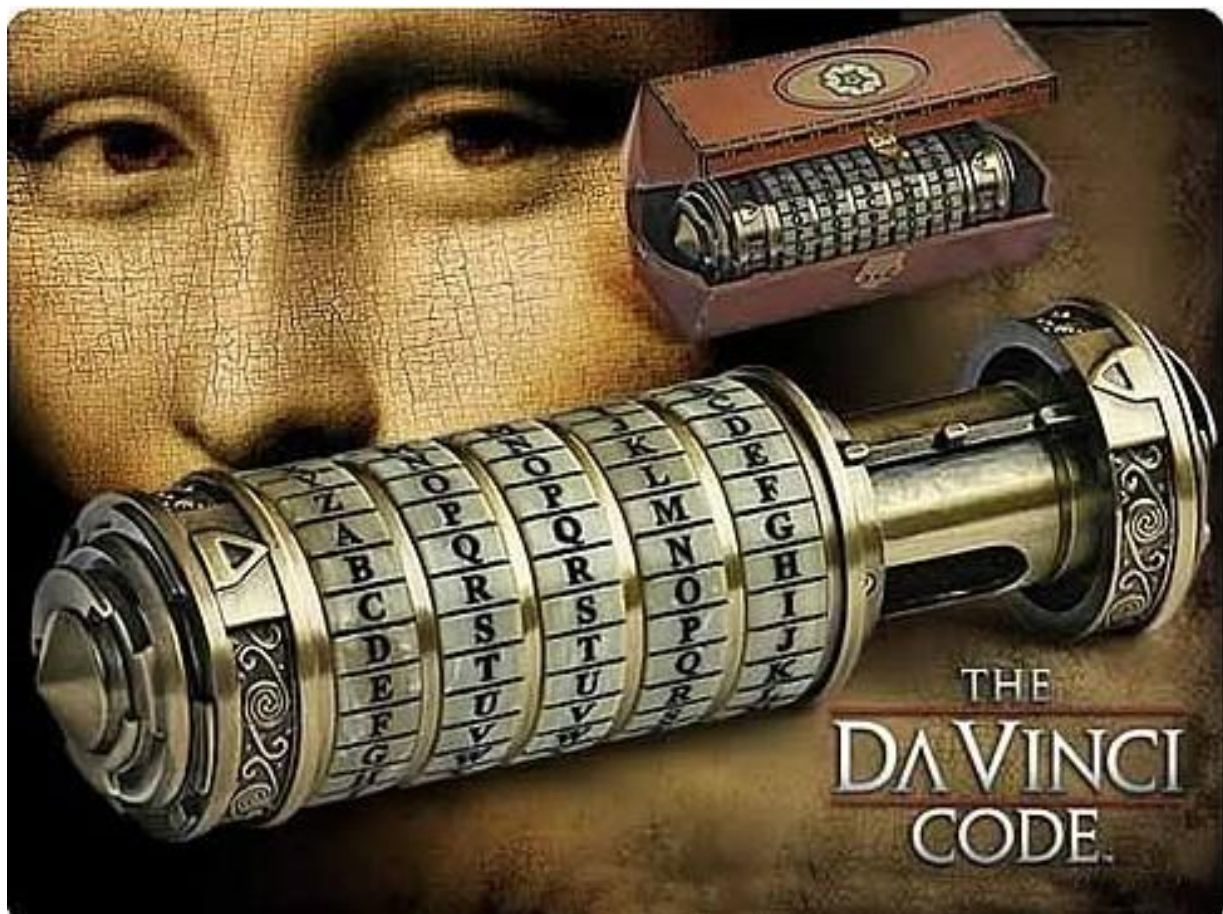




iParador

- Aprendizaje basado en proyectos -



2º ESO

El Código Da Vinci

Departamento de Matemáticas

IES El Parador
Curso 2019 - 2020

Cuaderno 1: Códigos numéricos y algebraicos

Apellidos y Nombre:



INTRODUCCIÓN: LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Un mecanismo muy utilizado desde la antigüedad para codificar mensajes se basa en utilizar diferentes sistemas de numeración y su relación entre ellos. Es así como transmitimos, por ejemplo, la información a una computadora basándonos, por ejemplo, en el código ASCII dependiendo del número de bits.

En esta sección vamos a ver algunos ejemplos de codificación utilizando este tipo de sistemas para comprender su funcionamiento y poder utilizarlo en nuestros mensajes secretos.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que permiten representar datos numéricos. La norma principal en un sistema de numeración posicional es que *un mismo símbolo tiene distinto valor según la posición que ocupe*.

