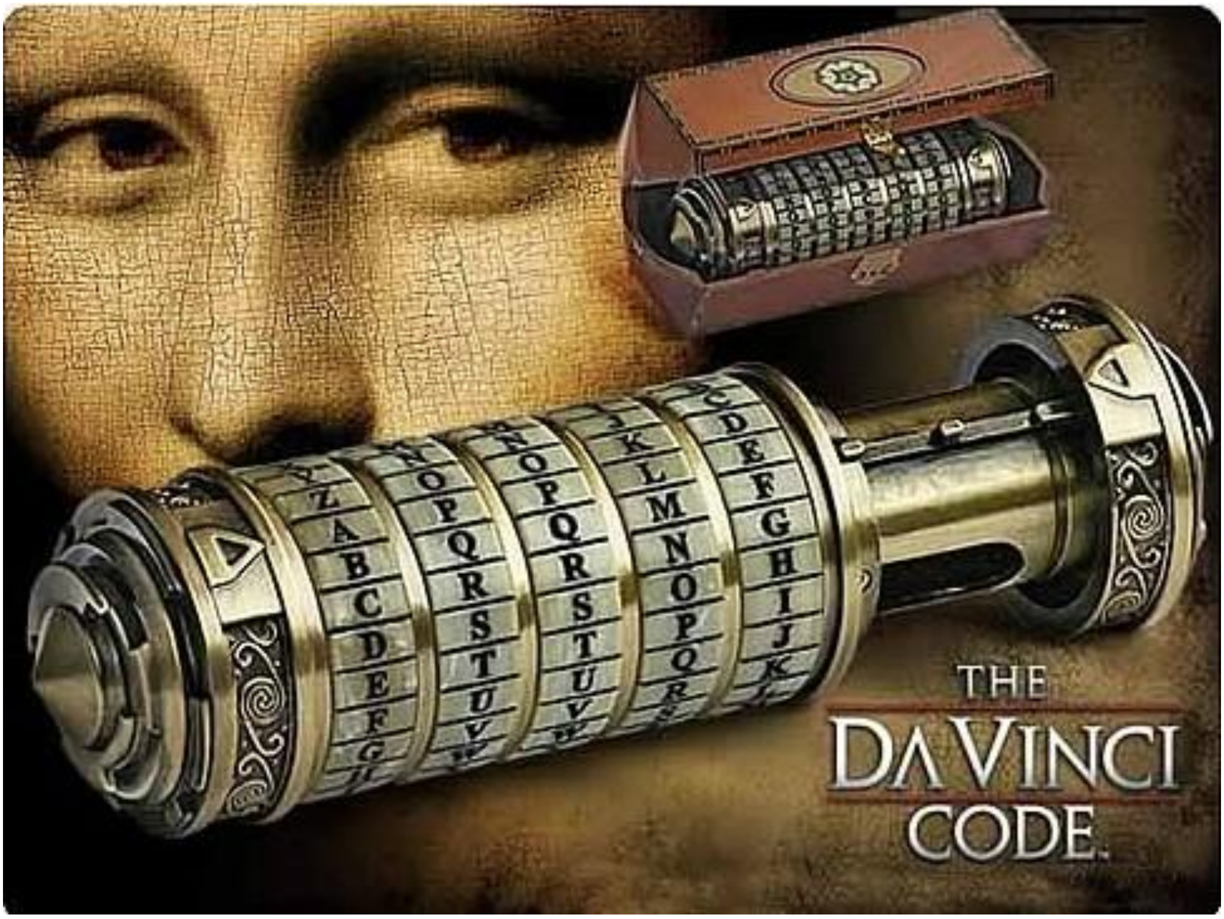


iParador - Aprendizaje basado en proyectos - | 2º ESO

El Código Da Vinci

El Código Da Vinci

Departamento de Matemáticas

IES El Parador

Curso 2019 - 2020

Cuaderno 2: Funciones lineales y sistemas

Apellidos y Nombre:

INTRODUCCIÓN: LOCALIZACIONES EN EL PLANO

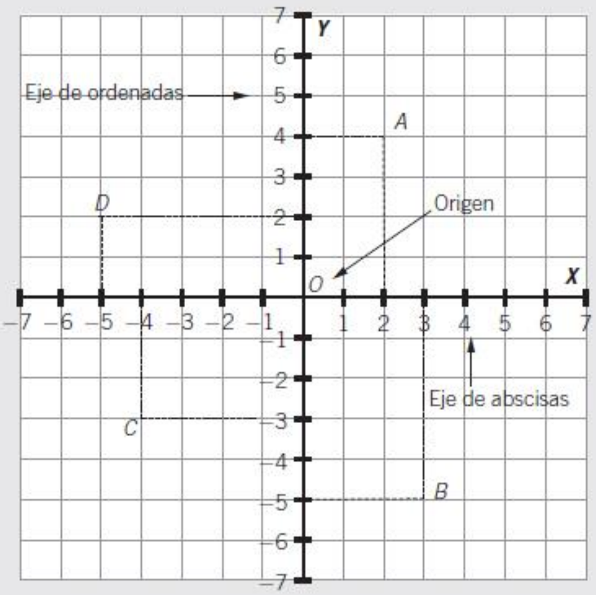
Para localizar puntos en el plano se utilizan las coordenadas cartesianas. Gracias a ellas, cualquier punto del plano puede ser localizado de manera única. Pero además de ello, el uso de los ejes de coordenadas y su relación con las variables (x e y) junto al álgebra, nos van a permitir ir más allá en las localizaciones de lugares secretos en el plano.

En esta sección vamos a recordar algunos conceptos ya estudiados anteriormente sobre las coordenadas cartesianas y vamos a conocer el concepto de función y algunos métodos algebraicos que nos permitan encontrar puntos de corte entre funciones para buscar localizaciones escondidas.

EL SISTEMA DE EJES DE COORDENADAS

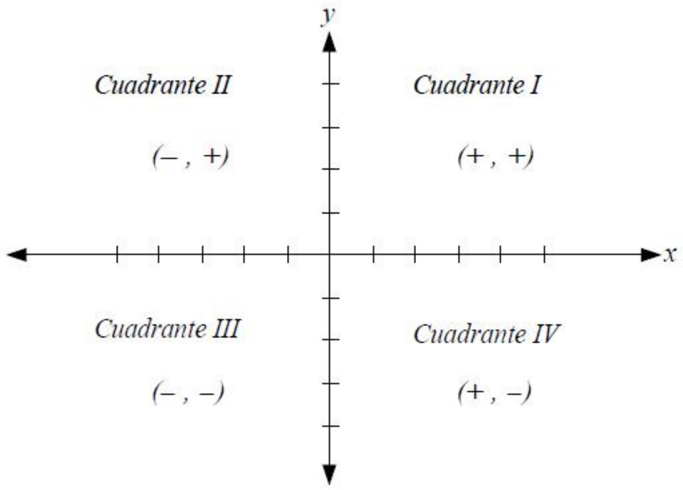
EJES CARTESIANOS EN EL PLANO

- Para representar puntos en el plano, utilizamos un sistema formado por dos rectas perpendiculares llamado **sistema de ejes cartesianos**.
  - En la **recta *X*** o **eje de abscisas** se representan los números enteros de forma horizontal.
  - En la **recta *Y*** o **eje de ordenadas** se representan los números enteros de forma vertical.
  - El punto donde se cruzan se llama **origen** y es el valor cero, 0, en cada recta.
- Cada punto en el plano tiene dos referencias numéricas llamadas **coordenadas**.
  - El primer número corresponde a la **coordenada *x***.
  - El segundo número corresponde a la **coordenada *y***.

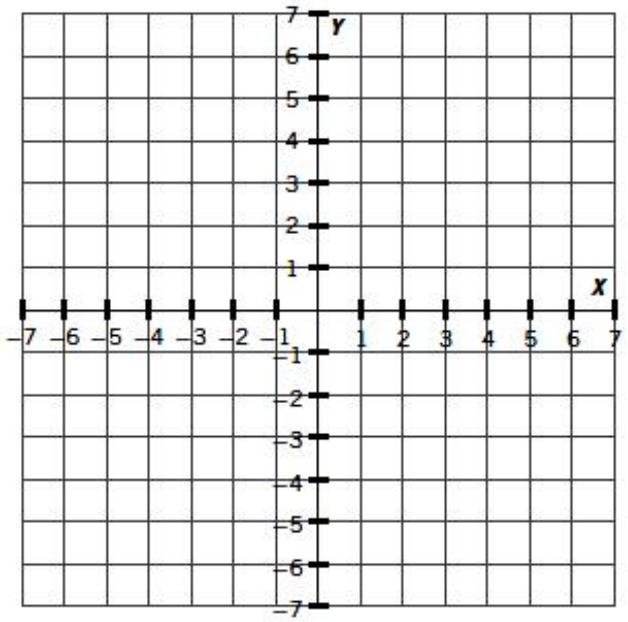


PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(+2, +4)	+2	+4
B	(+3, –5)	+3	–5
C	(–4, –3)	–4	–3
D	(–5, +2)	–5	+2

El sistema de coordenadas rectangulares que estamos describiendo divide al plano en cuatro regiones o cuadrantes. Al cuadrante que está arriba del eje x y a la derecha del eje y lo llamamos el cuadrante uno (cuadrante I). Al cuadrante a la izquierda del cuadrante uno lo llamamos el cuadrante dos (cuadrante II). Debajo del cuadrante dos está el cuadrante tres (cuadrante III). A la derecha del cuadrante III está el cuadrante cuatro (cuadrante IV). Puedes verificar que para todos los puntos del cuadrante I ambas coordenadas son positivas; para los puntos del cuadrante II, la coordenada x es negativa y la y es positiva. En el cuadrante III ambas coordenadas son negativas y en el cuadrante IV la coordenada x es positiva y la coordenada y es negativa.

