Función*

Una vez se ha introducido un valor aleatorio en la variable x, se puede hacer uso del menú *Verificar* para comprobar que se verifica la prueba de la división.

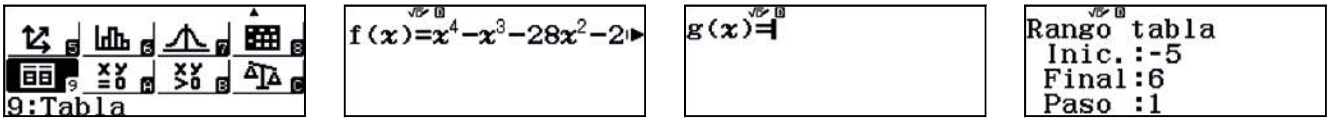


Hay que tener en cuenta que el signo «=» del menú *Verificar* se obtiene pulsando la combinación de teclas ALPHA CALC.

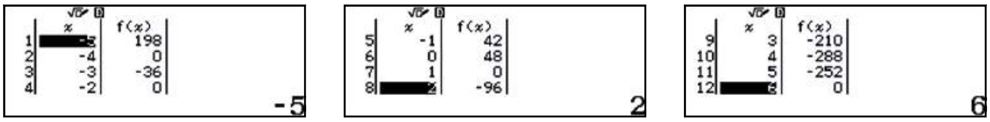
Halla las raíces enteras del polinomio $x^4 - x^3 - 28x^2 - 20x + 48$

Se puede utilizar el menú *Tabla* para localizar las raíces enteras. La aplicación requiere que se introduzca una expresión algebraica para una función $f(x)$ y otra para una segunda función $g(x)$:

MENU 9



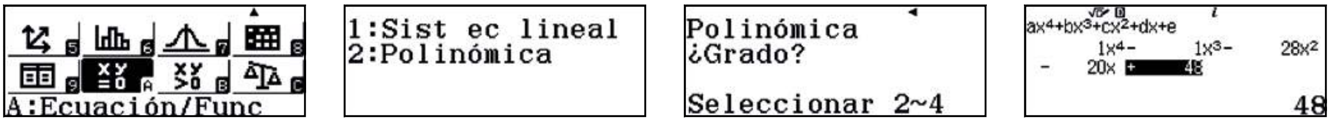
Como solo interesa estudiar las raíces de un polinomio, se introduce la expresión del polinomio a analizar en $f(x)$ y se ignora $g(x)$. Se obtiene, asi, una tabla de valores en la que pueden localizarse los ceros de la función:



Se observan cuatro raíces del polinomio: 6, −4, −2, 1

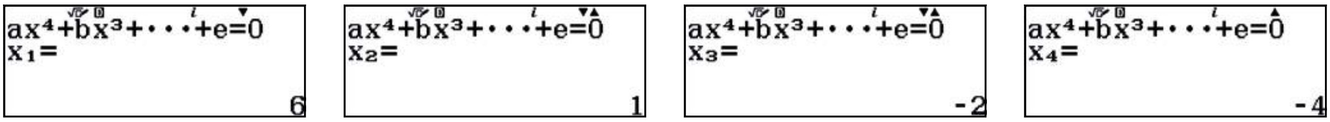
Las raíces de un polinomio de grado 4 pueden hallarse también mediante el menú *Ecuación/Función*, seleccionando la opción *2:Polinómica*:

MENU 9 2 4



Las soluciones de la ecuación resultan ser las que se indican a continuación:

= = = =



Esta actividad pretende que los estudiantes puedan deducir que las raíces son divisores del término independiente y que a partir de estas se puede factorizar el polinomio. La comprobación de la factorización se puede realizar con el menú *Verificar* y ajustarla en el caso de coeficiente principal distinto de la unidad.

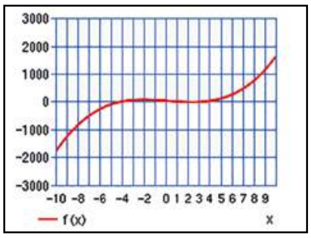
¿En qué puntos corta $y = 2x^3 - x^2 - 29x + 28$ al eje *OX*?

Para responder a esta pregunta, se puede representar la función. Se introduce la expresión de la función en el menú *Tabla*:

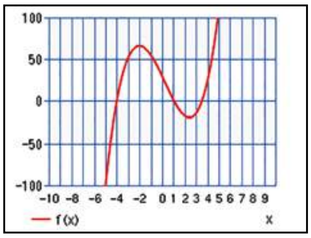
MENU 9

Una vez obtenida la tabla de valores, se genera un código *QR* mediante la combinación de teclas SHIFT OPTN.

La gráfica de la función se visualiza al capturar el código *QR* con la aplicación CASIO EDU⁺:



Para apreciar bien los puntos de corte con el eje *OX* es necesario cambiar la escala de la gráfica:

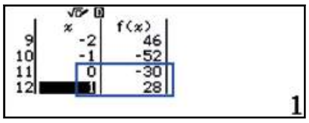


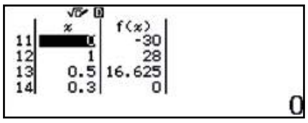
Al hacerlo, se observan los puntos de corte con el eje *OX*: (–4, 0); (1, 0) y (3.5, 0).

Explica detalladamente cómo se pueden obtener las raíces de la ecuación $10x^5 - 3x^4 - 70x^3 + 21x^2 + 100x - 30 = 0$

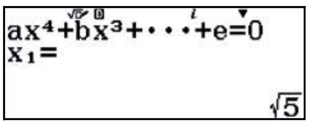
Las soluciones de esta ecuación no son enteras. Para obtener la primera solución se puede utilizar la iteración desde el menú *Tabla*.

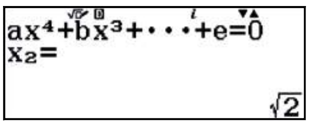
Una vez obtenida la primera solución, se puede utilizar el menú *Ecuación/Función* para calcular el resto, dado que resulta una ecuación de grado cuatro, que contrariamente a la de grado 5, sí se puede resolver mediante la calculadora.