Sistema de numeración decimal:

El sistema de numeración que utilizamos habitualmente es el **decimal**, que se compone de diez símbolos o dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) a los que otorga un valor **dependiendo de la posición** que ocupen en la cifra: unidades, decenas, centenas, millares, etc.

El valor de cada dígito está asociado al de una potencia de base 10, número que coincide con la cantidad de símbolos o dígitos del sistema decimal, y un exponente igual a la posición que ocupa el dígito menos uno, contando desde la derecha.

En este sistema el número 528, por ejemplo, significa:

5 centenas + 2 decenas + 8 unidades, es decir:

$500 + 20 + 8$ o, lo que es lo mismo,

$$5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = 528$$

En el caso de números con decimales, la situación es análoga aunque, en este caso, algunos exponentes de las potencias serán negativos, concretamente el de los dígitos colocados a la derecha del separador decimal. Por ejemplo, el número 8245,97 se calcularía como:

8 millares + 2 centenas + 4 decenas + 5 unidades + 9 décimos + 7 céntimos

$$8000 + 200 + 40 + 5 + 0,9 + 0,07 = 8245,97$$

$$8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} = 8245,97$$

Sistema de numeración binario.

El sistema de numeración binario utiliza sólo dos dígitos, el cero (0) y el uno (1), que tienen distinto valor dependiendo de la posición que ocupen. El valor de cada posición es el de una potencia de base 2, elevada a un exponente igual a la posición del dígito menos uno. Se puede observar que, tal y como ocurría con el sistema decimal, la base de la potencia coincide con la cantidad de dígitos utilizados (2) para representar los números.

De acuerdo con estas reglas, el número binario 1011 tiene un valor que se calcula así:

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

y lo escribimos así: $1011_2 = 11_{10}$

Conversión entre números decimales y binarios

Convertir un número decimal al sistema binario es muy sencillo: basta con realizar divisiones sucesivas por 2 y colocar los restos obtenidos, en cada una de ellas. Para formar el número binario tomaremos los restos **en orden inverso** al que han sido obtenidos. Por ejemplo:

$$77 : 2 = 38 \text{ Resto: } 1$$

$$38 : 2 = 19 \text{ Resto: } 0$$

$$19 : 2 = 9 \text{ Resto: } 1$$

$$9 : 2 = 4 \text{ Resto: } 1$$

$$4 : 2 = 2 \text{ Resto: } 0$$

$$2 : 2 = 1 \text{ Resto: } 0$$

$$1 : 2 = 0 \text{ Resto: } 1$$

$$77_{10} = 1001101_2$$

La cantidad de dígitos necesarios, para representar un número en el sistema binario, dependerá del valor de dicho número en el sistema decimal. En el caso anterior, para representar el número 77 han hecho falta siete dígitos. Para representar números superiores harán falta más dígitos. Por ejemplo, para representar números mayores de 255 se necesitarán más de ocho dígitos, porque $2^8 = 256$ y, por tanto, 255 es el número más grande que puede representarse con ocho dígitos.

Es importante distinguir entre los números que pueden representarse con n dígitos binarios, que es 2^n , y el mayor de esos números, que es una unidad menos, es decir, $2^n - 1$.

El proceso para convertir un número del sistema binario al decimal es aún más sencillo; basta con desarrollar el número, teniendo en cuenta que el valor de cada dígito está asociado a una potencia de 2, cuyo exponente es 0 en el bit situado más a la derecha, y se incrementa en una unidad según vamos avanzando posiciones hacia la izquierda, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$1010011 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 83$$

$$1010011_2 = 83_{10}$$

SISTEMAS DE NUMERACIÓN OCTAL Y HEXADECIMAL

El inconveniente de la codificación binaria es que la representación de algunos números resulta muy larga. Por este motivo se utilizan otros sistemas de numeración que resulten más cómodos de escribir: el sistema octal y el sistema hexadecimal. Afortunadamente, resulta muy fácil convertir un número binario a octal o a hexadecimal.

Sistema de numeración octal

En el sistema octal, los números se representan mediante **ocho** dígitos diferentes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Cada dígito tiene, naturalmente, un valor distinto dependiendo del lugar que ocupen. El valor de cada una de las posiciones viene determinado por las potencias de base 8. La conversión de un número decimal a octal, y viceversa, se realiza del mismo modo que la de los números binarios, aunque, lógicamente, se emplea como base el número 8 en vez del 2.