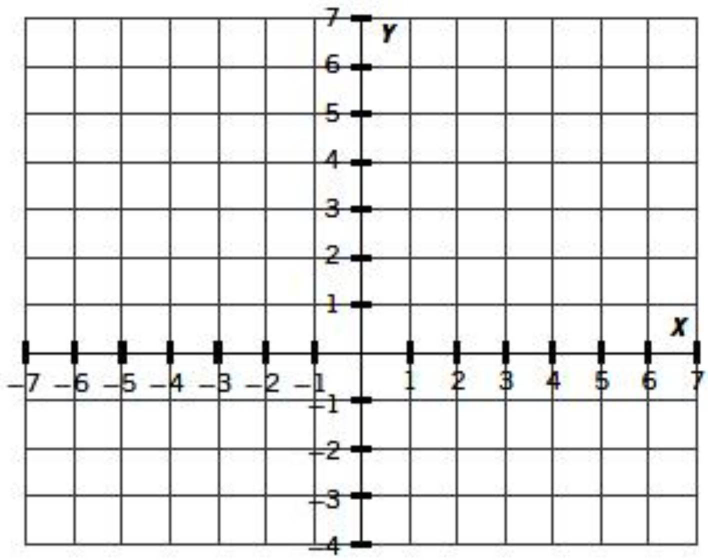


1 **Completa la tabla y representa los puntos que se indican en un sistema de ejes cartesianos.**

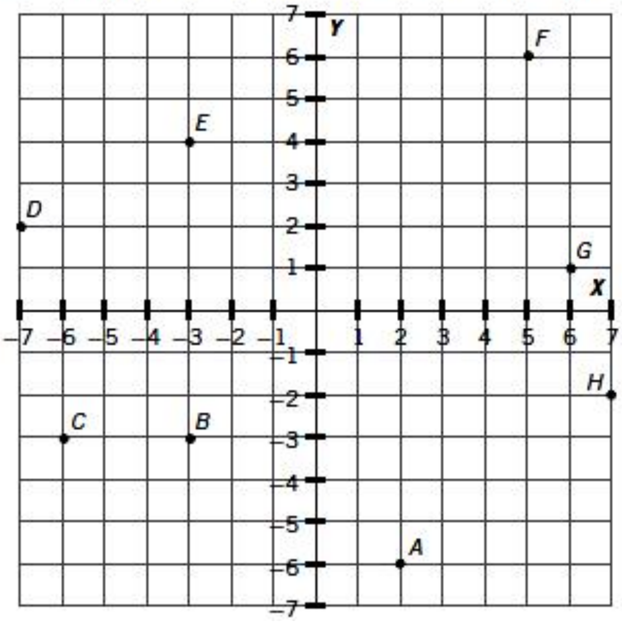


PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(–2, –4)		
B	(+3, +6)		
C	(+5, –3)		
D	(–1, +7)		
E	(+4, 0)		
F	(–4, 0)		

EJE *X*	EJE *Y*
4	7
2	–1
–1	6
4	0
–1	–3
–2	5



2 **Observa los puntos dele sistema de ejes cartesianos y completa la tabla.**



PUNTO	COORDENADAS	EJE *X*	EJE *Y*
A	(+2, −6)		
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

Mediante una tabla de valores como las anteriores podemos relacionar también cantidades de dos magnitudes. Observa el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Un saco de azúcar pesa 2 kilogramos, 2 sacos de azúcar pesan 4 kilogramos, 3 sacos de azúcar pesan 6 kilogramos...

Formamos la tabla de valores con las dos magnitudes.

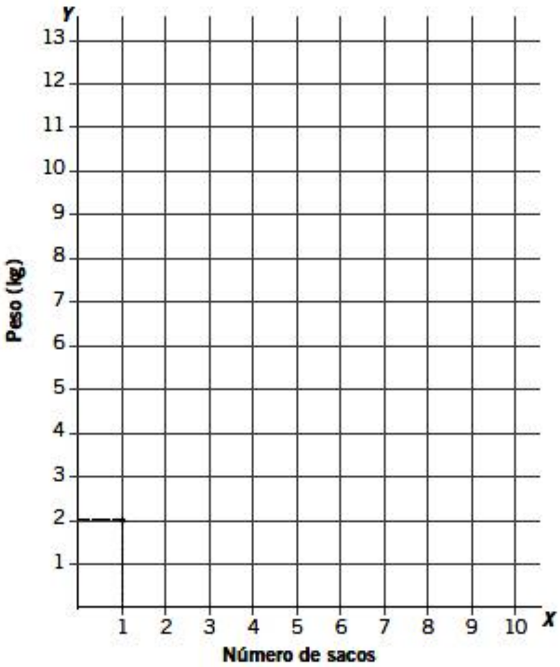
N.º DE SACOS	1	2	3	4	5	6	...
PESO (kg)	2	4	6	8	10	12	...

También podemos reflejar esta información en un sistema de ejes.

3 **Represente en el sistema de ejes los valores del ejemplo anterior.**

– En el eje *X* se representan los valores de la magnitud *número de sacos*.

– En el eje *Y* se representan los valores de la magnitud *peso* (en kg).



VARIABLES Y GRÁFICAS

- En las tablas de valores se relacionan dos magnitudes. Dichas magnitudes se llaman **variables**, porque toman distintos valores, es decir, varían.
- En los pares de valores (*a*, *b*), (*c*, *d*), (*e*, *f*) y (*g*, *h*), el segundo valor depende del primero:
  – *a*, *c*, *e*, *g* son la **variable independiente**; su valor se fija previamente y se designan con la letra *x*.
  – *b*, *d*, *f*, *h* son la **variable dependiente**; su valor depende del valor de *x* y se designan con la letra *y*.
- Si representamos los valores en un sistema de ejes y unimos sus puntos, obtenemos una **gráfica**:
  – La variable independiente (*x*) se sitúa en el eje de abscisas u horizontal.
  – La variable dependiente (*y*) se sitúa en el eje de ordenadas o vertical.

x	*y*
a	*b*
c	*d*
e	*f*
g	*h*

EJEMPLO

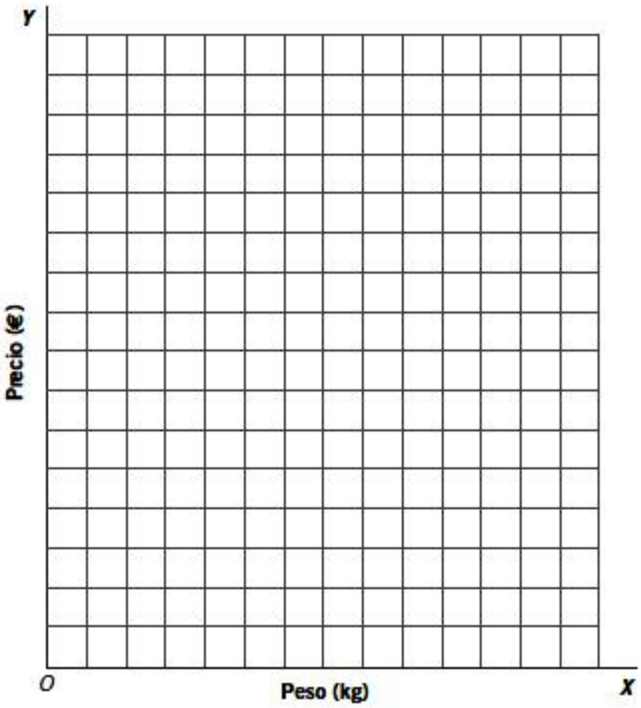
Un kilo de fresas cuesta 3 €.

a) Magnitudes: *peso* (kg) y *precio* (€).
b) Variable independiente: peso (kg) (se fija previamente).
c) Variable dependiente: precio (€) (depende del número de kilos).
d) Tabla de valores:

PESO (kg)	1	2	3	4	5
PRECIO (€)	3	6	9	12	15

1 Respecto al ejemplo anterior:

a) Representa los pares de valores en el sistema de ejes adjunto.
b) Une los puntos. ¿Qué obtienes?



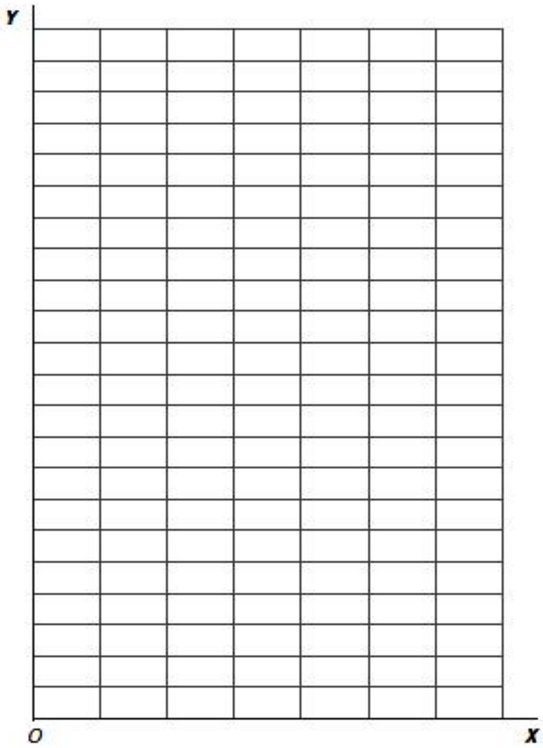
Observa cómo, para ejemplos como este, existe una relación entre la variable dependiente e independiente que se mantiene constante. ¿Qué representación tiene la gráfica?. Esto ocurre siempre que existe una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes. Observa el siguiente ejercicio:

2 **En una tienda 1 metro de tela cuesta 4 €. ¿Cuánto costarán 2, 3, 4, 5 y 6 metros de tela?**

a) Forma la tabla de valores con las magnitudes que intervienen.

b) Indica la variable independiente y la dependiente.

c) Representa los valores en un sistema de ejes y traza la gráfica correspondiente.