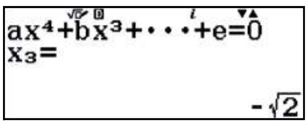


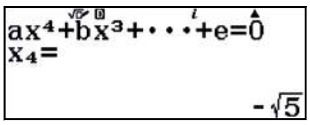


$$10x^5 - 3x^4 - 70x^3 + 21x^2 + 100x - 30 = (x - 0{,}3)(10x^4 - 70x^2 + 100) = 0$$

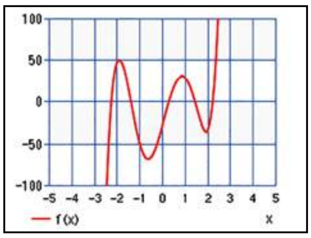






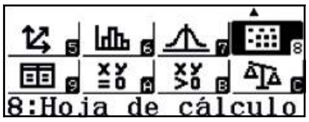


Como se observa, las soluciones de la ecuación son: 0.3; $-\sqrt{5}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.



La aplicación *Hoja de cálculo*

La hoja de cálculo es una herramienta habitual en las aulas y nadie duda de la ventaja que supone su uso a la hora de evitar la realización de cálculos tediosos y repetitivos. Una de las ventajas de usar la hoja de cálculo es la posibilidad de estudiar de forma rápida el efecto que tiene la variación de algún parámetro sobre los cálculos realizados, lo que facilita la adquisición de conceptos que de otro modo requerirían un tiempo del cual no se suele disponer.



En las páginas que siguen se desarrollan diversas explicaciones básicas sobre la aplicación *Hoja de cálculo* para resolver actividades de estadística.

Tradicionalmente el aprendizaje de los conceptos estadísticos se realiza con ejercicios y actividades donde, a cambio de obtener información de un conjunto de datos, se realizan muchos cálculos repetitivos. En las siguientes actividades se muestra como la hoja de cálculo permite que el alumno se centre en *cómo se hacen las cosas*, liberándose de las tareas de cálculo.

Se debe prestar atención en no cambiar de menú ni apagar la calculadora mientras se usa la hoja de cálculo, ya que se perderán los datos introducidos, debiendo empezar de nuevo todo el proceso.

A continuación se muestran las notas que han obtenido 28 alumnos en el último examen de Matemáticas del curso:

5 6 3 8 4 2 9 6 4 6 5 7 5 8 1 3 5 4 6 5 4 5 7 9 4 6 5 4

¿Cómo se puede construir la tabla de frecuencias?

La hoja de cálculo permite construir de forma cómoda la tabla de frecuencias correspondiente. Como se observa, las filas aparecen numeradas, y las columnas, designadas mediante letras. De esta forma, la celda que aparece en negrita se designa como B2.

	A	B	C	D	E
	x_i	f_i			
1	1	1			
2	2	**1**			
3	3	2			
4	4	6			
5	5	7			
6	6	5			
7	7	2			
8	8	2			
9	9	2			
10					

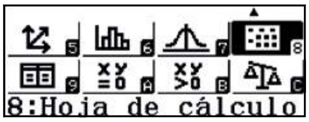
Esta es la celda *D6*

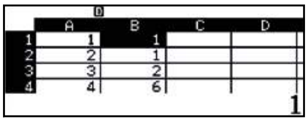
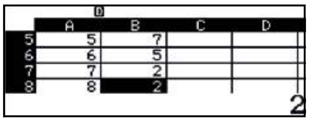
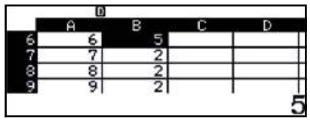
Para completar la fila de las frecuencias absolutas es preciso realizar un recuento de los datos. Una vez completado dicho recuento, se procede a introducir los datos en la calculadora. La aplicación solo permite introducir números y fórmulas, por lo que no se incluyen las cabeceras que aparecen en la figura superior.

La aplicación *Hoja de cálculo*

Se accede a la hoja de cálculo mediante las teclas [MENU] [8]. Una vez dentro, se introducen los valores de la tabla de frecuencias, primero los de la columna x_i y, a continuación, los de la columna f_i.

[MENU] [8]



Para obtener el número total de datos, se suman todas las frecuencias absolutas. Para ello se ha de utilizar la misma sintaxis que en cualquier otra hoja de cálculo.

B1:B9 Indica todas las celdas que se van a sumar. El signo «:» se utiliza de separador entre la primera y la última celda.

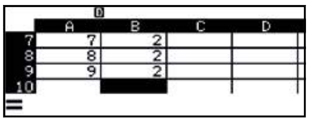
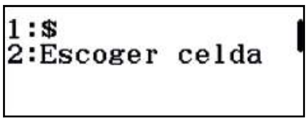
El signo «=» indica que lo que viene a continuación es una fórmula, que se recalculará cada vez que haya algún cambio en el contenido de las celdas.

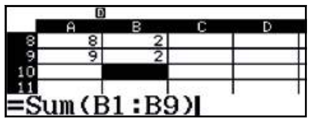
=*Sum*(B1:B9)

Se accede a las funciones disponibles mediante la tecla [OPTN].

En la calculadora se ha de proceder de la siguiente manera:

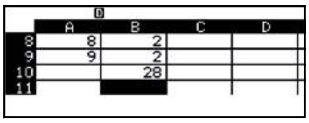
[ALPHA] [CALC] [OPTN] [▼] [4] [ALPHA] [,] [1] [ALPHA] [:] [ALPHA] [,] [9] [)]



Cabe destacar que para introducir el signo «=» se ha usado la combinación de teclas [ALPHA] [CALC], mientras que para introducir el signo «:», se ha usado [ALPHA] [:].

Una vez presionado el signo igual se obtiene el total de datos:



¿Cuántos alumnos tienen una calificación de notable?

Para calcular el número de alumnos que obtienen una calificación de notable, se suman las dos frecuencias absolutas que corresponden a los valores 7 y 8 de la variable. En este caso resulta ser de cuatro alumnos.

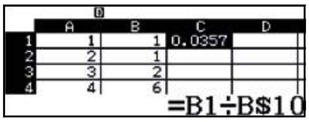
¿Qué proporción de alumnos tienen un cuatro?