La conversión de un número decimal a octal se hace del mismo modo: mediante divisiones sucesivas por 8 y colocando los restos obtenidos en orden inverso. Por ejemplo:

$$122 : 8 = 15 \text{ Resto: } 2$$

$$15 : 8 = 1 \text{ Resto: } 7$$

$$1 : 8 = 0 \text{ Resto: } 1$$

$$122_{10} = 172_8$$

La conversión de un número octal a decimal es igualmente sencilla. Por ejemplo:

$$237_8 = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 128 + 24 + 7 = 159_{10}$$

$$237_8 = 159_{10}$$



Sistema de numeración hexadecimal

En este sistema, los números se representan con dieciséis símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F. Se utilizan los caracteres A, B, C, D, E y F representando las cantidades decimales 10, 11, 12, 13, 14 y 15 respectivamente, porque no hay dígitos mayores que 9 en el sistema decimal. El valor de cada uno de estos símbolos depende, como es lógico, de su posición, que se calcula mediante potencias de base 16.

Ensayemos la conversión decimal a hexadecimal del número 1735:

$$\begin{array}{lll} 1735 : 16 = 108 & \text{Resto: } 7 & \\ 108 : 16 = 6 & \text{Resto: } C \text{ (12}_{10}\text{)} & 1735_{10} = 6C7_{16} \\ 6 : 16 = 0 & \text{Resto: } 6 & \end{array}$$

Ensayemos también la conversión inversa, de hexadecimal a decimal del número 1A3F:

$$1A3F_{16} = 1 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 = 6719_{10}$$

$$1A3F_{16} = 6719_{10}$$

Conversión de números binarios a octales y hexadecimales

Cada dígito de un número octal equivale a tres dígitos en el sistema binario. Por tanto, el modo de convertir un número entre estos sistemas de numeración equivale a "expandir" cada dígito octal a tres dígitos binarios, o en "contraer" grupos de tres caracteres binarios a su correspondiente dígito octal. Por ejemplo:

$$101001011_2 = 513_8$$

$$750_8 = 111101000_2$$

Análogamente, la conversión entre números hexadecimales y binarios se realiza "expandiendo" o "contrayendo" cada dígito hexadecimal a cuatro dígitos binarios. Por ejemplo:

$$101001110011_2 = A73_{16}$$

$$1F6_{16} = 000111110110_2$$

En caso de que los dígitos binarios no formen grupos completos (de tres o cuatro dígitos, según corresponda), se deben añadir ceros a la izquierda hasta completar el último grupo. Por ejemplo:

$$101110_2 = 00101110_2 = 2E_{16}$$

EJERCICIOS

1. Expresa, en código binario, los números decimales siguientes:
 - a) 47
 - b) 191
 - c) 25
 - d) 67
 - e) 99
 - f) 135
 - g) 276.
2. Expresa, en el sistema decimal, los siguientes números binarios:
 - a) 110111
 - b) 111000
 - c) 010101
 - d) 101010
 - e) 1111110
3. Dados dos números binarios: 01001000 y 01000100 ¿Cuál de ellos es el mayor? ¿Podrías compararlos sin necesidad de convertirlos al sistema decimal?
4. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir, utilizando el sistema binario de numeración, con sólo 3 dígitos? ¿Y con 16 dígitos?
5. Convierte los siguientes números octales en decimales:
 - a) 45_8
 - b) 125_8
 - c) 625_8
6. Convierte los siguientes números decimales en octales:
 - a) 63
 - b) 513
 - c) 119
7. Convierte los siguientes números binarios en octales:
 - a) 1101101
 - b) 101110
 - c) 11011011
 - d) 101101011
8. Convierte los siguientes números octales en binarios:
 - a) 25_8
 - b) 372_8
 - c) 2753_8

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos con los signos de las operaciones matemáticas.

EJEMPLOExpresión escrita

La suma de dos números menos dos

El triple de un número más cinco

El cuadrado de un número más una unidad

Expresión algebraica

$$x + y - 2$$

$$3 \cdot x + 5$$

$$x^2 + 1$$

3 Escribe estos enunciados como expresión algebraica.

- El doble de un número b .
- El doble de la suma de dos números m y n .
- El cuadrado de un número x más 4 unidades.
- El producto de tres números a , b y c .
- El doble de un número y más 3 unidades.

4 Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica.