CONCEPTO DE FUNCIÓN

- El valor de y está en función del valor que toma x. La relación entre dos magnitudes la podemos escribir con una expresión algebraica, es decir, combinando letras, números y signos aritméticos.
- A cada valor de la variable independiente (x) le corresponde un único valor de la variable dependiente (y).
- Así, en la expresión algebraica $3x + 1$, cada vez que se asignen valores numéricos a la variable x se obtendrán otros valores numéricos que están en función de ellos: multiplicamos por tres y sumamos uno.

En $3x + 1$:

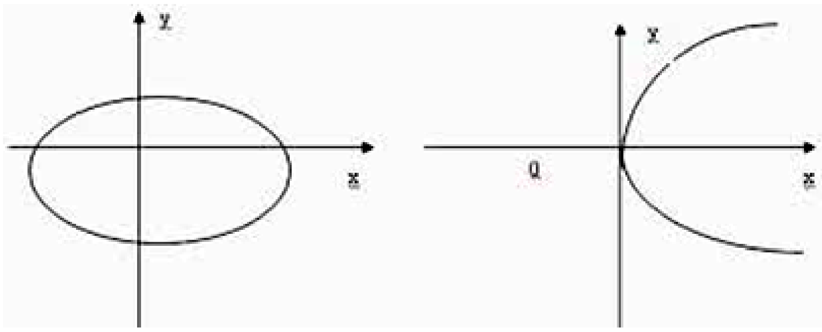
VALOR DE x	VALOR OBTENIDO
0	$3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$
1	$3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
2	$3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$
−1	$3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$
−2	$3 \cdot (-2) + 1 = -6 + 1 = -5$

→

Se expresa: $y = 3x + 1$

x (valor)	y (valor)
0	1
1	4
2	7
−1	−2
−2	−5

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la variable independiente x le corresponde **un único valor** de la variable dependiente y. Para indicar que una magnitud (y) depende o es función de otra (x) se utiliza la notación $y = f(x)$, que se lee *"y es función de x"*. Esto significa que no se consideran funciones ejemplos como estos. ¿Por qué?



LA FUNCIÓN LINEAL

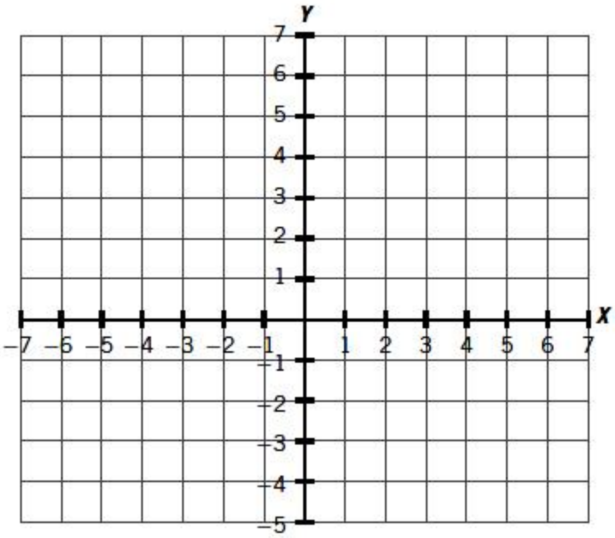
Completa las siguientes tablas de valores y dibuja al lado los puntos resultantes:

a) $y = x + 2$

x	y
0	
1	3
-1	
2	
-2	

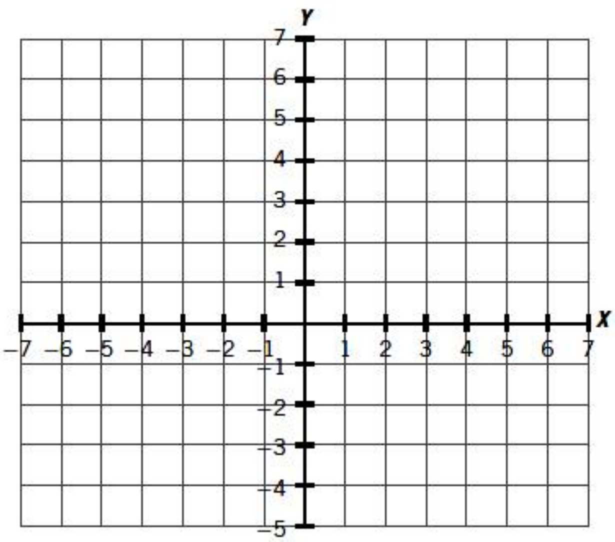
Ejemplo: $x = 1$

$y = 1 + 2 = 3$



b) $y = -3x$

x	y

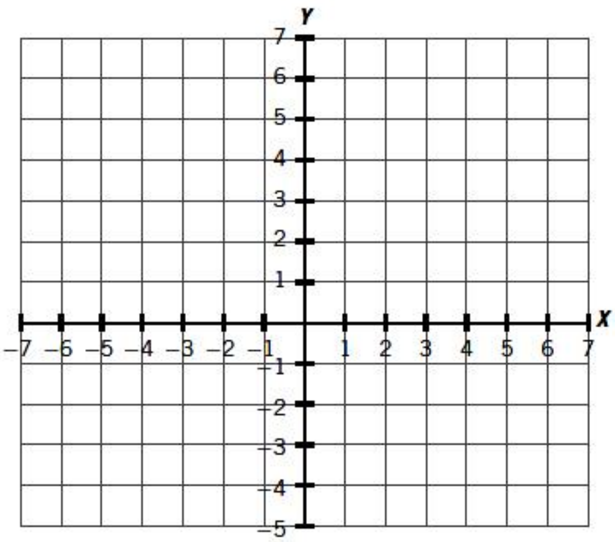


c) $y = 2x - 1$

x	y
0	
-1	-3

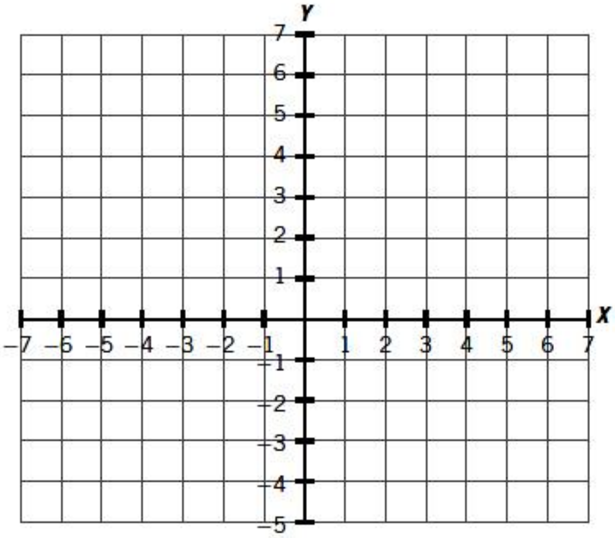
Ejemplo: $x = -1$

$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$



d) $y = 2 - x$

x	y

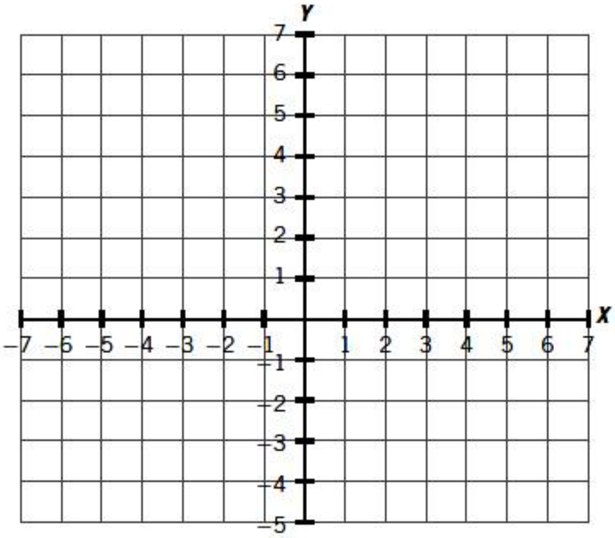


e) $y = 2x + 1$

x	y
1	3

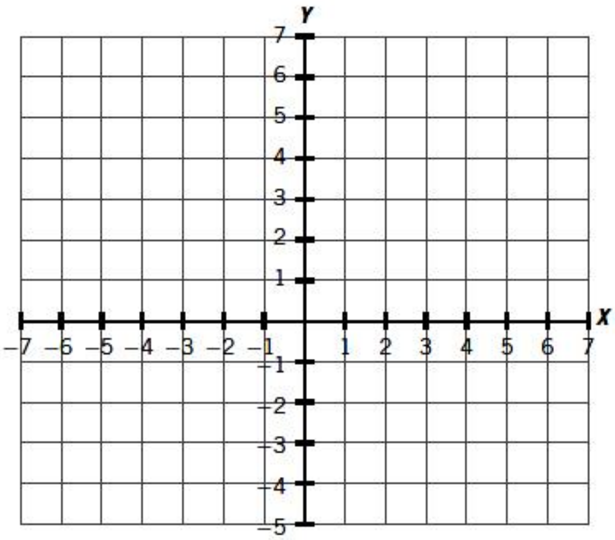
Ejemplo: $x = 1$

$y = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$



f) $y = x - 5$

x	y



ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

La ecuación de cualquier recta o función lineal puede expresarse de la siguiente forma:

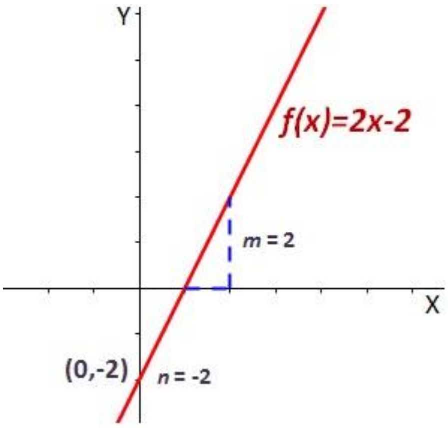
$$ax + by = c$$

donde los parámetros a, b y c son números reales cuyos valores determinan el comportamiento de la recta.

ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA

La ecuación explícita de una recta o función lineal se obtiene despejando la variable y como función de la variable x, que también suele denotarse $y = f(x)$:

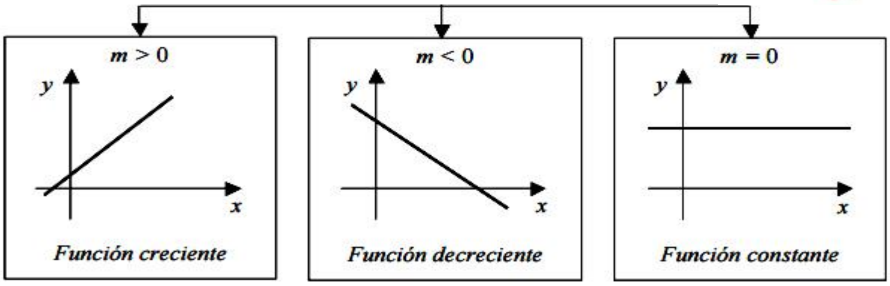
$$y = m \cdot x + n$$



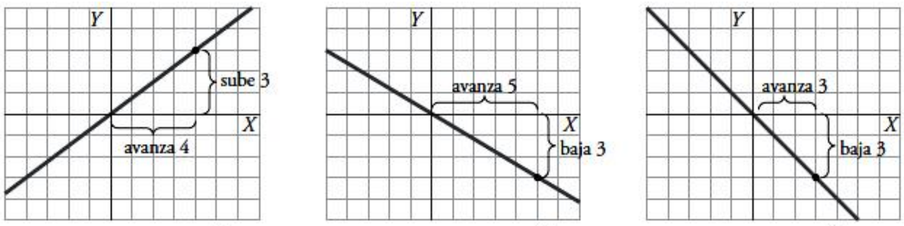
En este caso, los parámetros de la ecuación determinan las características de la recta, y se denominan:

m : Pendiente de la Recta

El coeficiente que acompaña a la x representa la variación que experimenta la y (positiva o negativa) por cada unidad de x. Está relacionada con el ángulo que forma la recta con el eje horizontal. Si es positiva, la recta es creciente; si es negativa, la recta es decreciente, y si es nula, la recta es paralela al eje de abcisas:

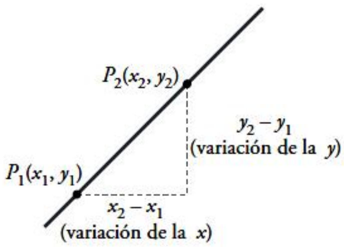


Tomando dos puntos de la recta, se puede calcular la pendiente haciendo el cociente entre ambas variaciones:



Pendiente $m = \frac{3}{4}$ Pendiente $m = -\frac{3}{5}$ Pendiente $m = \frac{-3}{3} = -1$

Pero también se obtiene obtener a partir de las coordenadas de esos puntos, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, dividiendo la variación de la y entre la variación de los valores de x:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Propiedades importantes:

- Dos rectas que tienen la misma pendiente son paralelas.
- Dos rectas son perpendiculares si la pendiente de una de ellas es la inversa negativa de la otra:

$$m' = -\frac{1}{m}$$

n: Ordenada en el Origen

Cuando la recta corta al eje vertical es porque la variable x se anula. Pero si en la ecuación explícita hacemos $x = 0$, obtenemos $y = n$. Por tanto, el parámetro n indica el valor de la y cuando la recta se corta con el eje de ordenadas.

LA ECUACIÓN DE LA RECTA DADO UN PUNTO Y SU PENDIENTE

De la expresión anterior se puede deducir la ecuación de una recta conociendo su pendiente y un punto por el que pasa:

Sea $A(x_0, y_0)$ el punto dado y m la pendiente dada de la recta. Entonces si consideramos otro punto cualquiera $B(x, y)$, que forme parte de dicha recta, por la definición de la pendiente de la recta se tiene que:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

de donde, despejando, se obtiene la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ejemplo:

La recta que pasa por el punto $A(4,3)$ y tiene de pendiente $m = 2$ se escribe así:

$$y - 3 = 2(x - 4)$$

Esta ecuación puede simplificarse para expresarla de forma explícita:

$$y = 3 + 2(x - 4) \Rightarrow y = 3 + 2x - 8 \Rightarrow y = 2x - 5$$

LA ECUACIÓN DE LA RECTA DADOS DOS PUNTOS

Si de una recta conocemos dos puntos, podemos obtener su pendiente a partir de ellos y, después, con la pendiente y uno de los puntos, hallar su ecuación:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ es:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Ejemplo:

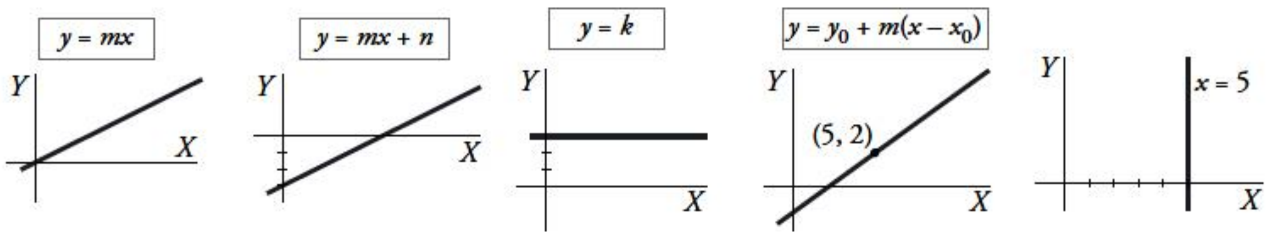
La recta que pasa por los puntos $A(-3,5)$ y $B(-2,3)$ tiene de pendiente:

$$m = \frac{3 - 5}{-2 - (-3)} = \frac{-2}{1} = 2$$

Por lo que, utilizando cualquiera de los dos puntos (en este caso A), su ecuación será:

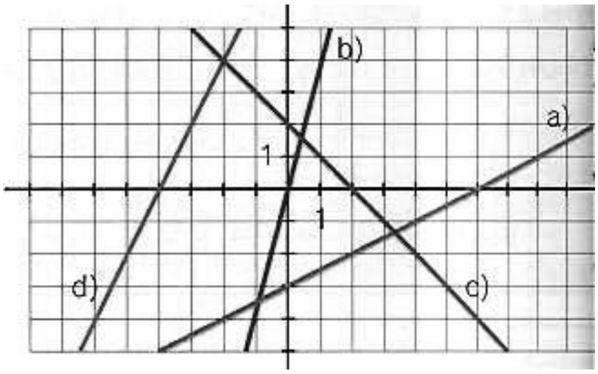
$$y = 5 + 2(x + 3) \Rightarrow y = 5 + 2x + 6 \Rightarrow y = 2x + 11$$

A continuación se muestran algunos ejemplos de rectas según su ecuación general:



AUTOEVALUACIÓN

1) Calcula las expresiones algebraicas de las funciones representadas por estas rectas:



2) Contesta a las siguientes cuestiones:

   a) Dada la recta de ecuación $2x-3y+2=0$. ¿Cuál es su pendiente y su ordenada en el origen?

   b) Halla la ecuación de la recta que pasa por A (1,-4) y B (-1,2). ¿Está el punto (-2,5) alineado con A y B?

   c) Halla la ecuación de la recta paralela a $2x-y+1=0$ y que pase por el punto (2,3).

3) Las coordenadas de tres puntos en el sistema de coordenadas cartesianas son A (1,1), B (4,4) y C (4,1). Se pide:

   a) Dibuja los tres puntos.

   b) Determina la ecuación de la recta r_1 que pasa por los puntos Ay B.

   c) Halla la ecuación de la recta r_2 que pasa por C y es paralela a la recta r_1 anterior.

   d) Hallar la ecuación de la recta r_3 que pasa por A y cuya ordenada en el origen es 3

   e) Determina las coordenadas del punto donde se cortan r_2 y r_3.

4) Una granja vende pollos a 4 euros cada uno. El coste de criar cada ave es de 2,20 euros.

   a) Encuentra una función que exprese la ganancia obtenida en función de los pollos vendidos.

   b) Construye una tabla de valores y representa la función.

5) Un video club ofrece dos opciones para alquilar videos:

   Opción A: 20 €.- de abono anual mas 2,5 €.- por video alquilado.

   Opción B: 30 €.- de abono anual mas 2 €.- por video alquilado.

   a) Hallar para cada opción la expresión del precio a pagar en función del número x de videos alquilados y representarlas en un mismo gráfico.

   b) Si el cliente dispone de 90 €, ¿cuántos videos puede alquilar con cada una de las dos opciones?

   c) ¿A partir de cuántas películas mensuales interesa más la opción B?

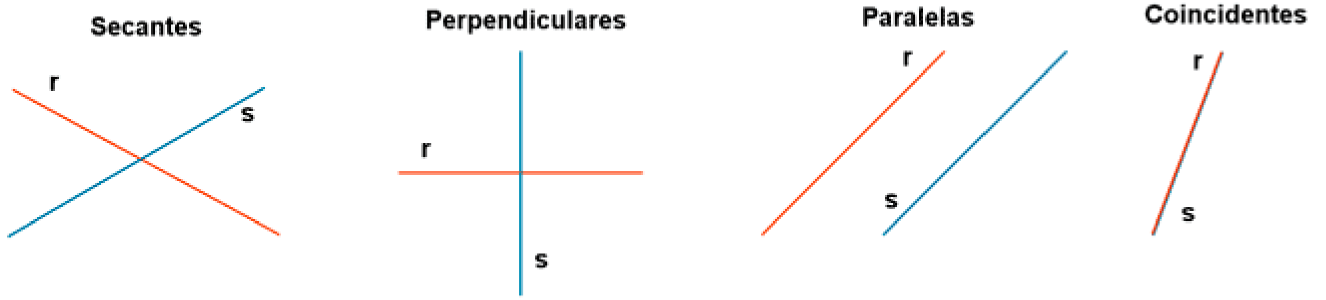
6) La dosis en miligramos (mg) de antibiótico que se suministra a niños menores de 10 años, depende en forma lineal del peso del niño. Para un niño de 3 Kg. se suministran 40 mg. y para uno de 4 Kg. se suministran 65 mg.

   a) Calcular la función que da la dosis de medicamento dependiendo del peso.

   b) ¿Cuánto debe recetarse a un niño de 7,5 Kg?