Para responder esta cuestión se necesita calcular la razón entre el número de alumnos que han obtenido un cuatro y el total de alumnos:

$$\frac{6}{28} = \frac{3}{14} \cong 0{,}214$$

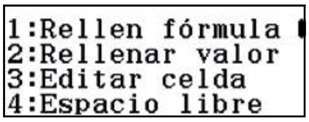
El hecho de disponer de una hoja de cálculo permite ampliar el cálculo a todos los valores de la variable. Como se acaba de ver, para calcular la proporción se ha dividido la frecuencia absoluta del valor de la variable entre el total de datos de los que se dispone. Es decir, se ha calculado la frecuencia relativa (h_i) para el valor de la variable $x_i = 4$. Para extender este cálculo a todos los valores de la variable se empieza por realizar la operación para el primero de estos valores, con lo que en la celda C1 se escribe =B1÷B$10. Para escribir el símbolo $ es necesario utilizar la combinación de teclas [OPTN] [▼] [▼] [1].

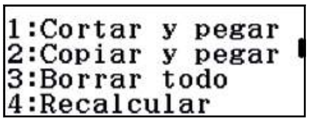
ALPHA ,,, 1 ALPHA ⊟ ALPHA ,,, 1 0 OPTN 1

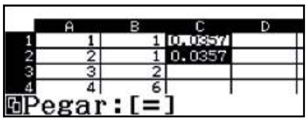


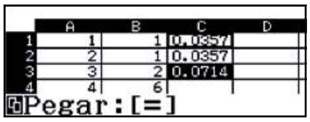
A continuación, se coloca el cursor sobre la casilla C1, y con la secuencia de teclas OPTN ▼ 2, se elige la opción *Copiar y pegar*. Seguidamente, se coloca el cursor en la celda donde se quiere pegar la fórmula y se presiona la tecla =.

OPTN ▼ — 2 — ▼ = — ▼ =

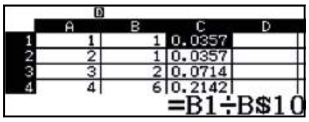


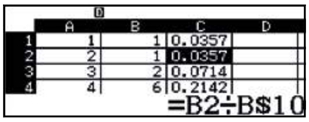


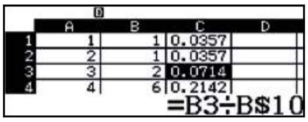


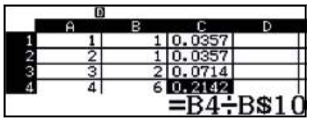


Una vez concluido el proceso, al situar el cursor sobre las celdas, en la parte inferior de la pantalla aparecen las fórmulas correspondientes, lo que muestra la utilidad del símbolo $.



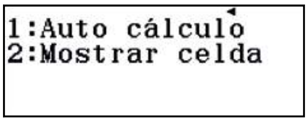


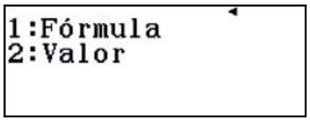




Al situarse sobre una celda de la hoja de cálculo puede aparecer el *Valor numérico* o la *Fórmula* que contiene, según se desee. Basta con acceder a la configuración de la calculadora, tal y como se indica a continuación, para decidir qué se visualiza.

ALPHA MENU ▼ — 4 — 2





El símbolo «$» sirve para fijar la referencia de una fórmula situada detrás de dicho símbolo. Por ejemplo:

$B1. Fija la columna. Se utiliza cuando se quiere fijar una celda al pegar horizontalmente.

B$1. Fija la fila. Se utiliza cuando se quiere fijar una celda al pegar verticalmente.

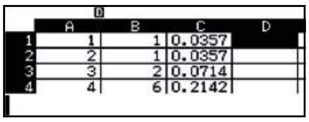
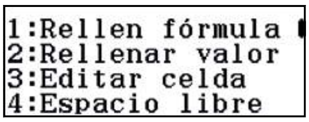
B1. Fija la columna y la fila, se utiliza cuando se quiere fijar una celda al pegar en cualquier dirección.

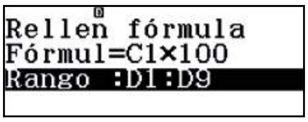
¿Qué porcentaje de alumnos ha obtenido un sobresaliente?

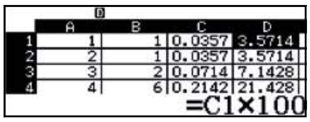
Es posible completar una nueva columna con el porcentaje de alumnos que han obtenido cada una de las notas. En este caso interesa conocer el porcentaje asociado a $x_i = 9$. Para ello, hay que hacer uso de la columna con las frecuencias relativas que se acaba de rellenar. Los valores de las celdas de la nueva columna serán el resultado de multiplicar por cien la correspondiente celda de la frecuencia relativa. Se puede proceder como se ha hecho anteriormente y definir la fórmula en la primera celda de la columna, para después copiarla en las celdas de esa misma columna que se desee.

Otra manera de proceder consiste en hacer uso de la opción *Rellenar fórmula*, a la que se accede como se indica a continuación:

OPTN — 1 — ALPHA — ALPHA $x^{\square}$ 1 × 1 0 0





Observando la tabla se deduce que solo el 7,14 % de los alumnos ha obtenido un sobresaliente.

La aplicación *Hoja de cálculo*

¿Cuántos alumnos han suspendido?

Para responder a esta pregunta se utiliza la frecuencia absoluta acumulada, F_i, que no es más que la suma de todas las frecuencias absolutas correspondientes a los valores de la variable estadística que son menores que el valor elegido (en este caso, hay que considerar $x_i = 4$). Se trata, entonces, de sumar las frecuencias absolutas correspondientes a $x_i = 1, 2, 3$ y 4, resultando $1 + 1 + 2 + 6 = 10$.