- El doble de un número más dos unidades.
- Un número disminuido en cinco unidades.
- La tercera parte de un número.
- El cubo de un número.
- El doble de un número.
- Un número aumentado en diez unidades.
- La diferencia de dos números.
- El número siguiente a un número entero.

$$x - 5$$

$$\frac{x}{3}$$

$$2 \cdot x + 2$$

$$x + 10$$

$$2x$$

$$x^3$$

$$x + 1$$

$$x - y$$

5 Si x es la edad de Juan, expresa en lenguaje algebraico.

LENGUAJE USUAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Los años que tenía el año pasado	
Los años que tendrá dentro de un año	
La edad que tenía hace 5 años	
La edad que tendrá dentro de 5 años	
Los años que faltan para que cumpla 70 años	

6 Inventa un enunciado para estas expresiones algebraicas.

a) $n + 1 \longrightarrow$

b) $a + b \longrightarrow$

c) $\frac{b}{2} \longrightarrow$

d) $2 \cdot (m - n) \rightarrow$

e) $x^3 - 1 \longrightarrow$

f) $2 \cdot x + 1 \longrightarrow$

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.

EJEMPLO

Halla el valor numérico de la expresión algebraica $3x + 2$ para $x = 1$.

Sustituimos x por 1 en la expresión algebraica y realizamos las operaciones:

$$x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

El valor numérico de $3x + 2$, para $x = 1$, es 5.

7 Halla el valor numérico de la expresión algebraica $2x + 1$ para estos valores:

VALOR	SUSTITUCIÓN	OPERACIÓN	VALOR NUMÉRICO
$x = 0$	$2 \cdot (0) + 1$	$2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1$	1
$x = 2$			
$x = -1$			
$x = -2$			

8 Calcula el valor numérico de estas expresiones para los valores que se indican.

VALORES	$x + y$	$2x - 3y$	$(x + y)^2$
$x = 1 \quad y = 0$	$1 + 0 = 1$	$2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 =$	$(1 + 0)^2 = (1)^2 =$
$x = -1 \quad y = 2$			
$x = 1 \quad y = -2$			
$x = -2 \quad y = 3$			
$x = -1 \quad y = -1$			

MONOMIOS

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por productos de números y letras. A los números se les denomina **coeficientes**, y a las letras con sus exponentes, **parte literal**.

EJEMPLO

MONOMIO	$3x$	$-5ab$	$-5x^3$	$\frac{3}{5}x$
COEFICIENTE	3	-5	-5	$\frac{3}{5}$
PARTE LITERAL	x	ab	x^3	x

1 Completa las tablas.

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL
x	1	x
$-3xy$	-3	
$-5xy^2$		
$\frac{1}{3}x^2y$		

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL
$\frac{2}{3}a^2b$		
$-2xyz$		
$-3b^2c$		
$-\frac{5}{7}xyz^2$		

GRADO DE UN MONOMIO

El **grado de un monomio** es el número que resulta de sumar todos los exponentes de su **parte literal**.

EJEMPLO

MONOMIO	GRADO	EXPLICACIÓN
$-3x$	1	El exponente de x es 1 (x^1)
$4a^2y$	3	La suma de los exponentes de a^2y^1 es $2 + 1 = 3$
$-5x^2y^3$	5	La suma de los exponentes de x^2y^3 es $2 + 3 = 5$

2 Calcula el grado de los siguientes monomios.

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $-5x^2 \rightarrow$ Grado = | d) $zx^2 \rightarrow$ Grado = |
| b) $7x^2y \rightarrow$ Grado = | e) $-yx \rightarrow$ Grado = |
| c) $\frac{2}{3}a^5b \rightarrow$ Grado = | f) $-x \rightarrow$ Grado = |

3 Completa la siguiente tabla.

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$-3x$	-3	x	1
$-2a^3b$			
$-2ab$			
xyz			
$7ab^2c^3$			
$6y^2z$			

MONOMIOS SEMEJANTES

Dos o más monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

EJEMPLO

$5x$; $2x$ son monomios semejantes, porque tienen la misma parte literal (x).
 $3xy^2$; $-xy^2$ son monomios semejantes, porque tienen la misma parte literal (xy^2).
 x^2y^3 ; xy^2 no son monomios semejantes.

4 Escribe dos monomios semejantes para cada monomio.

MONOMIO	MONOMIOS SEMEJANTES
$-5x$	
$-ab$	
$-2yx^3$	
$-3y^2z^3$	
$\frac{2}{3}a^2b$	
$5xy$	

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

- La suma y resta de monomios solo se puede realizar cuando los monomios son semejantes.
- Para sumar o restar monomios semejantes se suman o restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

EJEMPLO

$2x + x = (2 + 1)x = 3x$
 $2x + y \rightarrow$ La suma se deja indicada, porque no son monomios semejantes.