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto delimitado entre llaves que contiene dos ecuaciones lineales. Gráficamente, lo que se plantea es analizar las posiciones relativas de dos rectas en el plano dadas sus ecuaciones (normalmente en forma general). Por tanto, podemos distinguir las siguientes posibilidades:



MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Para resolver un sistema, una posibilidad es el método gráfico. Consiste en dibujar ambas rectas y ver lo que ocurre con ellas. No obstante, existen otros métodos algebraicos que nos permiten resolver la situación sin necesidad de dibujarlas.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Su uso es recomendable cuando alguno de los coeficientes de alguna de las incógnitas sea ± 1, para evitar la aparición de denominadores.

Los pasos a seguir son:

1. Se despeja una incógnita de una ecuación (la que nos parezca más fácil de despejar).
2. Se sustituye en la otra ecuación, quedando una ecuación de primer grado.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido para la incógnita lo sustituyes en una de las ecuaciones y operando sacas la otra.

A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo 1: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

1. Aunque tenemos varias opciones, despejamos la x de la primera ecuación:

$$x = 2 - y$$

2. Sustituimos en la segunda ecuación la incógnita x por el resultado obtenido al despejar:

$$2 \cdot (2 - y) + y = 5$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$4 - 2y + y = 5 \Rightarrow -y = 5 - 4 \Rightarrow y = -1$$

4. En la expresión del paso 1, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$x = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$$

Solución:

$$\boxed{x = 3 \;\; ; \;\; y = -1}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 3 + (-1) = 3 - 1 = 2 \\ 2 \cdot 3 + (-1) = 6 - 1 = 5 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(3, -1)$.

Ejemplo 2: $\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 5x - \ \ y = \ \ 19 \end{cases}$

1. Lo más cómodo es despejar la y de la segunda ecuación, aunque hay que tener en cuenta que debe quedar siempre positiva:

$$y = 5x - 19$$

2. Sustituimos en la primera ecuación la incógnita y por el resultado obtenido al despejar:

$$2x + 3 \cdot (5x - 19) = -6$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$2x + 15x - 57 = -6 \Rightarrow 17x = 51 \Rightarrow x = 3$$

4. En la expresión del paso 1, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$y = 5 \cdot 3 - 19 = -4$$

Solución:

$$\boxed{x \ = \ 3 \ \ ; \ \ y \ = \ -4}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = 6 - 12 = -6 \\ 5 \cdot 3 - \ \ (-4) = \ \ 15 + 4 = 19 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(3, -4)$.

Ejemplo 3: $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$

1. En esta situación no es muy recomendable utilizar este método porque nos va a generar una ecuación con denominadores. No obstante, vamos a resolverlo despejando, por ejemplo, la x de la primera ecuación:

$$3x = 11 - 2y \Rightarrow x = \frac{11 - 2y}{3}$$

2. Sustituimos en la segunda ecuación la incógnita x por el resultado obtenido al despejar:

$$4 \cdot \left(\frac{11 - 2y}{3}\right) - 5y = 7$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\frac{4 \cdot (11 - 2y) - 15y}{3} = \frac{21}{3} \Rightarrow 4 \cdot (11 - 2y) - 15y = 21 \Rightarrow 44 - 8y - 15y = 21$$

$$-23y = -23 \Rightarrow y = 1$$

4. En la expresión del paso 1, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$x = \frac{11 - 2 \cdot 1}{3} = \frac{11 - 2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Solución:

$$\boxed{x \ = \ 3 \ \ ; \ \ y \ = \ 1}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 9 + 2 = 11 \\ 4 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(3,1)$.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

> Su uso es recomendable cuando se puede despejar fácilmente la misma incógnita en ambas ecuaciones.

Los pasos a seguir son:

1. Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones (la que nos parezca más fácil de despejar).
2. Se igualan ambas expresiones quedando una única ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. Sustituimos el valor obtenido para la incógnita en una de las dos ecuaciones obtenidas en el primer paso y calculamos el valor de la otra. También se puede sustituir en una de las ecuaciones iniciales del sistema.

A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo 1: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

1. Para utilizar este método, lo ideal es despejar la y de la ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

2. Igualamos los miembros obtenidos en ambas ecuaciones:

$$2 - x = 5 - 2x$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$2x - x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3$$

4. En una de las expresiones del paso 1, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$y = 2 - 3 = -1$$

Solución:

$$\boxed{x = 3 \;\; ; \;\; y = -1}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 3 + (-1) = 3 - 1 = 2 \\ 2 \cdot 3 + (-1) = 6 - 1 = 5 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(3, -1)$.

Ejemplo 2: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$

1. Lo más cómodo es despejar y de ambas ecuaciones, teniendo en cuenta que debe quedar siempre positiva:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2 + x \end{cases}$$

2. Igualamos los resultados obtenidos en ambas ecuaciones:

$$2x - 1 = 2 + x$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$2x - x = 2 + 1 \Rightarrow x = 3$$

4. En una de las expresiones del paso 1, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$y = 2 + 3 = 5$$

Solución:

$$\boxed{x = 3 \ ; \ y = 5}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1 \\ \quad -3 + 5 = \ 2 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(3,5)$.

Ejemplo 3: $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$

1. En esta situación no es muy recomendable utilizar este método porque nos va a generar una ecuación con denominadores. No obstante, vamos a resolverlo despejando, por ejemplo, la x de la primera ecuación:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \Rightarrow 3x = 11 - 2y \Rightarrow x = \dfrac{11 - 2y}{3} \\ 4x - 5y = 7 \Rightarrow 4x = 7 + 5y \Rightarrow x = \dfrac{7 + 5y}{4} \end{cases}$$

2. Igualamos los resultados obtenidos en ambas ecuaciones:

$$\frac{11 - 2y}{3} = \frac{7 + 5y}{4}$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\frac{4 \cdot (11 - 2y)}{12} = \frac{3 \cdot (7 + 5y)}{12} \Rightarrow 4 \cdot (11 - 2y) = 3 \cdot (7 + 5y) \Rightarrow 44 - 8y = 21 + 15y$$

$$23y = 23 \Rightarrow y = 1$$

4. En una de las expresiones del paso 1, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$x = \frac{11 - 2 \cdot 1}{3} = \frac{11 - 2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Solución:

$$\boxed{x = 3 \ ; \ y = 1}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 9 + 2 = 11 \\ 4 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(3,1)$.

Antes de desarrollar el último método, recordaremos dos propiedades importantes:

- Dada una ecuación cualquiera, al multiplicar o dividir ambos miembros por un número distinto de cero se obtiene otra ecuación con las mismas soluciones, denominada ecuación equivalente. En el caso de ecuaciones lineales, esto significa que ambas ecuaciones corresponden a la misma recta:

$$2x + y = 1 \qquad 4x + 2y = 2 \qquad x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$$

- Las soluciones de un sistema de ecuaciones se mantienen si cambiamos una de ellas (o ambas) por la suma o la resta de ambas ecuaciones u otras equivalentes. Estos sistemas tienen las mismas soluciones:

$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x - 3y = 18 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$ La suma de ambas $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x - 7y = -4 \end{cases}$ La diferencia de ambas

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Este método es válido en todos los casos, y es el más apropiado cuando ninguno de los coeficientes de las incógnitas sea ± 1.

Los pasos a seguir son:

1. Elegimos una de las dos incógnitas que vamos a eliminar. Para ello, multiplicamos las ecuaciones apropiadas (o una de ellas) por un número conveniente para que esa incógnita tenga el mismo coeficiente cambiado de signo en las dos ecuaciones.
2. Se suman las dos ecuaciones quedando una ecuación con una incógnita que se resuelve fácilmente.
3. Sustituimos el valor obtenido para la incógnita en una de las ecuaciones iniciales del sistema. También podemos usar la misma técnica para eliminar ahora la otra incógnita.

A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo 1: $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

1. Eliminar la incógnita y en este caso es sencillo. Basta cambiar de signo alguna ecuación para que la incógnita y quede con signo contrario en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} -x-y=-2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

2. Sumando ahora las dos ecuaciones, obtenemos directamente la otra incógnita:

$$\begin{array}{rrrcr} & -x & -y & = & -2 \\ + & 2x & +y & = & 5 \\ \hline & x & & = & 3 \end{array}$$

3. En una de las ecuaciones iniciales, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$3+y=2 \Rightarrow y=2-3=-1$$

4. También podríamos multiplicar la primera ecuación por 2 para eliminar la x, obteniendo la misma solución:

$$\begin{array}{rrrcr} & -2x & -2y & = & -4 \\ + & 2x & +y & = & 5 \\ \hline & & -y & = & 1 \end{array}$$

$$-y=1 \Rightarrow y=-1$$

Solución:

$$\boxed{x=3 \;;\; y=-1}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 3+(-1)=3-1=2 \\ 2\cdot 3+(-1)=6-1=5 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(3,-1)$.

Ejemplo 2: $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$

1. Para obtener coeficientes contrarios en ambas ecuaciones y eliminar la x, multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por -3, obteniendo un sistema con las mismas soluciones:

$$\begin{cases} 12x + 8y = 52 \\ -12x + 9y = -18 \end{cases}$$

2. Sumando ahora ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcr} & 12x + 8y & = & 52 \\ + & -12x + 9y & = & -18 \\ \hline & 17y & = & 34 \end{array}$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$17y = 34 \Rightarrow y = \frac{34}{17} = 2$$

4. En una de las ecuaciones iniciales, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$3x + 2 \cdot 2 = 13 \Rightarrow 3x + 4 = 13 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

5. También podríamos multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 para eliminar la y, obteniendo la misma solución para x:

$$\begin{array}{rrcr} & 9x + 6y & = & 39 \\ + & 8x - 6y & = & 12 \\ \hline & 17x & = & 51 \end{array}$$

$$17x = 51 \Rightarrow x = \frac{51}{17} = 3$$

Solución:

$$\boxed{x = 3 \;;\; y = 2}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 9 + 4 = 13 \\ 4 \cdot 3 - 3 \cdot 6 = 12 - 6 = 6 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(3,2)$.