Para construir la columna de frecuencias absolutas acumuladas se tiene que tener en cuenta dos propiedades de las mismas:

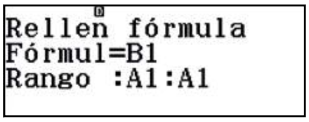
1. $F_1 = f_1$. Lógicamente, la primera frecuencia absoluta acumulada coincide con la frecuencia absoluta sin acumular, ya que no existen valores anteriores y, en consecuencia, no hay nada que sumar.
2. $F_i = f_i + F_{i-1}$. Dicho de forma más comprensible, no es necesario sumar desde el primer valor todas las frecuencias absolutas cada vez que se calcula una frecuencia acumulada, ya que todos esos valores, salvo el último, se encuentran ya acumulados en la frecuencia absoluta acumulada anterior.

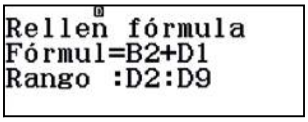
Por ejemplo, la frecuencia absoluta acumulada para $x_i = 7$ es $1 + 1 + 2 + 6 + 7 + 5 + 2 = 24$, pero también se puede obtener haciendo $2 + 22$.

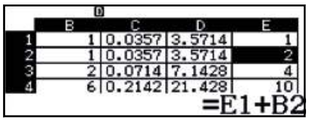
La tabla completa queda como sigue:

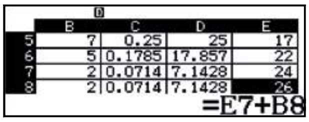
	A	*B*	*C*	*D*	*D*
	x_i	f_i	h_i	%	F_i
1	1	1	0,036	3,6	1
2	2	1	0,036	3,6	2
3	3	2	0,071	7,1	4
4	4	6	0,214	21,4	10
5	5	7	0,25	25	17
6	6	5	0,179	17,9	22
7	7	2	0,071	7,1	24
8	8	2	0,071	7,1	26
9	9	2	0,071	7,1	28
10		28			

Para completar, en la calculadora, la columna con las frecuencias absolutas acumuladas se procede introduciendo en E1 la fórmula =B1 y en E2 la fórmula =B2+D1, extendiéndolas al rango deseado:









La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*

La aplicación CASIO EDU+[1] favorece el trabajo colaborativo y cooperativo, pero para que el uso de esta aplicación resulte de provecho es recomendable planificar previamente la actividad que se va a desarrollar.

En primer lugar, se tiene que crear una clase[2], lo que se puede hacer de dos formas:

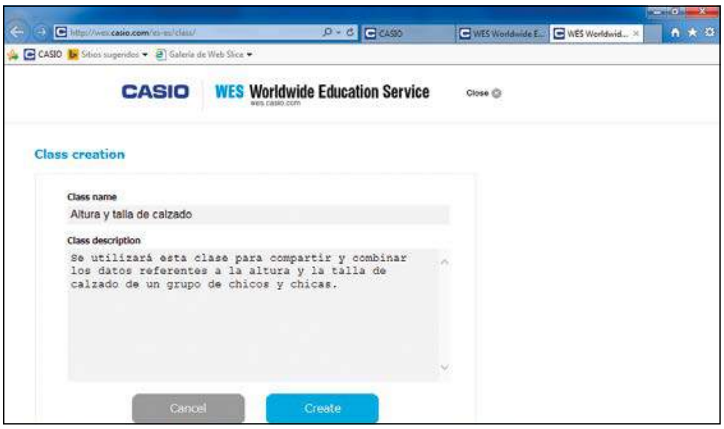
a) Desde un dispositivo móvil

Se accede a la aplicación tocando el icono CASIO EDU+, a continuación se selecciona *Clase* y se toca el símbolo +, situado en la parte superior derecha de la pantalla, para crear una nueva clase. Seguidamente, se escribe el nombre de la clase y una breve descripción. A continuación, se selecciona *Crear*.

b) Desde la página http://wes.casio.com/es-es/class/

Se accede a la web http://wes.casio.com/es-es/class/ y se escribe el nombre de la clase y una breve descripción. Finalmente, se pulsa *Crear*.

Cabe señalar que algunos navegadores, como Google Chrome, pueden dar problemas a la hora de mostrar los contenidos compartidos en la clase.



[1] En el siguiente enlace se puede consultar todo lo necesario acerca de la aplicación CASIO EDU+: http://wes.casio.com/es-es/education/extension/casioeduplus/#casioeduplus03

[2] Una clase es una página que se puede utilizar para ver y gestionar los gráficos y tablas correspondientes a los códigos *QR* escaneados. Al comparar o combinar varios conjuntos de datos en la clase, es posible visualizar en una pantalla las actividades de los estudiantes, o mostrar y comparar los resultados del trabajo en grupo.

La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*

La clase[3] que se acaba de crear aparecerá de la siguiente forma:

Tras la creación de la clase, los estudiantes deben añadirse a la misma, de manera que puedan compartir y combinar datos y gráficos. Lo pueden hacer de tres formas distintas:

a) Escaneando el código *QR*

Al crear la clase, se genera automáticamente un código *QR* que la identifica. Para que se muestre en el navegador, hay que pulsar sobre el icono que aparece al lado del nombre de la clase.

A continuación, cada estudiante debe abrir en su dispositivo móvil la aplicación CASIO EDU+, seleccionar la opción *Clase* y, seguidamente, tocar sobre *Digitalizar el QR Code de clase*.

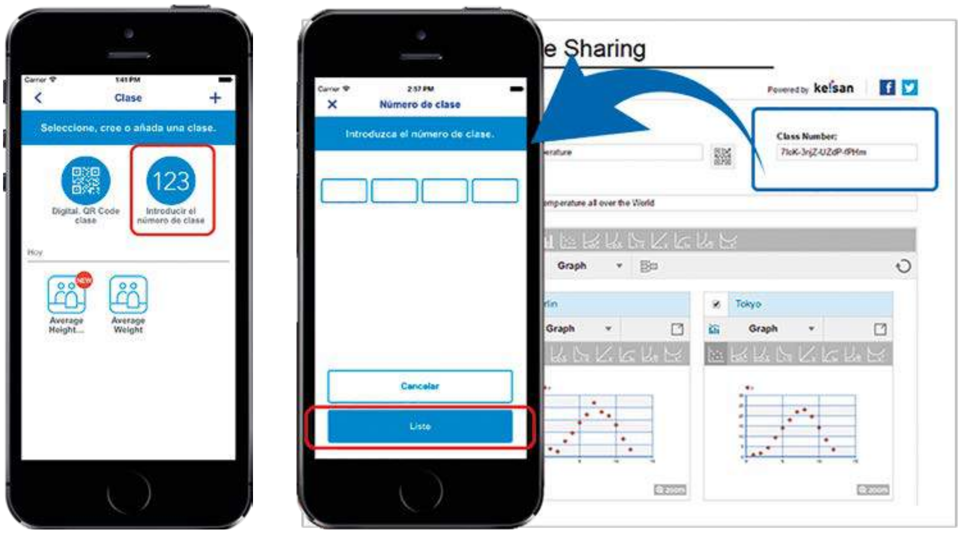
Para terminar, una vez se ha escaneado el código *QR* correctamente, se debe seleccionar *Guardar clase*.