5 Realiza las siguientes operaciones.

a) $a + a + a + a =$

d) $5x - 3x - x =$

b) $2x^2 + x^2 + x^2 =$

e) $-5x^3 - 3x^3 =$

c) $5mn - mn - 4mn =$

f) $p - 2p + 5p =$

6 Completa los huecos con monomios semejantes y calcula.

a) $2x + \boxed{} + \boxed{} =$

c) $2x^3 + \boxed{} =$

b) $\boxed{} + 5p + \boxed{} =$

d) $\boxed{} + 2xy + \boxed{} =$

7 Escribe un monomio semejante al que se indica y calcula.

a) $7x - \boxed{} =$

c) $5pq - \boxed{} =$

b) $\boxed{} - x^2 =$

d) $\boxed{} - 4x^2y =$

8 Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

a) $6x^2 + 4x - 2x^2 - x$

Sumamos y restamos los monomios semejantes y calculamos el resultado:

$$\begin{array}{c} \boxed{6x^2 - 2x^2} + \boxed{4x - x} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 4x^2 \qquad + \qquad 3x \end{array}$$

b) $5x^2 - 2x + 3x^2 - x =$

c) $ab - ab + 7ab + 4ab - 2ab =$

d) $3ab^3 - 2ab + 5ab^3 - ab + 4ab =$

e) $-10xy - 5xy + 2xy + 4x - 8y + 2y + 2x =$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

El producto de dos o más monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuya parte literal es el producto de las partes literales.

EJEMPLO

$$3x \cdot 2x = (3 \cdot 2) \cdot x \cdot x = 6x^2$$

$$4x \cdot (-2x^2) = [4 \cdot (-2)] \cdot x \cdot x^2 = -8x^3$$

9 Realiza estas multiplicaciones.

a) $4a \cdot 3a =$

c) $-2x \cdot (-5x) =$

e) $m \cdot m^2 =$

b) $3x^2 \cdot 3x^2 =$

d) $3x^2 \cdot (-3x^2) =$

f) $\frac{2}{3}x \cdot \frac{3}{5}x^2 =$

10 Calcula y reduce.

a) $4x(2x - 5) = 4x \cdot 2x - 4x \cdot 5 = 4 \cdot 2 \cdot x \cdot x - 4 \cdot 5 \cdot x = 8x^2 - 20x$

b) $3(2x + 3x^2) =$

c) $2a(4a^3 - 3a^2) =$

d) $(3 - ab + ab^2)2a =$

e) $2(x^2 + 3x) - 2x =$

f) $-3x(x^3 - 2x + 4) - 12x =$

g) $-x^3(-5x + 4 - 3x^2 - 10x) =$

h) $-\frac{1}{3}x(-x^4 + 3x - 2x) + x^2 =$

DIVISIÓN DE MONOMIOS

El cociente de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es el cociente de las partes literales.

EJEMPLO

$$6x : 2x = \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} \cdot \frac{x}{x} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$10x^3 : (-5x) = \frac{10}{-5} \cdot \frac{x^3}{x} = -2x^2$$

11 Resuelve estas divisiones de monomios.

a) $8x^3 : 2x =$

d) $a^4 : a^2 =$

b) $(-12x^5) : (-12x^4) =$

e) $(-14y^4) : (-2y^2) =$

c) $20m^4 : 15m^3 =$

f) $(-20z^5) : 4z^4 =$

12 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $(7x^5 : 2x) + x =$

b) $(6x^7 : x^3) - (5x : x) =$

c) $(8a^2b : 4ab) + b^2 =$

d) $3x(x + 1) - (4x^2 : x) =$

e) $(12a^3b^2 : 3a^2b) - b =$

f) $3(4xy^2 : 2xy) - 2y =$

g) $2x[(-2y^2x^3) : (-x^2y)] + x(x - 1) =$

POLINOMIOS

Un **polinomio** es la suma o resta de varios monomios.

- Cada uno de los sumandos se llama **término** del polinomio.
- Los términos que no tienen parte **literal** se denominan **términos independientes**.
- El **grado de un polinomio** es el del monomio de mayor grado.