SOLUCIONES DE UN SISTEMA Y POSICIÓN DE LAS RECTAS

Según la posición de las rectas cuyas ecuaciones aparecen en el sistema, podemos encontrarnos diferentes situaciones a la hora de intentar resolverlo. Los casos posibles son:

(SCD) SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO: Rectas Secantes

Cuando las dos rectas se cortan, el sistema tiene una única solución, que son las coordenadas del punto de corte. Todos los ejemplos anteriores son de este tipo.

Ejemplo: Estudia las posiciones relativas de las rectas:

$$r \equiv 2x + y = 5$$
$$s \equiv 4x - y = 1$$

1. Resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

2. Sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rr} & 2x + y = 5 \\ + & 4x - y = 1 \\ \hline & 6x \quad\;\; = 6 \end{array}$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$6x = 6 \Rightarrow x = 1$$

4. En una de las ecuaciones iniciales, sustituimos este valor para obtener el resultado de la otra incógnita:

$$2 \cdot 1 + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2 \Rightarrow y = 3$$

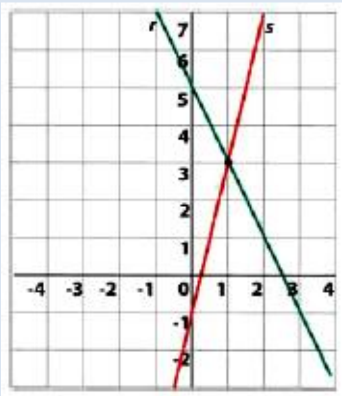
Solución:

$$\boxed{x = 1 \;\; ; \;\; y = 3}$$

Comprobamos que las soluciones cumplen ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 = 5 \\ 4 \cdot 1 - 3 = 1 \end{cases}$$

Gráficamente, las dos rectas se cortan en el punto $(1,3)$:



(SCI) SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO: Rectas Coincidentes

Cuando las dos ecuaciones corresponden a la misma recta, el sistema tiene infinitas soluciones, que son todos los puntos de la misma. En este caso, encontramos una ecuación equivalente de la forma:

$$0 \cdot x = 0$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo: Estudia las posiciones relativas de las rectas:

$$r \equiv 2x - \ y \ = 5$$
$$s \equiv 4x - 2y = 10$$

1. Resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - \ y = \ \ 5 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

2. Utilizando el método de sustitución, despejamos y de la primera ecuación:

$$y = 2x - 5$$

3. Sustituimos en la segunda:

$$4x - 2 \cdot (2x - 5) = 10 \Rightarrow 4x - 4x + 10 = 10 \Rightarrow 0x = 0$$

Gráficamente, las dos rectas son la misma. Puede comprobarse al dibujarlas.

(SI) SISTEMA INCOMPATIBLE: Rectas Paralelas

Cuando las dos ecuaciones corresponden a rectas paralelas, el sistema no tiene solución, ya que no hay ningún punto de corte. En este caso, encontramos una ecuación equivalente de la forma:

$$0 \cdot x = k$$

siendo k un número distinto de cero.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo: Estudia las posiciones relativas de las rectas:

$$r \equiv 2x - \ y \ = 5$$
$$s \equiv 4x - 2y = 6$$

1. Resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - \ y = 5 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

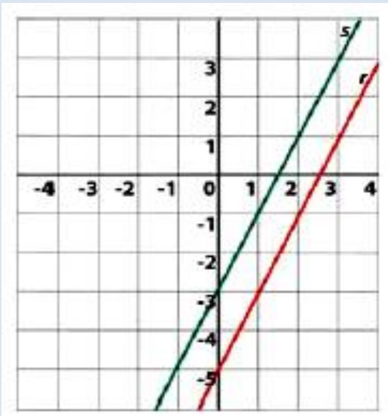
2. Utilizando el método de sustitución, despejamos y de la primera ecuación:

$$y = 2x - 5$$

3. Sustituimos en la segunda:

$$4x - 2 \cdot (2x - 5) = 6 \Rightarrow 4x - 4x + 10 = 6 \Rightarrow 0x = -4$$

Gráficamente, las dos rectas son paralelas. Puede comprobarse que ambas tienen la misma pendiente.



AUTOEVALUACIÓN: SISTEMAS DE ECUACIONES

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando en cada uno el método que consideres más apropiado (sustitución, igualación y reducción). En cada caso, explica qué tipo de sistema es y qué ocurre con las rectas que se representan en el sistema:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$$

Solución:	SCD: Rectas Secantes $\boldsymbol{x = -5}$; $\boldsymbol{y = 2}$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 6y = -7 \end{cases}$$

Solución:	SCD: Rectas Secantes $\boldsymbol{x = 1}$; $\boldsymbol{y = -2}$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$

Solución:	SCI: Rectas Coincidentes Infinitas soluciones

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$$

Solución:	SCD: Rectas Secantes $\boldsymbol{x = -2}$; $\boldsymbol{y = 3}$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Solución:	SCD: Rectas Secantes $\boldsymbol{x = 3}$; $\boldsymbol{y = 4}$

$$\begin{cases} x - 2y = \ \ 3 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$

Solución:	SI: Rectas Paralelas No existe solución.

$$\begin{cases} 5x - 2y = \ \ 1 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

Solución:	SCD: Rectas Secantes $\boldsymbol{x = 1\ ;\ y = 2}$

$$\begin{cases} 5x - \ \ y = 9 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

Solución:	SCD: Rectas Secantes $\boldsymbol{x = 2\ ;\ y = 1}$

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{5} = y \\ 2(x - 3y) + x = 9 \end{cases}$$

Solución:	SCD: Rectas Secantes $\boldsymbol{x = 7\ ;\ y = 2}$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = 7 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

Solución:	SCD: Rectas Secantes $\boldsymbol{x = 4\ ;\ y = -5}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

Muchos problemas pueden resolverse empleando sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, siendo a veces incluso más sencillo plantearlos que utilizando una sola ecuación con una incógnita.

Los pasos a seguir son:

1. Elegir las incógnitas x e y, que siempre suelen coincidir con lo que nos pregunta el problema.
2. Plantear dos ecuaciones con ellas traduciendo el problema al lenguaje algebraico. Es importante tener en cuenta que ambas ecuaciones deben "hablar" de lo mismo. Es decir, no debemos mezclar cosas diferentes en la misma ecuación.
3. Resolvemos el sistema por alguno de los métodos estudiados.
4. Comprobar siempre que la solución es correcta y que tiene sentido en el contexto del problema planteado.

PROBLEMAS RESUELTOS

Hay una serie de "problemas tipo" que se resuelven fácilmente utilizando sistemas de ecuaciones y cuyo planteamiento es siempre similar, variando el enunciado. Pero también hay otros para los que el planteamiento de las ecuaciones es más complicado. Lee el enunciado las veces que haga falta hasta comprender las dos ecuaciones que hay que plantear.

Tipo 1	El total, que es conocido, se obtiene como la suma de los dos datos desconocidos, por lo que una de las ecuaciones siempre establece que la suma de ambas incógnitas es igual al total. La otra ecuación se obtiene a partir de la vinculación entre ambas incógnitas al multiplicarlas por una constante según el tipo (precio, puntos, número de elementos que contiene, etc.)

Ejemplo: En un aparcamiento hay 55 vehículos entre coches y motos. Si el total de ruedas es de 170. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay?

1. Elegimos las incógnitas para responder a la pregunta: "¿Cuántos coches y cuántas motos hay?"

$$x = \text{"nº de coches"}$$
$$y = \text{"nº de motos"}$$

2. Planteamos ahora dos ecuaciones con los datos del enunciado:

Número de vehículos: Sumando ambas incógnitas debe dar el total de 55 vehículos.

$$x + y = 55$$

Número de ruedas: Hay 170 ruedas entre todos los vehículos. Un coche tiene 4 ruedas, luego x coches tendrán $4x$ ruedas. Una moto tiene 2 ruedas luego y motos tendrán $2y$ ruedas.

$$4x + 2y = 170$$

3. Planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + \ \ y = \ \ 55 \\ 4x + 2y = 170 \end{cases}$$

4. Y obtenemos como solución:

$$\boxed{x = 30 \ ; \ y = 25}$$

Solución: En el aparcamiento hay 30 coches y 25 motos.

Comprobamos que las soluciones cumplen el problema planteado:

$$\begin{cases} 30 + 25 = 55 \text{ vehículos} \\ 4 \cdot 30 + 2 \cdot 25 = 120 + 50 = 170 \text{ ruedas} \end{cases}$$

Ejemplo: En un corral hay gallinas y conejos. En total hay 14 cabezas y 38 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?

1. Elegimos las incógnitas para responder a la pregunta: "¿Cuántas gallinas y conejos hay en el corral?"

$$x = "nº\ de\ gallinas"$$
$$y = "nº\ de\ conejos"$$

2. Planteamos ahora dos ecuaciones con los datos del enunciado:

Número de animales: Como en total hay 14 cabezas (o animales), sumando ambas incógnitas debe dar ese resultado.

$$x + y = 14$$

Número de patas: Hay 38 patas entre todos los animales. Una gallina tiene 2 patas, luego y gallinas tendrán $2y$ patas. Un conejo tiene 4 patas, luego x conejos tendrán $4x$ patas.

$$2x + 4y = 38$$

3. Planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + \ \ y = \ 14 \\ 2x + 4y = 38 \end{cases}$$

4. Y obtenemos como solución:

$$\boxed{x = 9 \ ; \ y = 5}$$

Solución: En el corral hay 9 gallinas y 5 conejos.