[3] La Clase se eliminará si no se accede a ella en 1 año. Cada clase puede contener un máximo de 50 conjuntos de datos.

La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*

b) Introduciendo el *Número de Clase*

Cada alumno abre la aplicación CASIO EDU+ y selecciona la opción *Clase*, seguidamente selecciona *Introducir el número de clase* y escribe el número de clase que figura en el navegador, en este caso, tQeb-C02w-xixp-WDkJ. Finalmente, toca sobre *Listo*.



c) Accediendo a la URL de la clase

El profesor puede enviar la URL de la clase por correo electrónico, de modo que el alumno pueda acceder directamente a la clase. En este caso, se accede a la web desde la URL

http://wes.casio.com/class/tQeb-C02w-xixp-WDkJ

Hay que tener en cuenta que todos aquellos usuarios que hayan accedido a la clase pueden realizar modificaciones sobre la misma.

Realización de estudios estadísticos

La realización de cálculos estadísticos mediante la calculadora permite que el alumno centre su interés en la interpretación de los parámetros estadísticos y no en su cálculo. El menú *Estadística*, junto con la aplicación CASIO EDU+, permite que el alumno haga razonamientos estadísticos y tome decisiones sobre, por ejemplo, qué parámetros calcular y cómo interpretarlos. Y todo ello con la ayuda que presta la visualización de los correspondientes gráficos estadísticos, que pueden mostrarse individualmente o combinados para realizar el análisis estadístico por separado o conjuntamente.

Para analizar el funcionamiento de esta aplicación, se puede realizar un estudio estadístico sobre la altura y talla del calzado de los alumnos de una determinada clase, para lo que se tendrán que representar los datos y calcular los parámetros estadísticos correspondientes.

Tomemos, por ejemplo, los siguientes datos, correspondientes a un grupo de alumnos de edades similares:

Estudiante	Sexo	Altura (cm)	Talla calzado	Estudiante	Sexo	Altura (cm)	Talla calzado
1	H	180	45	16	M	153	37
2	H	173	43	17	M	159	36
3	H	173	41	18	M	153	37
4	H	176	41	19	M	162	37
5	H	191	47	20	M	167	36
6	H	193	46	21	M	157	38
7	H	172	41	22	M	159	36
8	H	173	43	23	M	165	37
9	H	174	43	24	M	168	38

La aplicación CASIO EDU⁺ y el menú *Estadística*

Estudiante	Sexo	Altura (cm)	Talla calzado	Estudiante	Sexo	Altura (cm)	Talla calzado
10	H	180	44	25	M	154	37
11	H	181	43	26	M	159	37
12	H	180	42	27	M	159	35
13	H	184	42	28	M	154	36
14	H	174	45	29	M	161	37
15	H	175	45	30	M	165	38

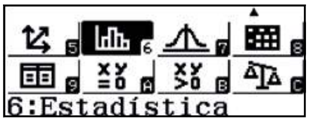
Para realizar el estudio estadístico, se pueden agrupar a los alumnos y distribuir las tareas de la siguiente forma:

Grupo 1	Altura chicos sin frecuencias
Grupo 2	Altura chicas sin frecuencias
Grupo 3	Altura sin frecuencias
Grupo 4	Altura chicos con frecuencias
Grupo 5	Altura chicas con frecuencias
Grupo 6	Altura con frecuencias
Grupo 7	Talla calzado chicos sin frecuencias
Grupo 8	Talla calzado chicas sin frecuencias
Grupo 9	Talla calzado sin frecuencias
Grupo 10	Talla calzado chicos con frecuencias
Grupo 11	Talla calzado chicas con frecuencias
Grupo 12	Talla calzado con frecuencias

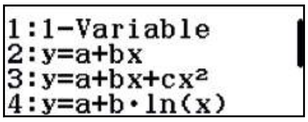
Representación de diagramas de caja y bigotes

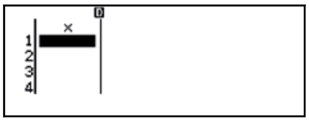
En este caso, se elige el modo *Estadística* y, seguidamente, se selecciona la opción 1: *1-variable*.

MENU 6



1



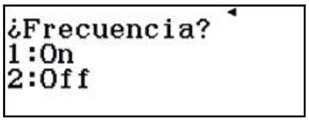


El desarrollo de esta actividad requiere que se introduzcan los datos con y sin frecuencias, con el fin de explorar todas las posibilidades que nos ofrece la calculadora en combinación con la aplicación CASIO EDU⁺.

Se pueden activar o desactivar las frecuencias de la tabla estadística en cualquier momento mediante la siguiente secuencia:

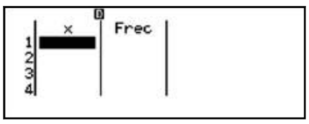
SHIFT MENU ▼

3

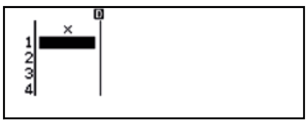


Al pulsar seleccionar 1, se activa la columna de las frecuencias, y al seleccionar 2, se desactiva.

1



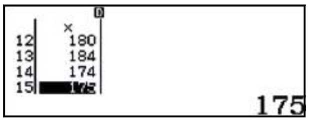
2



La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*

A continuación, cada grupo introduce en la calculadora, los datos de la altura o la talla del calzado que le han sido asignados en la distribución de tareas. Una vez completada la tabla, genera un código *QR*, lo escanea con la aplicación CASIO EDU+ y lo comparte con la clase creada anteriormente. Es importante que introduzca su alias y una breve descripción de los datos.