EJEMPLO

POLINOMIO	TÉRMINOS	TÉRMINO INDEPENDIENTE	GRADO DEL POLINOMIO
$2x^3 - 3x - 1$	$2x^3$; $-3x$; -1	-1	3, que es el grado de $2x^3$
$-2xy + 9$	$-2xy$; 9	9	2, que es el grado de $-2xy$
$-5x$	$-5x$	No tiene	1, que es el grado de $-5x$

1 Completa esta tabla.

POLINOMIO	TÉRMINOS	TÉRMINO INDEPENDIENTE	GRADO DEL POLINOMIO
$-2x^3 + 3x - 5$			
$5ab - 5ax^2b$			
$x^3 - 2x^2 - x - 3$			
$6x - 7$			
$5xy - 2y$			
$\frac{2}{3}a^2b + 1$			
$3xy + 5xy^2$			

2 Escribe un polinomio de grado 3 que tenga un término, otro con dos términos y un tercero con tres términos.

3 Indica el grado de los siguientes polinomios.

a) $-x + 3x^2 \rightarrow$ Grado =

c) $2x^5 - x \rightarrow$ Grado =

b) $x^2y - 3x \rightarrow$ Grado =

d) $-5x^4 - x^3 - 8 \rightarrow$ Grado =

- 4 Halla el valor numérico del polinomio $x^2 - 2x + 1$ para los valores que se indican.

VALOR	VALOR NUMÉRICO DEL POLINOMIO
$x = 0$	$0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$
$x = 1$	
$x = -2$	

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Para sumar o restar polinomios se suman o restan los monomios semejantes.

EJEMPLO

$$A(x) = 2x^2 + 5$$

$$B(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 3$$

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= (2x^2 + 5) + (x^3 - 5x^2 - 2x + 3) = \\ &= x^3 - 3x^2 - 2x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= (2x^2 + 5) - (x^3 - 5x^2 - 2x + 3) = \\ &= 2x^2 + 5 - x^3 + 5x^2 + 2x - 3 = \\ &= -x^3 + 7x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad + 5 \\ + x^3 - 5x^2 - 2x + 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 - 2x + 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad + 5 \\ - x^3 + 5x^2 + 2x - 3 \\ \hline -x^3 + 7x^2 + 2x + 2 \end{array}$$

- 5 Dados los polinomios $A(x) = 6x^2 - 8x + 1$ y $B(x) = -9x^2 - 2x + 7$, calcula.

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) - B(x)$

c) $B(x) - A(x)$

- 6 Dados los polinomios $A(x) = x^3 - 3x + 2$, $B(x) = -2x^2 + 7x$ y $C(x) = -x^3 - 2$, calcula.

a) $A(x) + B(x) + C(x)$

b) $A(x) + B(x) - C(x)$

c) $A(x) - B(x) - C(x)$

IGUALDADES NOTABLES

Las **igualdades notables** son ciertas igualdades cuya aplicación resulta muy útil para abreviar cálculos con expresiones algebraicas.

Las **principales igualdades notables** son:

Cuadrado de una suma: $(a + b)^2$

Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2$

Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b)$

CUADRADO DE UNA SUMA

El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primer sumando más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times \quad a + b \\ \hline ba + b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

1 Calcula.

a) $(x + 5)^2 =$

c) $(2 + x)^2 =$

b) $(a + 2b)^2 =$

d) $(xy + 1)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

El **cuadrado de una diferencia** es igual al cuadrado del primer sumando menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{r} a - b \\ \times \quad a - b \\ \hline -ba + b^2 \\ a^2 - ab \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

2 Calcula.

a) $(x - 1)^2 =$

c) $(2a - 3b)^2 =$

b) $(a - 6b)^2 =$

d) $(5 - 3x)^2 =$

SUMA POR DIFERENCIA

El producto de una **suma por diferencia** es igual a la diferencia de los cuadrados.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times \quad a - b \\ \hline -ba - b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 + 0 - b^2 \end{array}$$

3 Calcula.

a) $(x + 5) \cdot (x - 5) =$

c) $(7 + x) \cdot (7 - x) =$

b) $(2a + b) \cdot (2a - b) =$

d) $(5a + 1) \cdot (5a - 1) =$

4 Expresa en forma de igualdad notable.

a) $x^2 + 2x + 1 =$

d) $4x^2 - 4x + 1 =$

b) $x^2 + 10x + 25 =$

e) $9a^2 - 30ab + 25b^2 =$

c) $x^2 - 16 =$

f) $4x^2 - 36 =$

SACAR FACTOR COMÚN

SACAR FACTOR COMÚN

Una aplicación de la propiedad distributiva es **sacar factor común**. Esta operación consiste en extraer como factor común el monomio que se repite en todos los términos.