Comprobamos que las soluciones cumplen el problema planteado:

$$\begin{cases} 9 + 5 = 14\ animales \\ 2 \cdot 9 + 4 \cdot 5 = 18 + 20 = 38\ patas \end{cases}$$

Ejemplo: Un fabricante de bombillas gana 0,30 € por cada bombilla buena que fabrica, pero pierde 0,40 € por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2.100 bombillas obtuvo un beneficio de 484,40 €. ¿Cuántas bombillas de cada tipo fabricó ese día?

1. Elegimos las incógnitas para responder a la pregunta: "¿Cuántas bombillas de cada tipo fabricó ese día?"

$$x = "nº\ de\ bombillas\ buenas"$$
$$y = "nº\ de\ bombillas\ defectuosas"$$

2. Planteamos ahora dos ecuaciones con los datos del enunciado:

Número de bombillas: En total hay 2.100 bombillas entre buenas y defectuosas, luego sumando ambas incógnitas debe dar ese resultado.

$$x + y = 2100$$

Beneficio obtenido: Cada bombilla buena supone un ingreso de 0,30 €, luego x bombillas serán $0{,}30 \cdot x$ euros positivos. Pero cada bombilla defectuosa supone una pérdida de 0,40 €, luego y bombillas defectuosas será $0{,}40 \cdot y$ euros negativos. El beneficio obtenido será:

$$0.3x - 0.4y = 484.40$$

3. Planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + \ \ y = \ 2100 \\ 0.3x - 0.4y = 484.40 \end{cases}$$

4. Y obtenemos como solución:

$$\boxed{x = 1.892 \ ; \ y = 208}$$

Solución: Se han fabricado 1.892 bombillas buenas y 208 defectuosas.

Comprobamos que las soluciones cumplen el problema planteado:

$$\begin{cases} 1892 + 208 = \ 2100\ bombillas \\ 0.4 \cdot 1892 - 0.3 \cdot 208 = 484.40\ € \end{cases}$$

Ejemplo: En una fábrica de zumos se mezclan dos tipos de calidades: una de 0,5 $€/l$ y otra de 0,8 $€/l$. ¿Cuántos litros de zumo de cada tipo se han de mezclar para obtener 120 litros con un coste de 75 €?

1. Elegimos las incógnitas para responder a la pregunta: "¿Cuántos litros de cada tipo en la mezcla?"

$$x = \text{"nº de litros de mezcla } A\text{"}$$

$$y = \text{"nº de litros de mezcla } B\text{"}$$

2. Planteamos ahora dos ecuaciones con los datos del enunciado:

Número de bombillas: En total hay 120 litros en la mezcla, luego sumando ambas cantidades debe dar ese resultado.

$$x + y = 120$$

Precio de la mezcla: Cada litro del zumo A cuesta 0,50 €, luego x litros serán $0{,}50 \cdot x$ euros, y cada litro del zumo B cuesta 0,30 €, luego y litros costarán $0{,}30 \cdot y$ euros. La suma de ambas cosas debe dar el precio total de la mezcla final.

$$0.5x + 0.3y = 75$$

3. Planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + \quad y = 120 \\ 0.5x + 0.3y = 75 \end{cases}$$

4. Y obtenemos como solución:

$$\boxed{x = 70 \quad ; \quad y = 50}$$

Solución: Deben mezclarse 70 litros del zumo tipo A con 50 litros del zumo tipo B.

Comprobamos que las soluciones cumplen el problema planteado:

$$\begin{cases} 70 + 50 = 120 \; litros \\ 0.5 \cdot 70 + 0.3 \cdot 50 = 75 \; € \end{cases}$$

Además, para saber el precio del litro en la nueva mezcla, hacemos:

$$\frac{75 \; €}{120 \; l} = 0.625 \; €/l$$

Tipo 2	Las ecuaciones se obtienen a partir de la relación que se establece entre ambas incógnitas o valores desconocidos en dos situaciones diferentes que mantienen las mismas características o que tratan sobre lo mismo (precio, número de cosas, etc.)

Ejemplo: Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 7,80 euros. Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 13,20 euros. ¿Cuánto cuesta el kilo de cada cosa?

1. Elegimos las incógnitas para responder a la pregunta: "¿Cuánto cuesta el kilo de plátanos y de peras?"

$$x = \text{"}Precio\ del\ kilo\ de\ plátanos\text{"}$$
$$y = \text{"}Precio\ del\ kilo\ de\ peras\text{"}$$

2. Planteamos ahora dos ecuaciones con los datos del enunciado:

Primera compra: Dos kilos de plátanos y tres de peras cuestan 7,80 €

$$2x + 3y = 7.80$$

Segunda compra: Cinco kilos de plátanos y cuatro de peras cuestan 13,20 €

$$5x + 4y = 13.20$$

3. Planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = \ \ 7.8 \\ 5x + 4y = 13.2 \end{cases}$$

4. Y obtenemos como solución:

$$\boxed{x = 1.20\,€ \quad ; \quad y = 1.80\,€}$$

Solución: El kilo de plátanos cuesta 1.20 € y el de peras 1.80 €.

Comprobamos que las soluciones cumplen el problema planteado:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1.20 + 3 \cdot 1.80 = \ \ 7.80\,€ \\ 5 \cdot 1.20 + 4 \cdot 1.80 = 13.20\,€ \end{cases}$$

Ejemplo: José dice a Eva: "Mi colección de discos es mejor que la tuya, porque si te doy a ti 10, tendríamos la misma cantidad". Eva le responde: "Reconozco que llevas razón. Solo te faltan 10 para tener el doble que yo". ¿Cuántos discos tiene cada uno?

1. Elegimos las incógnitas para responder a la pregunta: "¿Cuántos discos tiene cada uno?"

$$x = \text{"}Número\ de\ discos\ de\ José\text{"}$$
$$y = \text{"}Número\ de\ discos\ de\ Eva\text{"}$$

2. Planteamos ahora dos ecuaciones con los datos del enunciado:

Primera frase: Si José le da a Eva 10 discos, su número se reducirá en 10 y el de Eva aumentará 10.

$$x - 10 = y + 10$$

Segunda frase: Si José aumenta su número de discos en 10, va a tener el doble de discos que Eva.

$$x + 10 = 2y$$

3. Planteamos el sistema y lo organizamos de la forma apropiada quedando:

$$\begin{cases} x - \ \ y = \ \ 20 \\ x - 2y = -10 \end{cases}$$

4. Lo resolvemos y obtenemos como solución:

$$\boxed{x = 50 \quad ; \quad y = 30}$$

Solución: José tiene 50 discos y Eva 30 discos.

Comprobamos que las soluciones cumplen el problema planteado (las dos frases):

$$\begin{cases} 50 - 10 = 30 + 10 \ \ discos \\ 50 + 10 = 2 \cdot 30 \ \ discos \end{cases}$$

Otros Tipos	Modelos de sistemas donde es necesario entender bien el enunciado y tener conocimientos un poco más avanzados o de otro tipo (geométrico, aritmético, etc.) para seleccionar las incógnitas y expresar la relación entre ellas a través de las dos ecuaciones.

Ejemplo: El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Calcula las dimensiones y el área de dicho rectángulo.

1. Elegimos las incógnitas para responder a la pregunta: "¿Cuánto miden sus lados?"

$$x = \text{"}Medida\ de\ la\ base\text{"}$$
$$y = \text{"}Medida\ de\ la\ altura\text{"}$$

2. Planteamos ahora dos ecuaciones con los datos del enunciado:

Primera frase: El perímetro de un rectángulo es la suma de sus lados.

$$2x + 2y = 64$$

Segunda frase: La base es 6 cm mayor que la altura.

$$x - y = 6$$

3. Planteamos el sistema y lo resolvemos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 64 \\ x - \ \ y = 6 \end{cases}$$

4. Y obtenemos como solución:

$$\boxed{x = 19 \ ; \ y = 13}$$

Solución: Su base mide 19 cm y su altura 13 cm. El área del rectángulo será $A = 19 \cdot 13 = 247\ cm^2$.

Comprobamos que las soluciones cumplen el problema planteado (las dos condiciones):

$$\begin{cases} 2 \cdot 19 + 2 \cdot 13 = 38 + 26 = 64\ cm \\ 19 - 13 = 6\ cm \end{cases}$$

Ejemplo: Un empresario quiere repartir una gratificación entre sus empleados. Si da a cada uno 80 €, le sobran 20 €, y si da a cada uno 90 € le faltan 40 €. ¿Cuántos empleados tiene? ¿Cuánto dinero tiene para repartir?

1. Elegimos las incógnitas para responder a las preguntas:

$$x = \text{"}nº\ de\ empleados\text{"}$$
$$y = \text{"}Dinero\ a\ repartir\text{"}$$

2. Planteamos ahora dos ecuaciones con los datos del enunciado:

Primera frase: Como son x empleados, si da a cada uno 80 € gastará $80x$ euros, que sumados a los 20 € que le sobrarían, dan el total del dinero que tiene para repartir:

$$y = 80x + 20$$

Segunda frase: Razonando de igual forma, si da a cada uno 90 € gastará $90x$ euros, que suponen 40 € más que el total del dinero que tiene para repartir:

$$y + 40 = 90x$$

3. Planteamos el sistema y lo organizamos de la forma apropiada quedando:

$$\begin{cases} 80x - y = -20 \\ 90x - y = \ \ \ 40 \end{cases}$$

4. Lo resolvemos y obtenemos como solución:

$$\boxed{x = 6 \ ; \ y = 500}$$

Solución: Tiene 6 empleados y quiere repartir 500 €.

Comprobamos que las soluciones cumplen el problema planteado (las dos condiciones):

Si da a cada uno 80 € le sobran 20 €: $6 \cdot 80 = 480$ €, le sobran 20 € para llegar a 500 €.

Si da a cada uno 90 € le faltarían 40 €: $6 \cdot 90 = 540$ €, le faltarían 40 €, pues solo tiene 500 €.