A continuación se muestra la tabla sin frecuencias con la altura de los chicos:



Desde esta ventana se genera un código *QR* mediante la secuencia de teclas SHIFT OPTN.

A continuación, se escanea el código que aparece en la pantalla siguiendo los siguientes pasos:

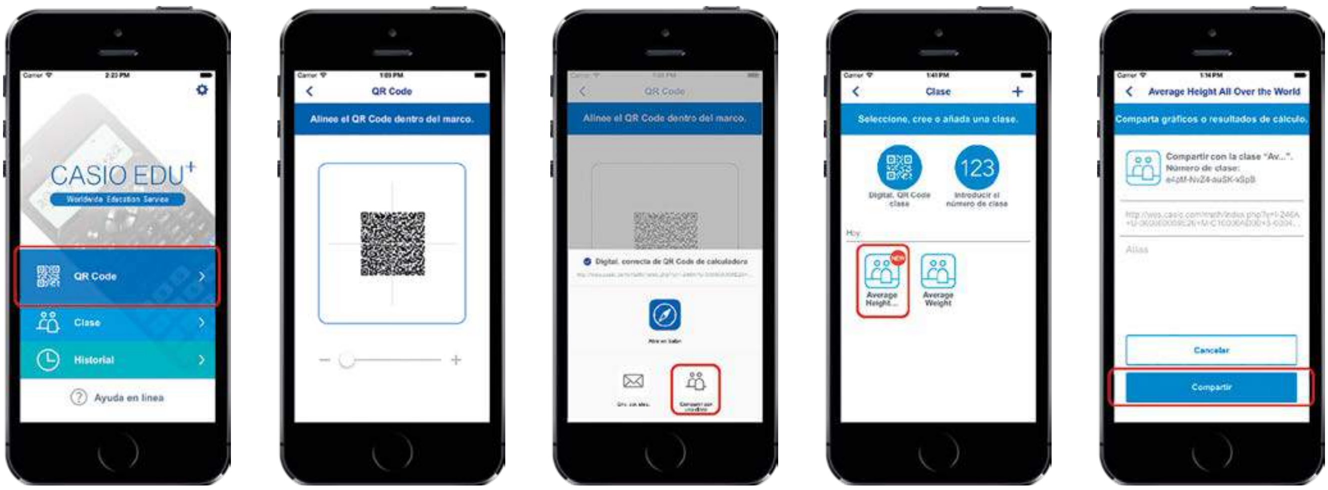
1. Se abre la aplicación CASIO EDU+ y se selecciona la opción *QR Code*.

2. Se escanea el *QR Code* de la ClassWiz.

3. Se selecciona la opción Compartir con una clase.

4. Se selecciona la clase a la que se desea añadir datos.

5. Se especifica un alias para identificar los datos del *QR Code* y, a continuación, se comparte con la clase.

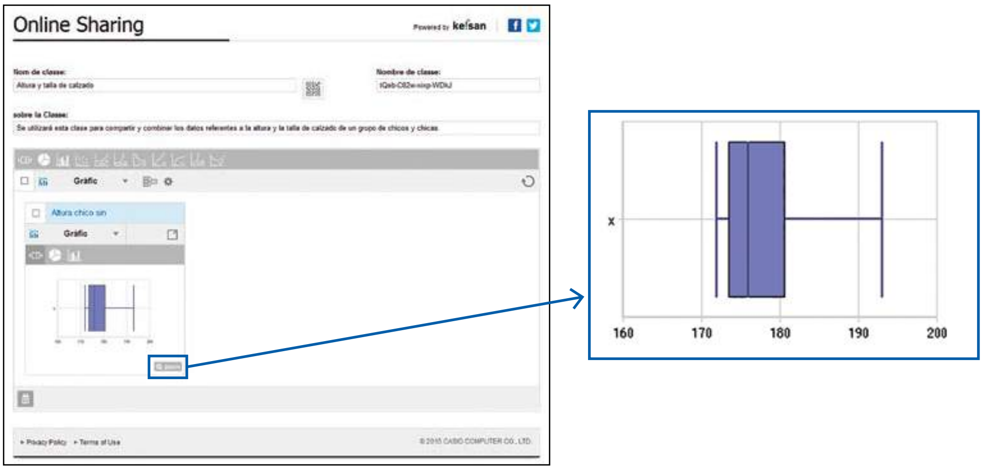


Otra manera de compartir datos con la clase consiste en entrar previamente en la clase creada y seleccionar la opción *Añadir gráficos y resultados de cálculo*. Se abrirá, así, una nueva ventana en la que se podrá escanear el código *QR*. Una vez escaneado, se abrirá una nueva ventana en la que se escribirá el alias; a continuación aparecerá un mensaje con dos opciones: *Abrir clase en Safari* (o en el Explorador) o *Digitalizar QR Code*.

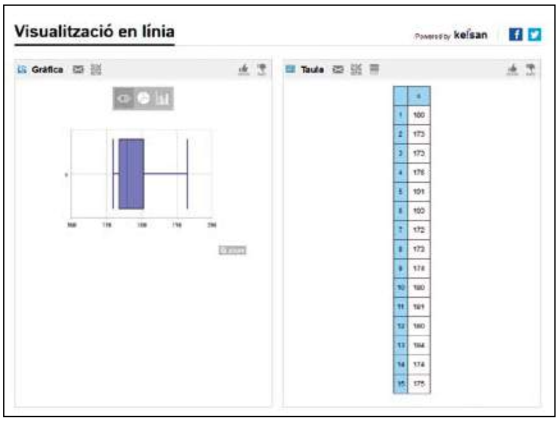
Si no se tiene que digitalizar más códigos, se accede a la clase para visualizar los gráficos o cálculos compartidos.

La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*

Se puede visualizar mejor el gráfico pulsando sobre zoom.