EJEMPLO

EXPRESIÓN	FACTOR COMÚN	SACAR FACTOR COMÚN
$5x + 5y$	5	$5(x + y)$
$7x^2 - 3x$	x	$x(7x - 3)$
$5x^2 - 5x$	$5x$	$5x(x - 1)$
$3x^2 - 12x + 15x^3$	$3x$	$3x(x - 4 + 5x^2)$

10 Extrae factor común en las siguientes expresiones.

a) $3b + 4b$

c) $15x^4 - 5x^2 + 10x$

e) $12x^2 - 3x^2 + 9x^3$

b) $3a + 6b + 12$

d) $6x^2y + 4xy^2$

f) $10xy^2 - 20xy + 10x^2y$

TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

- Si a los dos miembros de una ecuación se les **suma o resta un mismo número** o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
- Si a los dos miembros de una ecuación se les **multiplica o divide por un mismo número distinto de cero**, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación $x - 4 = 10$.

Sumamos 4 en ambos miembros $\longrightarrow x - 4 + 4 = 10 + 4$
 $x = 14$

Resuelve la ecuación $x + 2x = 4 + 2x + 5$.

Restamos $2x$ en ambos miembros $\longrightarrow x + 2x - 2x = 4 + 2x - 2x + 5$
 $x = 4 + 5$
 $x = 9$

Resuelve la ecuación $3x = 12$.

Dividimos ambos miembros entre 3 $\longrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \rightarrow x = 4$

Resuelve la ecuación $\frac{5x}{4} = 10$.

Multiplicamos por 4 ambos miembros $\longrightarrow \frac{5x}{4} \cdot 4 = 10 \cdot 4 \rightarrow 5x = 40$

Dividimos ambos miembros entre 5 $\longrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \rightarrow x = 8$

1 Resuelve las siguientes ecuaciones, aplicando la transposición de términos.

a) $3x = 15$

d) $2x + 6 = 20 + 6 + x$

b) $x + 6 = 14$

e) $2x + 4 = 16$

c) $-10 = -x + 3$

f) $-4x - 4 = -20 - x$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x - 5 = 3$

d) $-x - 4 = 10$

b) $x = -15 - 4x$

e) $2x + 7 = x + 14$

c) $x - 10 = 2x - 4$

f) $3x + 8 = 12 - x$

MÉTODO GENERAL DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resuelve la ecuación $2(x - 4) - (6 + x) = 3x - 4$.

Para resolver una ecuación es conveniente seguir estos pasos.

1.º Eliminar paréntesis.

$$2x - 8 - 6 - x = 3x - 4$$

2.º Reducir términos semejantes.

$$x - 14 = 3x - 4$$

3.º Transponer términos.

Restamos x en ambos miembros.

$$x - x - 14 = 3x - x - 4$$

$$-14 = 2x - 4$$

Sumamos 4 en ambos miembros.

$$-14 + 4 = 2x - 4 + 4$$

$$-10 = 2x$$

4.º Despejar la incógnita.

Dividimos ambos miembros entre 2.

$$\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2} \rightarrow -5 = x$$

3 Resuelve estas ecuaciones.

a) $4 - x = 2x + 3x - 5x$

d) $3x + 8 - 5(x + 1) = 2(x + 6) - 7x$

b) $-10 - x + 3x = 2x + 4x + 2$

e) $5(x - 1) - 6x = 3x - 9$

c) $2x - 9 = 3x - 17$

f) $3(3x + 1) - (x - 1) = 6(x + 10)$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2(x - 5) = 3(x + 1) - 3$

d) $3(x + 2) + 4(2x + 1) = 11x - 2(x + 6)$

b) $4(x - 2) + 1 = 5(x + 1) - 3x$

e) $5(x - 4) + 30 = 4(x + 6)$

c) $3(x - 3) = 5(x - 1) - 6x$

f) $5(2 - x) + 3(x + 6) = 10 - 4(6 + 2x)$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON DENOMINADORES

Resuelve la ecuación $\frac{2x - 1}{3} = \frac{x - 3}{2} + \frac{3x - 7}{4}$.

Para resolver una ecuación con denominadores es conveniente seguir estos pasos.

1.º Eliminar denominadores.

$$\text{m.c.m. } (3, 2, 4) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$12 \cdot \frac{2x - 1}{3} = 12 \cdot \frac{x - 3}{2} + 12 \cdot \frac{3x - 7}{4}$$

$$4(2x - 1) = 6(x - 3) + 3(3x - 7)$$

2.º Eliminar paréntesis.

$$8x - 4 = 6x - 18 + 9x - 21$$

3.º Reducir términos semejantes.

$$8x - 4 = 15x - 39$$

4.º Transponer términos.

Restamos $8x$ en ambos miembros.

$$8x - 4 - 8x = 15x - 39 - 8x$$
$$-4 = 7x - 39$$

Sumamos 39 en ambos miembros.

$$-4 + 39 = 7x - 39 + 39$$
$$35 = 7x$$

5.º Despejar la incógnita.