AUTOEVALUACIÓN: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resuelve los siguientes problemas utilizando el álgebra.

1 Seis camisetas y cinco gorras cuestan 227 €. Cinco camisetas y 4 gorras cuestan 188 €. Halla el precio de cada cosa.

Solución: Precio Camiseta: 32 €
Precio Gorra: 7 €

2 He comprado un cuaderno que costaba 3 € y para pagarlo he utilizado nueve monedas, unas de 20 céntimos y otras de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado?

Solución: Monedas de 20 céntimos: 5
Monedas de 50 céntimos: 4

3 En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?

Solución: Respuestas correctas: 18
Respuestas erróneas: 12

4 Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 80 m y la altura es 2/3 de su base.

Solución: Base: 24 m
Altura: 16 m

5 En 3°A hay el doble número de alumnos que en el grupo de 3°B. Además, si se pasan 8 alumnos de 3°A al grupo de 3°B, ambos tendrán el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

Solución: Alumnado 3ºA: 32
Alumnado 3ºB: 16

6 Tenemos dos grifos A y B. Si abrimos el grifo A durante 3 minutos y el B durante 1 minuto, salen en total 50 litros de agua. En cambio, si abrimos el grifo B durante 2 minutos y el A durante 1 minuto, salen en total 40 litros. ¿Cuántos litros de agua arroja cada grifo en 1 minuto?

Solución: Grifo A: 12 l/min
Grifo B: 14 l/min

7 Javier dispone de un capital de 8.000 €, del que una parte la mete en un depósito al 5% anual y otra al 6% anual. Calcula ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año es de 8.450 €.

Solución: Capital en el depósito al 5%: 3.000 €
Capital en el depósito al 6%: 5.000 €

8 Una empresa que fabrica jarrones recibe un encargo para un día determinado. Al planificar la producción se dan cuenta de que si fabrican 250 jarrones al día, faltarían 150 jarrones por hacer al concluir el plazo que tienen, y si fabrican 260 jarrones diarios, les sobrarían 80. ¿Cuántos días tienen de plazo y cuántos jarrones les encargaron?

Solución: Días de plazo: 23
Nº de jarrones encargados: 5.900

9 La edad de Manuel es el doble de la edad de su hija Ana. Hace diez años, la suma de las edades de ambos era igual a la edad actual de Manuel. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Solución: Edad actual de Manuel: 40 años
Edad actual de Ana: 20 años

10 Un bodeguero quiere obtener 160 litros de un vino de calidad intermedia a 2,5 €/litro mezclando dos tipos de vino. El primero, de mejor calidad, cuesta 3 €/litro, y el otro, de calidad inferior, 2,2 €/litro. ¿Cuántos litros de cada uno deberá mezclar para obtener lo que desea?

Solución: Días de plazo: 23
Nº de jarrones encargados: 5.900

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación te ofrecemos una larga lista de problemas que pueden resolverse utilizando ecuaciones y/o sistemas de ecuaciones, recopilados y agrupados por categorías.

Geométricos

1. El perímetro de un rectángulo es 400 m. Halla sus dimensiones sabiendo que la base es 2 m mayor que la altura.
2. En un rectángulo de altura 5 m, sabemos que su perímetro es 16 m. Calcula la longitud de la base.
3. En un triángulo se sabe que un ángulo tiene 36º más que otro. Calcula cuánto mide cada uno de los ángulos de dicho triángulo.
4. ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo si uno mide 50º y la diferencia entre los otros dos es de 30º?
5. El perímetro de un rectángulo tiene 28 cm. Calcula el área de este rectángulo sabiendo que uno de sus lados tiene 4 cm más que el otro.
6. En un triángulo isósceles de 14 cm de perímetro, el lado desigual es tres veces menor que cualquiera de los otros dos. ¿Cuánto miden sus lados?

Números desconocidos

7. La suma de dos números consecutivos es 73. ¿Qué números son?
8. Calcula el número cuyo doble mas su triple suma 35.
9. La suma de dos números es 55 y uno de ellos es la cuarta parte del otro. Halla los números.
10. La suma de tres números es 330. El primero es el doble del segundo y el segundo es el triple del tercero. Calcula dichos números.
11. El triple de un número más el cuádruple de otro es 10 y el segundo más el cuádruple del primero es 9. ¿Cuáles son estos números?
12. Halla dos números cuya suma es 1 y su diferencia es 6.
13. Dos números suman 51. Si el primero lo dividimos entre 3 y el segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1. Halla los números.

Edades

14. Pablo tiene 8 años y su prima 2. ¿Al cabo de cuántos años la edad de Pablo será el doble que la de su prima?
15. La edad de María mas el doble de la de Pedro suman 14 años. El doble de la edad de María dentro de 4 años será la que tenga Pedro dentro de seis. Halla sus edades.
16. La edad de una persona es el doble de la de la otra. Hace 7 años la suma de las edades era igual a la edad actual de la primera. Halla las edades de las personas.
17. Hace 5 años la edad de una persona era el triple de la de otra, y dentro de 5 años será el doble. Halla las edades de cada una de las personas.
18. Hace 1 año la edad del padre era 3 veces mayor que la del hijo, pero dentro de 13 años no tendrá más que el doble. Halla las edades del padre y del hijo.

Adivina cuántos…

19. En un zoológico hay el doble número de tigres que de panteras, y sabemos que en total son 171 animales. Calcula cuántos animales hay de cada especie.
20. Luisa tiene 5 cromos más que Sergio y entre los dos suman 59 cromos. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?
21. En un taller, el número de coches es igual al doble del número de motos más 2. Calcula el número de coches y de motos que hay si en total hay 48 ruedas.
22. Por un desierto va una caravana de camellos y dromedarios, con un total de 440 patas y 160 jorobas. ¿Cuántos camellos y cuántos dromedarios hay en la caravana?
23. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Dispone en total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?
24. En una tienda de antigüedades hay 12 candelabros de 2 y 3 brazos. Si se utilizan todos sus brazos, se necesitan 31 velas, ¿cuántos candelabros hay de cada tipo?
25. La entrada para una función de teatro al aire libre vale 60 €, adultos, y 25 €, niños. Si hubo 280 asistentes y una recaudación de 14.000 €, ¿cuántos niños asistieron a la función?

26. Dos hermanos fueron a pescar. Al final del día uno dijo:"Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". El otro le respondió:"Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenía cada uno?
27. Un jurado está compuesto por hombres y mujeres. El número de mujeres es el doble que el de hombres menos 4, pero con dos mujeres menos el jurado tendría el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en el jurado?

Money, money...

28. Pepe, Antonio y Manuel han ganado 3.300 € que van a repartir de la siguiente forma: a Pepe la corresponden 200 € menos que a Manuel, y a Antonio 200 € menos que a Pepe. ¿Cuánto corresponde a cada uno?
29. Paula tiene en el monedero varias monedas de 20 y de 5 céntimos. ¿Cuántas monedas tiene de cada tipo si tiene 1,50 € y las monedas son 12?
30. He comprado 5 latas de refresco y 4 botellas de agua por 6 €. Posteriormente, con los mismos precios he comprado 4 latas de refresco y 6 botellas de agua y me han costado 6,20 €. Halla los precios de ambas cosas.
31. Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a 4,50 €, y otros, a 3,60 €, obteniendo de la venta 310,50 €. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?
32. En un bar se venden bocadillos de jamón a 3,5 € y bocadillos de tortilla a 2 €. En una mañana vendieron 52 bocadillos y la recaudación final fue de 149 €. ¿Cuántos se vendieron de cada clase?
33. Un grupo de amigos tiene que pagar una factura de 500 euros. Si fueran dos amigos más, cada uno de ellos tendría que pagar 12,5 euros menos. ¿Cuántos amigos son?
34. En la panadería, Ezequiel pagó 5 € por 5 barras de pan y tres ensaimadas. Si Ángela pagó 1,90 € por dos barras de pan y una ensaimada, ¿cuál es el precio de la barra de pan y de la ensaimada?
35. Repartir 284 euros entre tres personas, de forma que la primera reciba 18 euros más que la segunda y la tercera tanto como las otras dos juntas.

Empresas y negocios

36. En una empresa obtienen 6 € de beneficio por cada envío que hacen; pero si el envío es defectuoso, pierden por él 8 €. En un día hicieron 2 100 envíos, obteniendo 9 688 € de beneficio. ¿Cuántos envíos válidos y cuántos defectuosos hicieron ese día?
37. Una empresa fabrica dos tipos de bicicletas, A y B. Para fabricar una del modelo A, se necesitan 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para una del modelo B, 2 kg de cada uno de esos materiales. Si la empresa dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio, ¿cuántas bicicletas de cada tipo puede fabricar?
38. Un comerciante compró cierto número de lámparas por 465 euros. Se le rompieron 3 y tuvo que vender cada una de las otras, 10 euros más caras de lo que le habían costado para obtener un beneficio de 27 euros. ¿Cuántas lámparas compró y a qué precio?

Mezclas

39. Se desea mezclar vino de 5,50 €/l. con otro de 4 €/l. de modo que la mezcla resulte a 4,50 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 300 litros de la mezcla?
40. Se mezcla café de 6 euros/kg con café de 4 euros/kg obteniendo 8 kg de mezcla. Sabiendo que el precio del café mezclado es de 4,5 euros/kg, ¿cuántos kilos se han mezclado de cada clase?
41. Se quiere obtener 1 lingote de oro de 1 kg. de peso y ley de 900 milésimas, fundiendo oro de 975 milésimas y oro de 875 milésimas. ¿Qué cantidad hay que fundir de cada clase?
42. ¿Cuántos litros de leche con un 10% de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4% de grasa para obtener 18 litros con un 6% de grasa?
43. Dos líquidos de densidades 0,7 kg./l y 1,3 kg./l se mezclan obteniéndose un líquido de densidad 0,9 kg./l. Halla la cantidad de líquido que hay que tomar de cada clase para obtener una mezcla de 30 litros.