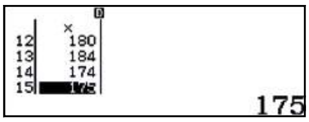
Pulsando sobre el icono, se visualiza el diagrama de caja y bigotes y la tabla de valores correspondiente:



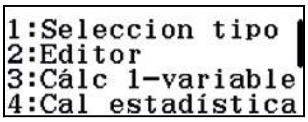
Cálculo de parámetros estadísticos

Una vez los grupos han compartido sus gráficos, pueden escanear los parámetros de su estadística. Para ello, primero hay que calcular los parámetros estadísticos, operando del siguiente modo:

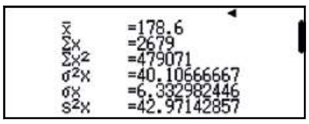
OPTN

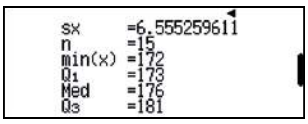


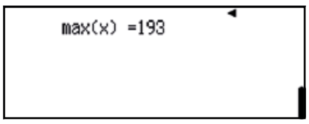
3



Se obtienen, entonces, los parámetros estadísticos:

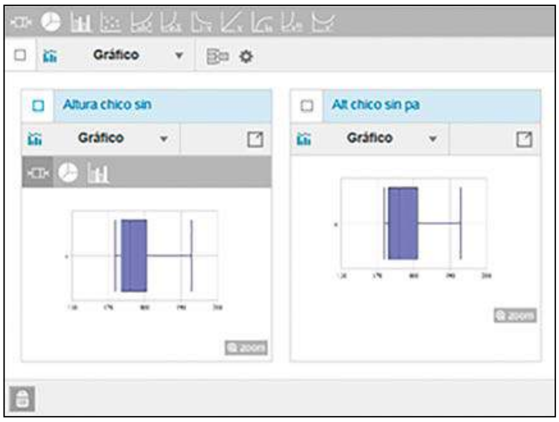


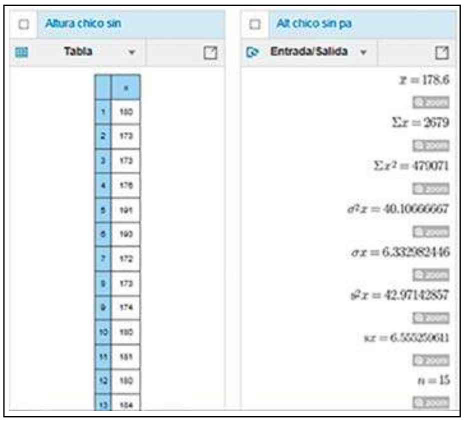




Una vez se tienen los parámetros en pantalla, se puede generar el código *QR* correspondiente, mediante la secuencia SHIFT OPTN. Tras compartirlos con la clase, se mostrarán en pantalla de la siguiente forma:

La aplicación CASIO EDU^{+} y el menú *Estadística*



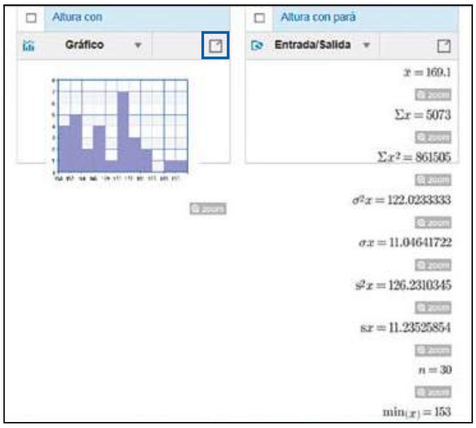


Representación de histogramas y diagramas de barras

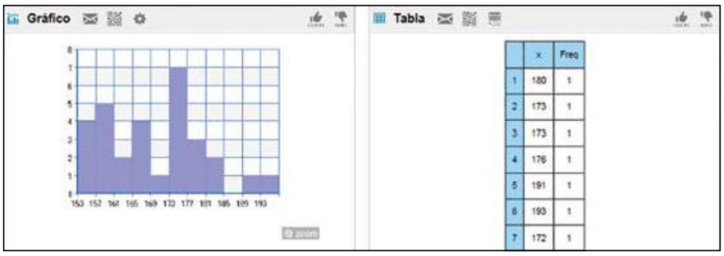
Para representar histogramas y diagramas de barras hay que introducir los datos en una tabla estadística con frecuencias.

- Si se genera el código *QR* desde la tabla de frecuencias, al escanearlo, se visualizará el histograma o el diagrama de barras junto con la tabla de frecuencias.
- Si se genera el código *QR* desde la ventana con los parámetros estadísticos, al escanearlo, se visualizarán los parámetros y el diagrama de caja y bigotes.

En el último caso, se visualiza exactamente lo mismo que si se escanean los parámetros estadísticos obtenidos a partir de una tabla sin frecuencias, pero no se podrán combinar los gráficos de cajas y bigotes.

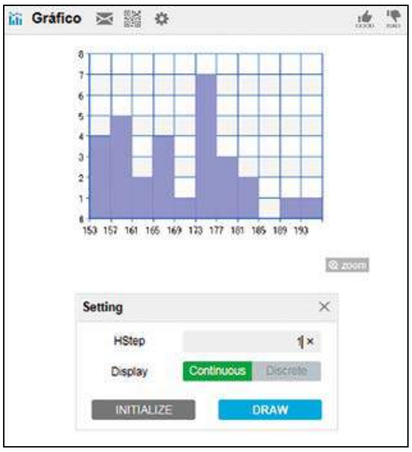


Al pulsar sobre el icono  se despliega el histograma y la tabla de valores.

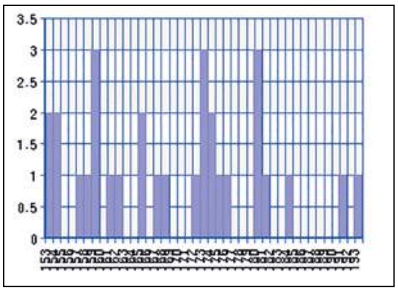


Pulsando sobre el icono de preferencias, se puede elegir la amplitud de los rectángulos y la visualización: discreta o continua, lo que permite representar diagramas de barras e histogramas, respectivamente.