Dividimos ambos miembros entre 7.

$$\frac{35}{7} = \frac{7x}{7} \rightarrow x = 5$$

5 Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $\frac{x-1}{4} - \frac{12-2x}{5} = \frac{x-2}{5}$

f) $\frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{4} = 10$

b) $\frac{3x-7}{12} - \frac{2x-3}{6} = \frac{x-1}{8}$

g) $\frac{x-4}{5} + \frac{x+3}{6} - \frac{x-6}{3} = 1 + \frac{x-7}{2}$

c) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$

h) $2\left(\frac{x}{3} + 5\right) = \frac{2x}{4} + 4$

d) $5 - \frac{x-2}{4} = 4 + \frac{x-3}{2}$

i) $\frac{x-3}{6} = 2 - \frac{5(x+3)}{12}$

e) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 30$

j) $\frac{3(x+5)}{4} + \frac{-7(x+3)}{10} = 4$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado es una igualdad algebraica del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde:

- a , b y c son los coeficientes de la ecuación, siendo $a \neq 0$.
- $ax^2 \rightarrow$ término cuadrático $bx \rightarrow$ término lineal $c \rightarrow$ término independiente
- x es la incógnita.

1 Escribe la expresión general de estas ecuaciones de segundo grado.

a) $(x - 1)(x + 4) = 1 \rightarrow x^2 + 4x - x - 4 = 1 \rightarrow x^2 + 3x - 4 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 5 = 0$

b) $2x(3x + 5) = -1 + 4x$

c) $x - 5x^2 + 8 = -3x^2 - x - 3$

2 Identifica los coeficientes de las ecuaciones de segundo grado del ejercicio anterior.

a) $x^2 + 3x - 5 = 0 \rightarrow a = 1, b = 3, c = -5$ c)

b) d)

FÓRMULA GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado puede tener dos, una o ninguna solución.

Para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado se aplica la siguiente fórmula.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 5x + 6 = 0$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores -2 y -3 en la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, se comprueba que la cumplen:

$$(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0 \rightarrow 4 - 10 + 6 = 0 \rightarrow 10 - 10 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$(-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6 = 0 \rightarrow 9 - 15 + 6 = 0 \rightarrow 15 - 15 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

3 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $7x^2 + 21x = 28$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

e) $3x^2 + 6 = -9x$

c) $2x^2 - 5x - 7 = 0$

f) $(2x - 4)(x - 1) = 2$

4 Resuelve las ecuaciones y comprueba que las soluciones verifican la ecuación.

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$

b) $3x^2 - 6x - 9 = 0$

c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + c = 0$

Las ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ se consideran ecuaciones de segundo grado. Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $b = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso.

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

- Si el radicando es positivo, hay dos soluciones opuestas: $x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
- Si el radicando es negativo, no hay solución.

EJEMPLO

$$2x^2 - 32 = 0 \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \frac{32}{2} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$3x^2 + 75 = 0 \rightarrow 3x^2 = -75 \rightarrow x^2 = \frac{-75}{3} \rightarrow x^2 = -25 \rightarrow x = \pm\sqrt{-25} \rightarrow \text{No tiene solución}$$

5 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $7x^2 - 28 = 0$

c) $5x^2 = 45$

b) $5x^2 - 180 = 0$

d) $18x^2 - 72 = 0$

6 Indica por qué no tienen solución estas ecuaciones.

a) $x^2 + 4 = 0$

d) $3(x^2 + x) = 3x - 12$

b) $2x^2 = -18$

e) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4} = 0$

c) $9x^2 - 5x + 18 = -18 - 5x$

f) $\frac{x^2 + 7}{3} = 2$

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + bx = 0$

Las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ se consideran ecuaciones de segundo grado. Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $c = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso.

$$ax^2 + bx = 0 \xrightarrow{\text{Factor común } x} x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen siempre dos soluciones, siendo cero una de ellas.

EJEMPLO

$$x^2 - 12x = 0 \rightarrow x(x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 12 = 0 \rightarrow x_2 = 12 \end{cases}$$

$$2x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(2x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x_2 = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $5x^2 + 5x = 0$

c) $6x^2 = 30x$

b) $2x^2 - 8x = 0$

d) $-5x^2 + 20x = 0$

8 Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $25x^2 - 100x = 0$

d) $-4x^2 + 16x = 0$

b) $5x - 4x^2 = 0$

e) $x(x - 3) + 8 = 4(x + 2)$

c) $x - x^2 = 0$

f) $\frac{x(x - 1)}{2} = \frac{2x^2 + 3}{3}$