La aplicación CASIO EDU+ y el menú *Estadística*



Pulsando sobre *zoom*, se abre el diagrama. En este caso, se ha elegido diagrama de barras, para que se muestre la moda.

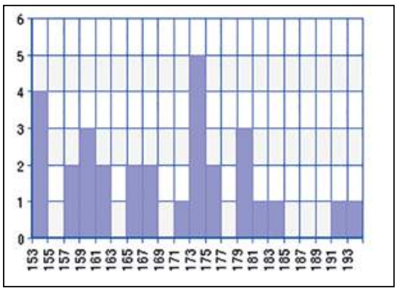


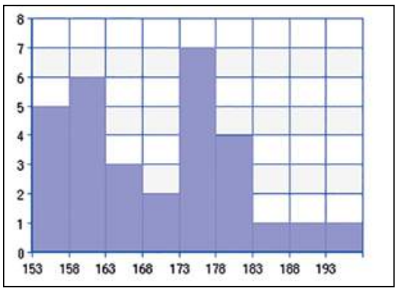
Comparación de gráficos estadísticos

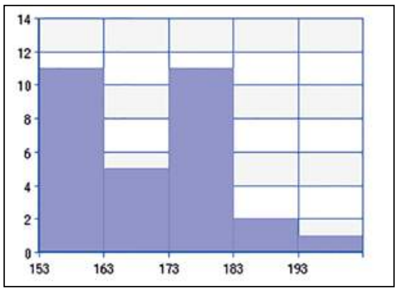
Para visualizar todos los gráficos y parámetros introducidos por cada grupo hay que refrescar la página, tocando en el icono . Una vez se han introducido todos los datos en la clase, es el momento de analizarlos.

Del cálculo de los parámetros de la variable altura se observa que la media es de 169,1 cm; la desviación típica, de 11,046 cm, y la mediana, de 170 cm. Se observa, además, que la distribución es multimodal (159, 173, 180) y que el 50 % de la clase está situada entre los 159 cm y los 176 cm.

Si se representan los datos en un histogramas de 2 cm en 2 cm, de 5 cm en 5 cm y de 10 cm en 10 cm, se observa que aunque los tres gráficos se parecen, es el segundo el que ofrece mayor información, porque aunque se observan dos grandes bloques de alturas, hay un intervalo sensiblemente superior al resto. Ahora bien, como hay dos bloques claramente diferenciados, cabe preguntarse si realmente los datos sobre la altura pertenecen a una sola población, es decir, si el sexo no influye en la altura, o si por el contrario se trata de dos poblaciones distintas y el sexo sí que influye.

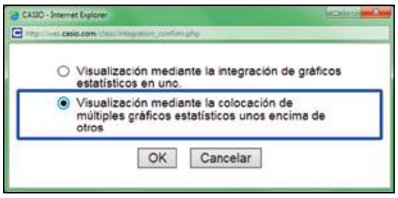


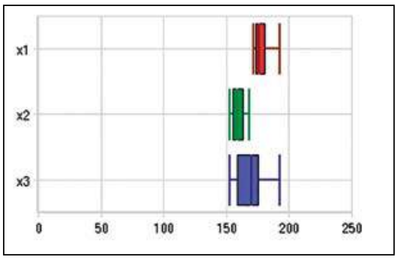


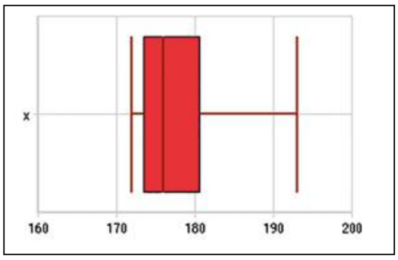


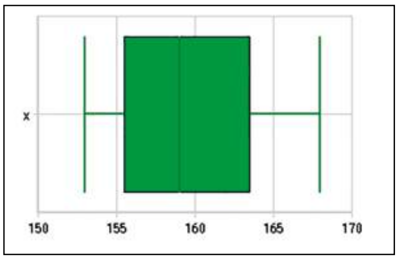
Para dar respuesta a esta cuestión, se puede utilizar la representación de caja y bigotes. Dado que la aplicación permite combinar gráficos, siempre que se hayan introducido de la misma forma, se pueden visualizar simultáneamente los diagramas de caja y bigotes de los chicos, las chicas y toda la población. Para hacerlo, hay que pulsar sobre el icono .

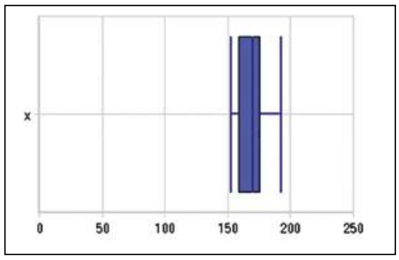
Existen dos posibilidades de visualizar los gráficos conjuntamente, en este caso hay que elegir la segunda opción y pulsar *OK*. A continuación se muestran los tres gráficos combinados y separadamente.











Como se observa, los gráficos de chicos y chicas son diferentes, lo que lleva a pensar que efectivamente, respecto de la altura, los chicos y las chicas son poblaciones distintas.

Si se analizan los parámetros de las dos subpoblaciones, las cuales se han recogido en la siguiente tabla, se observa que las medias son sensiblemente diferentes y que las desviaciones típicas correspondientes son casi la mitad de la de toda la clase. Esto refuerza la suposición de que son dos poblaciones distintas y justifica la existencia de tres modas.

	Media	Desviación típica	Moda
Altura	169,1	11,046	159, 173, 180
Altura Chicas	159,6	4,841	159
Altura Chicos	178,6	6,333	173, 180

Se puede realizar un estudio similar sobre la talla del calzado. Además, se pueden utilizar los datos para estudiar la relación entre la altura y la talla del calzado.

Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas

CASIO
División Educativa

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM).2019
Servicio de publicaciones
Avda. de la Mancha s/n · 02006 Albacete · www.fespm.es

CASIO ESPAÑA S.L.
Josep Pla, 2 · Torre B2 Planta 12 · 08019 Barcelona
Tel. 934 858 400 · Fax 934 858 440
www.edu-casio.es